

Оценивание параметров системы одновременных уравнений

**Модель
идентифицируема:**

*Косвенный метод
наименьших
квадратов (КМНК)*

**Модель
сверхидентифицируема:**

- *Двухшаговый метод
наименьших квадратов
(ДМНК)*
- *Трехшаговый метод
наименьших квадратов
(ТМНК)*
- *Метод максимального
правдоподобия (ММК)*

Косвенный метод наименьших квадратов

1. Строится приведенная форма модели

2. Для каждого уравнения приведенной модели традиционным МНК оцениваются параметры модели

3. Коэффициенты приведенной модели трансформируются в параметры структурной модели

Косвенный метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + a_2 y_t + \varepsilon_1 \\ Q_t^S = b_0 + b_1 P_t + b_2 I_t + \varepsilon_2 \\ Q_t^d = Q_t^S \end{cases}$$

P_t - цена товара

y_t - доход на душу населения

I_t - инвестиции в производство

Q_t^d - спрос в момент времени t

Q_t^S - предложение в момент времени t

Q_t	20	33	28	41	40	36	42	38	51
P_t	3	3	5	4	5	6	6	7	7
y_t	34	43	51	49	55	62	70	68	78
I_t	5	6	6	7	7	6	8	8	12

Косвенный метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} Q_t = A_1 + \delta_1 y_t + \delta_2 I_t + u_{1t} \\ P_t = A_2 + \delta_1 y_t + \delta_1 I_t + u_{2t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q_t = 6,022 + 0,234 y_t + 2,394 I_t + u_{1t} \\ P_t = -0,692 + 0,127 y_t - 0,189 I_t + u_{2t} \end{cases}$$

$$Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + a_2 y_t + \varepsilon_1$$

$$I_t = \frac{-P_t - 0,692 + 0,127 y_t}{0,189} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_t^d = 6,022 + 0,234 y_t + 2,394 I_t + u_{1t} \\ Q_t^d = -2,743 - 12,667 P_t + 1,842 y_t + \varepsilon_1 \end{array} \right.$$

$$Q_t^d = 6,022 + 0,234 y_t + 2,394 \cdot \frac{-P_t - 0,692 + 0,127 y_t}{0,189} + 2,742 I_t - 2,743 - 12,667 P_t + 1,842 y_t$$

$$Q_t^S = b_0 + b_1 P_t + b_2 I_t + \varepsilon_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_t^d = Q_t^S \\ Q_t^d = Q_t^S \end{array} \right.$$

$$y_t = \frac{P_t + 0,692 + 0,189 I_t}{0,127}$$

$$Q_t^S = 6,022 + 0,234 \cdot \frac{P_t + 0,692 + 0,189 I_t}{0,127} + 2,394 \cdot I_t = 7,297 + 1,843 P_t + 2,742 I_t$$

Косвенный метод наименьших квадратов

Оценка значимости

Уравнение приведенной модели $Q_t = 6,022 + 0,234y_t + 2,394I_t + u_{1t}$

$$F = 10,54 \quad R^2 = 0,778$$

$$F_{табл} = 5,14 \quad \text{при } \alpha = 0,05$$

Уравнение структурной модели

$$Q_t^d = -2,743 - 12,667P_t + 1,842y_t + \varepsilon_1$$

$$F = 10,54 \quad R^2 = 0,778$$

$$Q_t^d = Q_t^s$$

$$Q_t^s = 7,297 + 1,843P_t + 2,742I_t + \varepsilon_2$$

$$F = 10,54 \quad R^2 = 0,778$$

Двухшаговый метод наименьших квадратов

1 шаг. Построение приведенной формы модели (ПФМ)

2 шаг. Для каждого уравнения структурной формы модели (СФМ)

- находят эндогенные переменные, являющиеся факторными признаками;
- для этих переменных определяют их выровненные значения, используя соответствующие уравнения ПФМ;
- находят параметры рассматриваемого уравнения СФМ обычным МНК, заменяя исходные значения эндогенных переменных-факторов их выровненными значениями

$$\begin{cases} КП_t = a_1 + b_{11}ВВП_t + \varepsilon_1 \\ ВН_t = a_2 + b_{21}ВВП_{t-4} + \varepsilon_2 \\ ВВП_t = КП_t + ВН_t + \mathcal{E}_t \end{cases}$$

Проверка на идентификацию – необходимое условие

Для первого уравнения:

- количество эндогенных переменных, входящих в это уравнение, – 2 ($КП_t$ и $ВВП_t$), $H=2$;
- количество predetermined переменных, не входящих в это уравнение, - 2 (\mathcal{E}_t и $ВВП_{t-4}$), $D=2$

$H < D+1$ □ уравнение сверхидентифицировано

Для второго уравнения:

- количество эндогенных переменных, входящих в это уравнение, – 1 ($ВН_t$), $H=1$;
- количество predetermined переменных, не входящих в это уравнение, - 1 (\mathcal{E}_t), $D=1$

$H < D+1$ □ уравнение сверхидентифицировано

Проверка на идентификацию – достаточное условие

$$\begin{cases} КП_t = a_1 + b_{11}ВВП_t + \varepsilon_1 \\ ВН_t = a_2 + b_{21}ВВП_{t-4} + \varepsilon_2 \\ ВВП_t = КП_t + ВН_t + \varepsilon_t \end{cases}$$

Для первого уравнения

$$\begin{pmatrix} -1 & b_{21} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & b_{11} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг данной матрицы = 2

Для второго уравнения

Ранг данной матрицы = 2

1 шаг. Построим приведенную форму модели

$$\begin{cases} ВВП_t = A_1 + B_{11} \cdot ВВП_{t-4} + B_{12} \cdot \varepsilon_t + u_1 \\ КП_t = A_2 + B_{21} \cdot ВВП_{t-4} + B_{22} \cdot \varepsilon_t + u_2 \\ ВН_t = A_3 + B_{31} \cdot ВВП_{t-4} + B_{23} \cdot \varepsilon_t + u_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ВВП_t = -31,53 + 1,06 \cdot ВВП_{t-4} + 0,51 \cdot \varepsilon_t + u_1 \\ КП_t = 79,06 + 0,52 \cdot ВВП_{t-4} - 0,11 \cdot \varepsilon_t + u_2 \\ ВН_t = -110,59 + 0,54 \cdot ВВП_{t-4} - 0,38 \cdot \varepsilon_t + u_3 \end{cases}$$

2 шаг. Рассчитаем выровненные значения $ВВ\Pi_t$

Применим метод наименьших квадратов к первому уравнению СФМ

$$\begin{cases} \sum K\Pi_t = na_1 + b_{11} \cdot \sum V\hat{V}\Pi_t \\ \sum V\hat{V}\Pi_t \cdot K\Pi_t = a_1 \cdot \sum V\hat{V}\Pi_t + b_{11} \cdot \sum V\hat{V}\Pi_t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10762,95 = 40a_1 + 15646,32b_{11} \\ 4259441 = 15645,32a_1 + 6241957b_{11} \end{cases}$$

$$K\Pi_t = 110,48 + 0,4 \cdot V\hat{V}\Pi_t + e_1$$

Проверка значимости:

t -критерий = 7,96, t табличное = 2,0244 (df=40-2=38, $\alpha = 0,05$)

$F = 63,3$ F табличное = 4,1; $R^2 = 0,62$

Применим метод наименьших квадратов ко второму уравнению СФМ

$$\begin{cases} \sum BH_t = na_2 + b_{21} \cdot \sum BB\Pi_{t-4} \\ \sum BB\Pi_{t-4} \cdot BH_t = a_2 \cdot \sum BB\Pi_{t-4} + b_{21} \cdot \sum BB\Pi_{t-4}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3120,942 = 40a_2 + 15129,49b_{21} \\ 1223653 = 15129649a_2 + 5812350b_{21} \end{cases}$$

$$BH_t = -103,89 + 0,48 \cdot BB\Pi_{t-4} + e_2$$

Проверка значимости:

t -критерий = 7,05, t табличное = 2,0244 (df=40-2=38, $\alpha = 0,05$)

$F = 49,7$ F табличное = 4,1; $R^2 = 0,57$

$$\begin{cases} KP_t = 110,48 + 0,4 \cdot BB\Pi_t + e_1 \\ BH_t = -103,89 + 0,48 \cdot BB\Pi_{t-4} + e_2 \\ BB\Pi_t = KP_t + BH_t + \Xi_t \end{cases}$$