§4. Сравнение бесконечно малых (больших) величин

4.1 Порядок малости (роста)

Определение 4.1

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to x_0$. Говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая *более высокого порядка,* чем $g(x)$ в точке x_0. Это значит, что $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$ на порядок быстрее, чем $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок малости* в точке x_0.

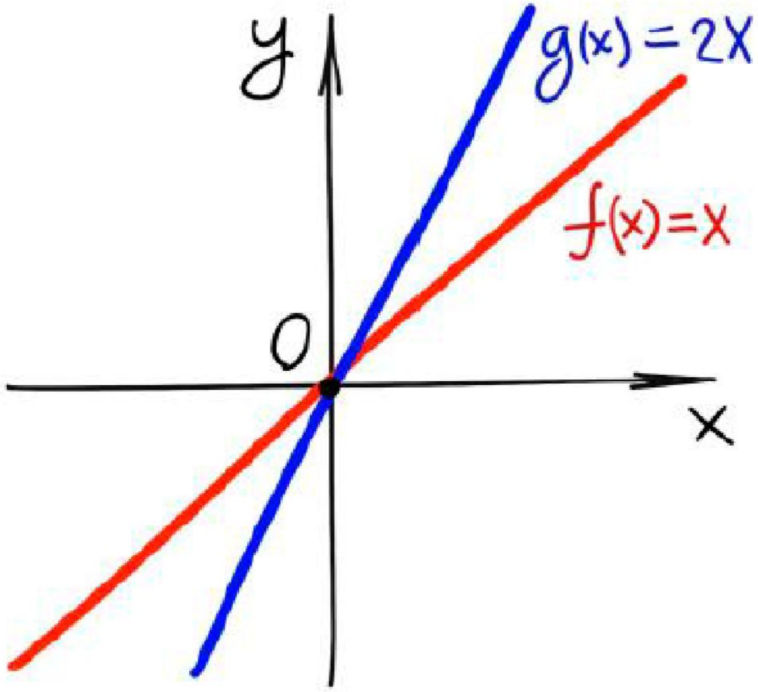
Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке x_0.

A: $f(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $g(x)$.

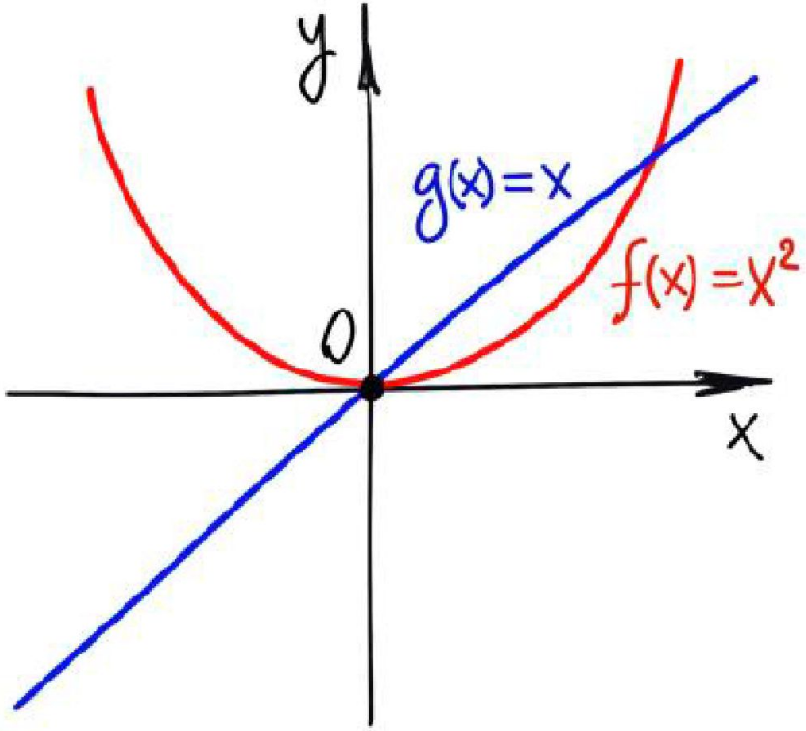
B: $f(x)$ стремится к нулю на порядок быстрее, чем $g(x)$;

C: $f(x)$ более высокого порядка малости, чем $g(x)$;

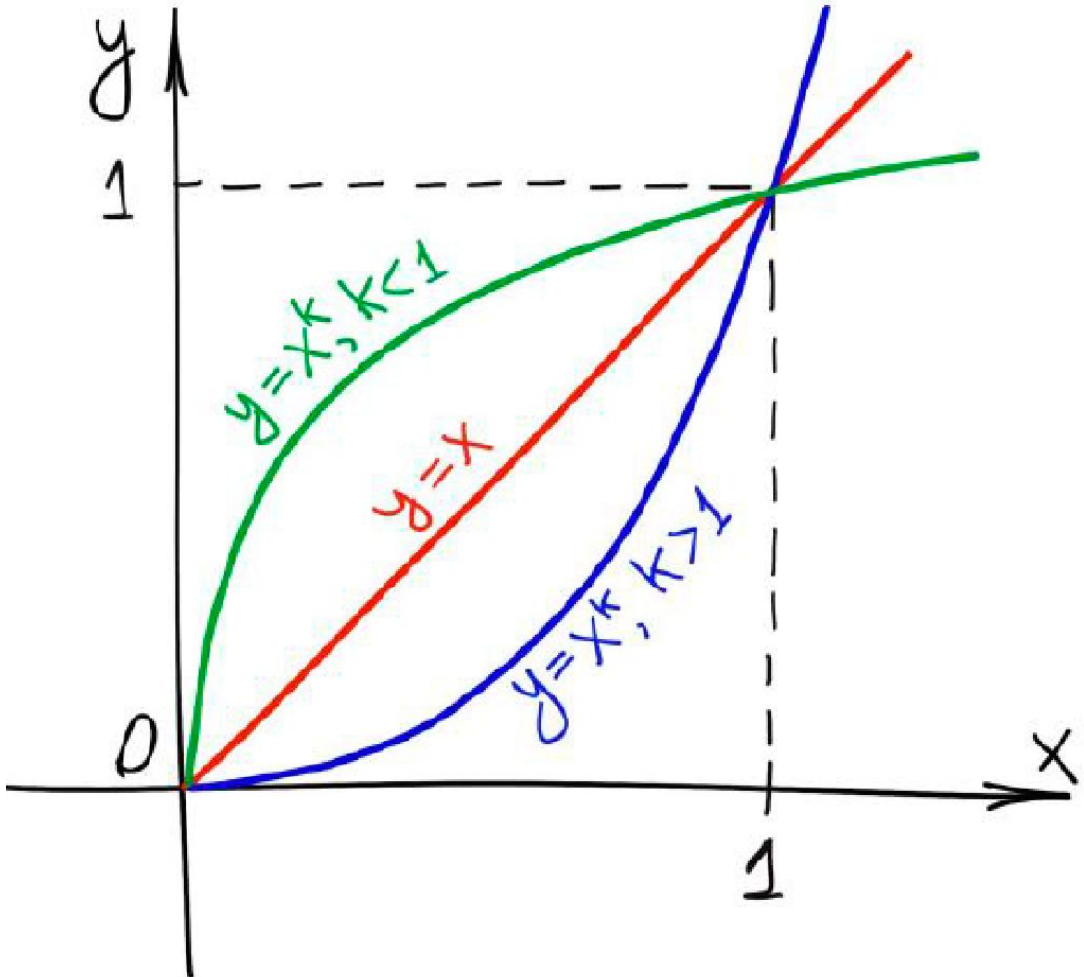
1) $f(x)=x$, $g(x)=2x$



2) $f(x)=x^2$, $g(x)=x$



Порядок малости функции в точке x_0 сказывается на форме графика функции: в окрестности точки x_0 график бесконечно малой функции, имеющей более высокий порядок малости, прилегает к оси абсцисс более плотно по сравнению с графиком функции, имеющей более низкий порядок малости (см. рисунок).



Задача 1. Сравнить порядки бесконечно малых функций

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \text{ и } g(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x \quad \text{в точке } x_0 = 1$$

Задача 1. Сравнить порядки бесконечно малых функций

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \text{ и } g(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x \quad \text{в точке } x_0 = 1$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{(1+x)\left(1-2\sqrt{x}+x\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to1}\frac{\overbrace{1+\sqrt{x}}^{\to2}}{\underbrace{(1+x)}_{\to2}\underbrace{\left(1-\sqrt{x}\right)}_{\to0}} = \infty$$

Задача 1. Сравнить порядки бесконечно малых функций

$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ и $g(x)=1-2\sqrt{x}+x$ в точке $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(1+x)\left(1-2\sqrt{x}+x\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\overbrace{1+\sqrt{x}}^{\to2}}{\underbrace{(1+x)}_{\to2}\underbrace{\left(1-\sqrt{x}\right)}_{\to0}}=\infty$$

$$1-2\sqrt{x}+x=o\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\text{ при } x\to1$$

Определение 4.1′

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то пишут $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$. Говорят, что $g(x)$ – бесконечно большая *более высокого порядка,* чем $f(x)$ в точке x_0. Это означает, что $g(x) \underset{x \to x_0}{\to} \infty$ на порядок быстрее, чем $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} \infty$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок роста* в точке x_0.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке x_0.

Задача 2. Сравнить порядки двух бесконечно больших функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0.

1. $f(x)=\sqrt{x^4+x-1}+x$, $g(x)=x^2\ln x$, $x_0=+\infty$

Задача 2. Сравнить порядки двух бесконечно больших функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0.

$$1.\quad f(x)=\sqrt{x^4+x-1}+x,\ g(x)=x^2\ln x,\ x_0=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+x-1}+x}{x^2\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+\frac{1}{x}\right)}{x^2\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+\frac{1}{x}}^{\to 1,\ \text{огр.}}}{\underbrace{\ln x}_{\to+\infty}}=0$$

$$\sqrt{x^4+x-1}+x=o\left(x^2\ln x\right)\ \text{при}\ x\to+\infty$$

$$2.\quad f(x)=\frac{1}{1-x},\; g(x)=\frac{x^3}{1-x^2},\; x_0=1$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}:\frac{x^3}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\overset{\to 2}{1+x}}{\underset{\to 1}{x^3}}=2$$

Следовательно, функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок роста в точке x_0

Лемма 4.2 [без доказательства]

Пусть $k>0$, $a>1$. Тогда при $x\to+\infty$

$$\log_a x=o(x^k),\quad x^k=o(a^x),\quad a^x=o(x^x),\quad x^x=o([x]!).^2$$

$\log_a x$	x^k	a^x	x^x	$n!=[x]!$

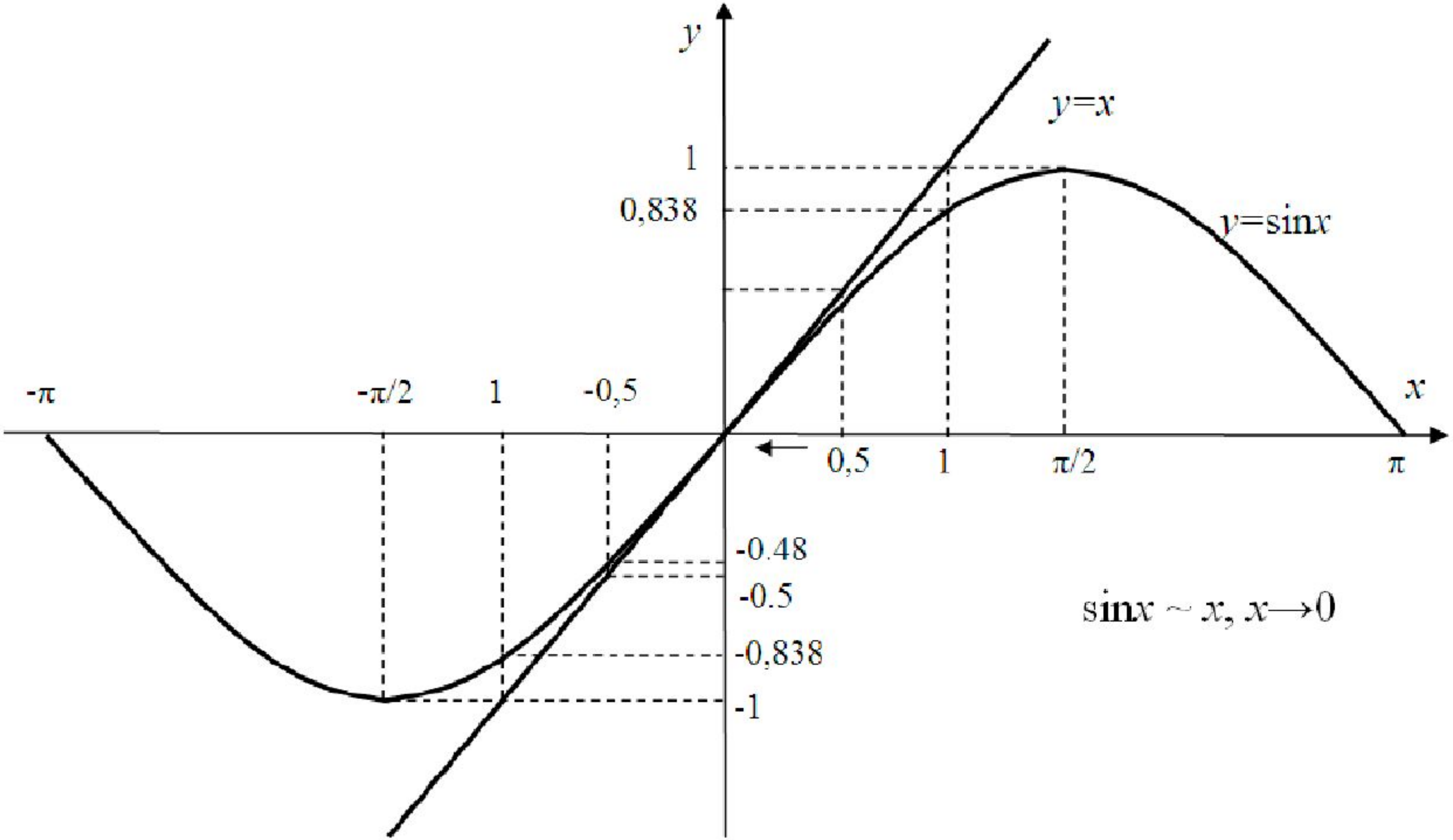
4.2 Эквивалентные бесконечно малые (большие) величины

Определение 4.3

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно малые (большие) функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* в точке x_0.

Обозначение: $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$. Эквивалентные бесконечно малые (большие) функции с одинаковой скоростью стремятся к нулю (к бесконечности) при $x \to x_0$.


y
y=x
1
0,838
y=sinx
-π
-π/2
1
-0,5
x
0,5
1
π/2
π
-0.48
-0.5
-0,838
-1
sinx ~ x, x→0

Теорема 4.4 (список основных отношений эквивалентности)

При $x \to 0$ следующие бесконечно малые функции эквивалентны:

$$\sin x \sim x \qquad \arcsin x \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \qquad \operatorname{arctg} x \sim x \qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad \ln(1+x) \sim x \qquad (1+x)^m - 1 \sim m \cdot x$$

Лемма 4.5 (формула Стирлинга для факториала) [без доказательства]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ при } n \to \infty$$

Лемма 4.6 (свойства отношения эквивалентности)

Пусть $f(x), g(x), h(x)$ – три бесконечно малые (большие) функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$ (рефлексивность);

2. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \;\Rightarrow\; g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$ (симметричность);

3. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x),\; g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x) \;\Rightarrow\; f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$ (транзитивность);

4. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \;\Rightarrow\; f(x)h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)h(x)$;

5. $f_0(x) \underset{x\to x_0}{\to} a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f_0(x) f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a f(x);$

6. $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ \varphi\big(f(x)\big) - \text{беск. малая (больш.) в } x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi\big(f(x)\big) \underset{x\to x_0}{\sim} \varphi\big(g(x)\big);$

7. $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ \psi(t) \underset{t\to t_0}{\to} x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(\psi(t)) \underset{t\to t_0}{\sim} g(\psi(t)).$

Чтобы заменить бесконечно малую (большую) в точке x_0 функцию на эквивалентную, надо выделить в ней бесконечно малый (большой) множитель так, чтобы все остальные множители имели конечный ненулевой предел в точке x_0, после чего заменить их на значение этого предела.

Лемма 4.7

Значение предела функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ не изменится, если любой бесконечно малый или бесконечно большой ее множитель заменить на эквивалентный в точке x_0.

Доказательство.

Пусть требуется вычислить предел $f(x)h(x)$ в точке x_0 и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x)$.

4.3 Степенная шкала

Определение 4.8

Пусть $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно малые (большие) функция в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $k > 0$. Если функции $f(x)$ и $\left(g(x)\right)^k$ имеют одинаковый порядок малости (роста) в точке x_0, то число k называется порядком функции $f(x)$ *относительно функции* $g(x)$ или *по шкале* $\left(g(x)\right)^k$.

$f(x)$, x_0	степенная шкала, $k > 0$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0 \in \mathbb{R}$	$(x - x_0)^k$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0 \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(x - x_0)^k}$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0 = \infty$	$\dfrac{1}{x^k}$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0 = \infty$	x^k

Дана функция $f(x)=\dfrac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Дана функция $f(x)=\dfrac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

$$1)\quad x\to\infty \quad\Rightarrow\quad \frac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\frac{x^5\overbrace{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}^{\to 1}}{x\underbrace{\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}_{\to 1}}\sim x^4 \quad\Rightarrow\quad k=4$$

Дана функция $f(x)=\dfrac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

$$2)\quad x\to 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\frac{x^4\overbrace{(x-2)}^{\to -2}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^3-1}}_{\to -1}}\sim 2x^4 \quad\Rightarrow\quad k=4$$

Дана функция $f(x) = \dfrac{x^5 - 2x^4}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$.

$$3)\quad x \to 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^5 - 2x^4}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} = \frac{\overset{\to 16}{x^4}\,(x-2)}{\underbrace{\sqrt[3]{x^3 - 1}}_{\to \sqrt[3]{7}}} \sim \frac{16}{\sqrt[3]{7}}(x-2) \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

Дана функция $f(x)=\dfrac{x^5-2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

$$4)\quad x\to 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\overbrace{x^5-2x^4}^{\to -1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}\,\underbrace{\sqrt[3]{x^2+x+x}}_{\to\sqrt[3]{3}}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x-1}}\quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{3}$$

Упражнение. Для каждого из следующих условий, привести пример удовлетворяющей ему функции $f(x)$:

$f(x)$ беск. мала в точке $x_0 = \infty$, но не имеет порядка по степенной шкале $\dfrac{1}{x^k}$;

$f(x)$ беск. мала в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, но не имеет порядка по степенной шкале $(x - x_0)^k$;

$f(x)$ беск. большая в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, но не имеет порядка по степенной шкале $\dfrac{1}{(x - x_0)^k}$.