

***Одиннадцатая Всероссийская научно-практическая конференция  
"Перспективные системы и задачи управления".  
(Россия, г. Симферополь, Республика Крым)***

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОНВЕРТОПЛАНА С ЦЕНТРАЛЬНЫМ УПРАВЛЯЕМЫМ ВЕКТОРОМ ТЯГИ**

Яцун С.Ф., Емельянова О.В., Казарян К.Г., Савин А.И.. ([teormeh@inbox.ru](mailto:teormeh@inbox.ru))

ФГОУ ВО "Юго-Западный государственный университет", г.Курск, Россия  
кафедра механики, мехатроники и робототехники

# Содержание работы

- **Актуальность работы;**
- **Обзор в области летающих аппаратов с переменным вектором тяги;**
- **Математическая модель конвертоплана с переменным вектором тяги;**
- **Алгоритм системы управления;**
- **Моделирование процесса движения конвертоплана по заданной траектории;**
- **Экспериментальный образец**
- **Заключение.**

# Состояние исследований летающих роботов с переменным вектором тяги



Бикоптер: V-22 Osprey



Трикоптер: Израильской  
компания IAI «Panther»

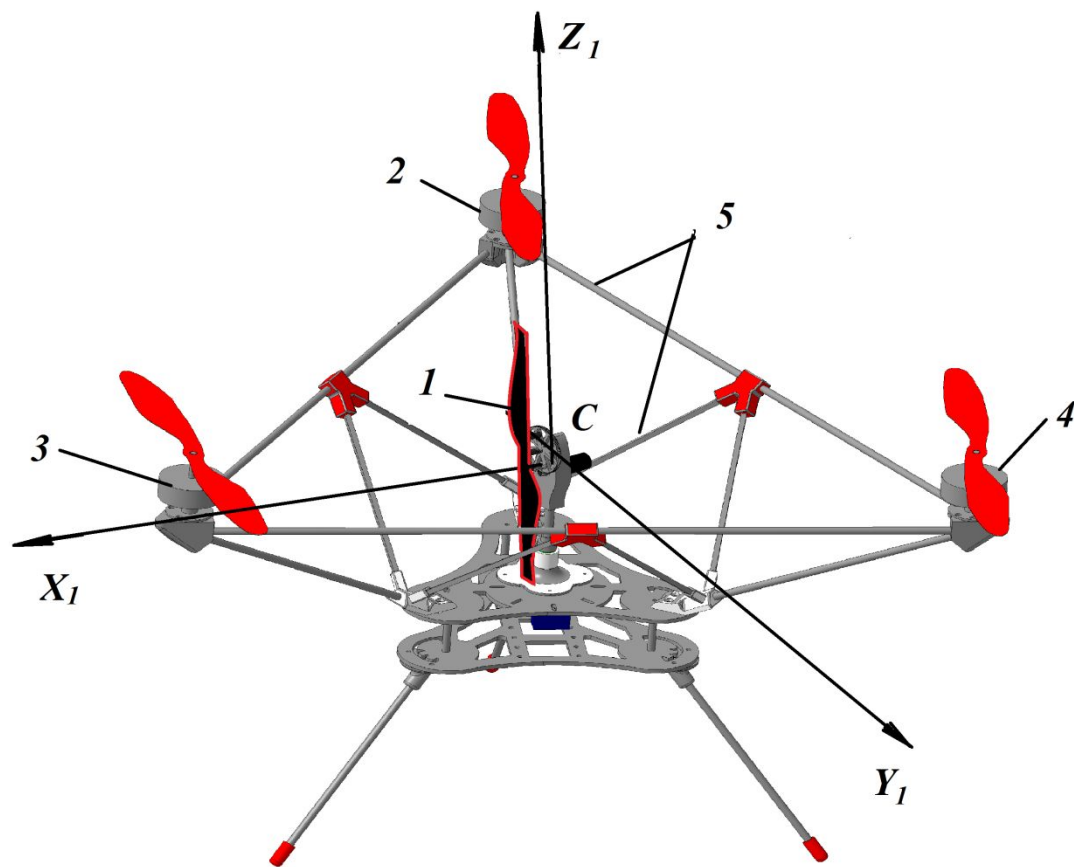


Квадрокоптер: Иранский  
Koker 1 VTOL drone



Пентакоптер: (RC VTOL) AL-102 ТК  
"REGION ANGEL"

# Описание исследуемого объекта с переменным вектором тяги типа



Общая модель конвертоплана с переменным вектором тяги состоит из:

2-4 - управляемые винты на основе бесколлекторных электроприводов с неизменяемыми векторами тяги; 1 – электропривод с изменяемым (относительно осей  $CX_1Y_1Z_1$ ) вектором тяги; 5 – крыло, установленное на несущей раме, на которой также закреплены блок питания, плата управления и приёмник сигнала, электрически связанные с приводами вращения винтов.

*Целью* исследований является разработка теоретических основ и инструментальных средств проектирования конвертопланов типа трикоптер.

Для достижения поставленной цели решались следующие *задачи*: анализ современного состояния и возможности применения мобильных миниатюрных конвертопланов; построение математической модели и моделирование движения с учетом кинематических связей, свойств электроприводов, алгоритмов выработки управляющих воздействий; разработка алгоритмов управления движением, программного комплекса и инструментальных средств проектирования на основе пространственной модели конвертоплана.

# Математическая модель

## Кинематика

Положение центра масс роторов:

$$\vec{r}_{OA_i}^{(0)} = \vec{r}_{OC}^{(0)} + T_{10} \cdot \vec{r}_{CA_i}^{(1)}, \quad i=1, 2, 3.$$

Матрица поворота подвижной с.к. (1) относительно неподвижной (0) с.к.:

$$T_{10} = R(\psi, \theta, \varphi) = R(z, \psi) \times R(y, \theta) \times R(x, \varphi) =$$

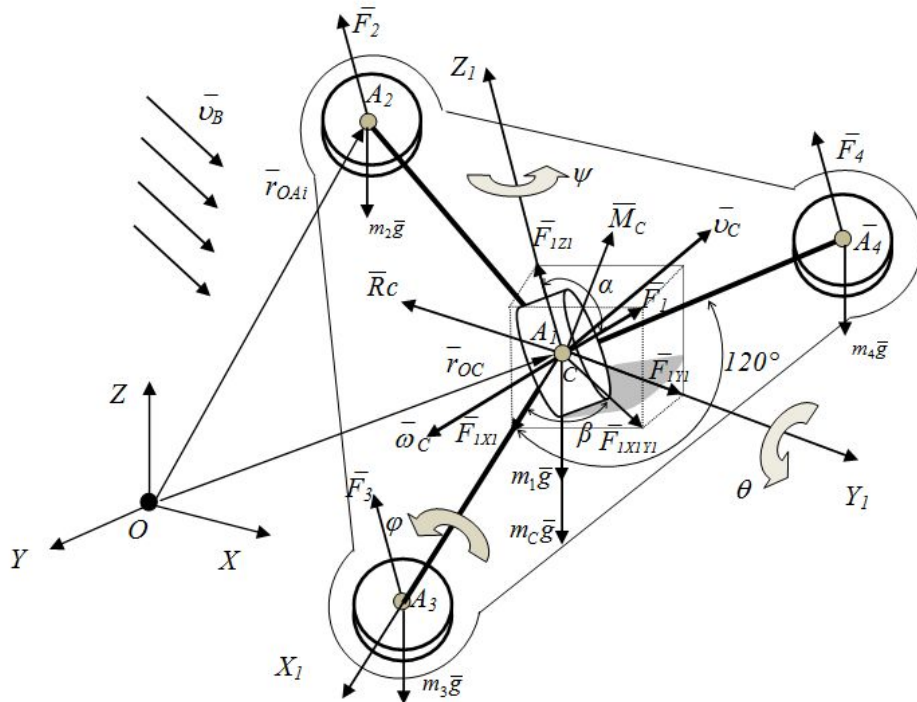
$$= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} =$$

Векторы  $\vec{r}_{CA_i}^{(1)}$  для точек  $A_i$  имеют вид:

$$\vec{r}_{CA_2}^{(1)} = \begin{bmatrix} -l \cos 60^\circ \\ -l \sin 60^\circ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{CA_3}^{(1)} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{CA_4}^{(1)} = \begin{bmatrix} -l \cos 60^\circ \\ l \sin 60^\circ \\ 0 \end{bmatrix},$$

Скорости точек  $A_i$ :  $\vec{v}_{A_i}^{(0)} = \vec{v}_C^{(0)} + \dot{T}_{10} \cdot \vec{r}_{CA_i}^{(1)}$

где  $\vec{v}_C^{(0)} = \dot{i}\dot{X} + \dot{j}\dot{Y} + \dot{k}\dot{Z}$  - скорость центра масс



$OXYZ$  - неподвижная система координат;  
 $CX_1Y_1Z_1$  - подвижной системы координат;  
 $\square F_{1z}, \square F_{2y}, \square F_{3z}, \square F_{4z} \parallel CZ$  - тяговые силы несущих винтов;  
 $\square R, M_c$  - сила и момент сопротивления;  $\square \omega_c, \square v_c$  -  
 угловая и линейная скорости центра масс конвертоплана;  $\varphi,$   
 $\psi, \theta$  - самолётные углы крена, рысканья и тангажа;  $l$  -  
 расстояние от центра масс  $C$  до центра масс роторов  $A_i$ .

## Силы, приложенные к конвертоплану

Векторы сил тяги в подвижной системе координат:

$$\bar{F}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} F_{1X_1} \\ F_{1Y_1} \\ F_{1Z_1} \end{pmatrix}, \bar{F}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2 \end{pmatrix}, \bar{F}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{pmatrix}, \bar{F}_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

где  $F_{1X_1} = F_1 \sin \alpha \cos \beta$ ,  $F_{1Y_1} = F_1 \sin \alpha \sin \beta$ ,  $F_{1Z_1} = F_1 \cos \alpha$

Векторы сил тяги в неподвижной системе координат:

$$\sum \bar{F}_i^{(0)} = T_{10} \sum \bar{F}_i^{(1)} = |T_{10}| \begin{pmatrix} \sum F_{ix}^{(1)} \\ \sum F_{iy}^{(1)} \\ \sum F_{iz}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \sin \theta) \cdot \sum F_i \\ (\cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin) \cdot \sum F_i \\ (\cos \varphi \cos \theta) \cdot \sum F_i - mg \end{pmatrix}$$

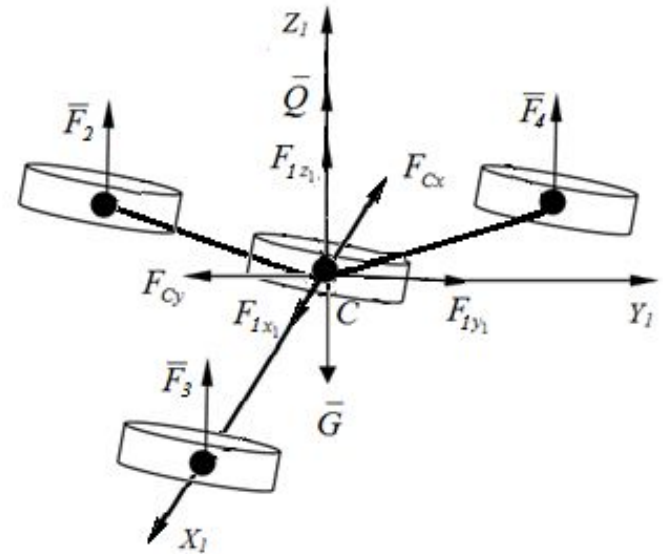
Вектор сил сопротивления крыла с воздухом :

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ Q \end{pmatrix}$$

$$M_C^{(1)} = \begin{pmatrix} M_{Cx} \\ M_{Cy} \\ M_{Cz} \end{pmatrix} : \quad - \text{момент сопротивления крыла}$$

Вектор силы тяжести:

$$G^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$





# Моделирование движения летающего робота относительно центра масс

На основании теоремы об изменении количества движения механической системы:

Вектор количества движения рассматриваемой системы.

$$\bar{Q} = \bar{q}_C + \sum_{i=1}^4 q_i = m_C \bar{v}_C + \sum_{i=1}^4 m_i \bar{v}_{A_i}$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_i^e$$

где  $\bar{v}_{A_i} = \bar{v}_C + \dot{T}_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)}$ ,

Тогда: 
$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m_C \frac{d\bar{v}_C}{dt} + \sum m_i \left( \frac{d\bar{v}_C}{dt} + \ddot{T}_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)} \right);$$

$$(m_C + \sum m_i) \frac{d\bar{v}_C}{dt} + \ddot{T}_{10} \sum m_i \bar{r}_{CA_i}^{(1)} = \dot{T}_{10} \sum \bar{F}_i^{(1)}$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d\bar{L}}{dt} + (\bar{\omega}_C \times \bar{L}) = \sum \bar{M}_C^e$$

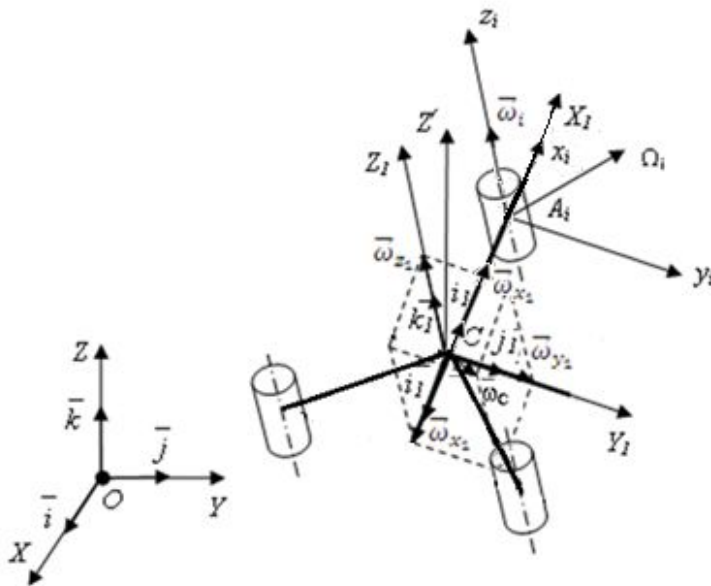
Момент количества движения рассматриваемой механической системы:

$$\bar{L} = \bar{L}_C + \sum \bar{L}_i$$

где:  $\bar{L}_C = I_C \bar{\omega}_C$  - кинетический момент корпуса относительно центра масс;

$$\bar{L}_i = I_i \bar{\Omega}_i = (I_{A_i} + ml^2) \bar{\Omega}_i$$

- кинетический момент  $i$ -го ротора относительно центра масс  $C$ .





# Определение кинетического момента

Момент количества движения ротора в системе координат  $A, x, y, z$ :

$$\bar{L}_{iA_i} = \int_{m_i} (\bar{r}_i \times \bar{v}) dm_i \dots \text{или} \dots \bar{L}_{iA_i} = I_{A_i} \bar{\Omega}_i, \quad \text{где } I_{iA_i} = \begin{vmatrix} J_{A_i}^x & 0 & 0 \\ 0 & J_{A_i}^y & 0 \\ 0 & 0 & J_{A_i}^z \end{vmatrix} \text{ - тензор инерции ротора.}$$

Тогда кинетический момент равен:

$$\bar{L}_{iA_i} = \begin{vmatrix} J_{A_i}^x & 0 & 0 \\ 0 & J_{A_i}^y & 0 \\ 0 & 0 & J_{A_i}^z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_i + \omega_{Z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{A_i}^x \omega_{X_1} \\ J_{A_i}^y \omega_{Y_1} \\ J_{A_i}^z (\omega_i + \omega_{Z_1}) \end{vmatrix}$$

Тензоры инерции корпуса  $I_C$  и  $i$ -го ротора  $I_i$ :

$$I_C = \begin{vmatrix} J_C^{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_C^{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_C^{Z_1} \end{vmatrix}; \quad I_i = \begin{vmatrix} J_{A_i}^x + m_i l^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{A_i}^y + m_i l^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{A_i}^z + m_i l^2 \end{vmatrix}$$

Тогда кинетический момент корпуса и  $i$ -го ротора относительно центра масс трикоптера  $C$ :

$$\bar{L}_C = \begin{vmatrix} J_C^{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_C^{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{A_i}^{Z_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_{Z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_C^{X_1} \omega_{X_1} \\ J_C^{Y_1} \omega_{Y_1} \\ J_C^{Z_1} \omega_{Z_1} \end{vmatrix}; \quad \bar{L}_i = \begin{vmatrix} J_{A_i}^x + m_i l^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{A_i}^y + m_i l^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{A_i}^z + m_i l^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_i + \omega_{Z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (J_{A_i}^x + m_i l^2) \omega_{X_1} \\ (J_{A_i}^y + m_i l^2) \omega_{Y_1} \\ (J_{A_i}^z + m_i l^2) (\omega_i + \omega_{Z_1}) \end{vmatrix}$$

# Определение кинетического момента

Момент количества движения рассматриваемой механической системы:

$$L = \begin{vmatrix} (J_C^{X_1} + \sum J_{A_i}^x + \sum m_i l^2) \omega_{X_1} \\ (J_C^{Y_1} + \sum J_{A_i}^y + \sum m_i l^2) \omega_{Y_1} \\ (J_C^{Z_1} + \sum J_{A_i}^z + \sum m_i l^2) \omega_{Z_1} + (\sum J_{A_i}^z + \sum m_i l^2) \omega_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J^{X_1} \omega_{X_1} \\ J^{Y_1} \omega_{Y_1} \\ J^{Z_1} \omega_{Z_1} + \sum J_i^z \omega_i \end{vmatrix},$$

где  $J^{X_1} = J_C^{X_1} + \sum J_{A_i}^x + \sum m_i l^2$ ,  $J^{Y_1} = J_C^{Y_1} + \sum J_{A_i}^y + \sum m_i l^2$ ,  $J^{Z_1} = J_C^{Z_1} + \sum J_{A_i}^z + \sum m_i l^2$ ,  
 $\sum J_i^z = \sum J_{A_i}^z + \sum m_i l^2$  - приведенные осевые моменты инерции.

Подставляя в уравнение об изменении кинетического момента механической системы, получим:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \begin{vmatrix} J^{X_1} \dot{\omega}_{X_1} \\ J^{Y_1} \dot{\omega}_{Y_1} \\ J^{Z_1} \dot{\omega}_{Z_1} + \sum J_i^z \dot{\omega}_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_{Z_1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} J^{X_1} \omega_{X_1} \\ J^{Y_1} \omega_{Y_1} \\ J^{Z_1} \omega_{Z_1} + \sum J_i^z \omega_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J^{X_1} \dot{\omega}_{X_1} + \omega_{Y_1} \omega_{Z_1} (J_i^{Z_1} - J^{Y_1}) + \omega_{Y_1} \sum J_i^z \omega_i \\ J^{Y_1} \dot{\omega}_{Y_1} + \omega_{X_1} \omega_{Z_1} (J^{X_1} - J_i^{Z_1}) - \omega_{X_1} \sum J_i^z \omega_i \\ J^{Z_1} \dot{\omega}_{Z_1} + J_i^z \dot{\omega}_i + \omega_{X_1} \omega_{Y_1} (J^{Y_1} - J^{X_1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{X_1}^e \\ M_{Y_1}^e \\ M_{Z_1}^e \end{vmatrix}$$

## Система дифференциальных уравнений, описывающих движение робота:

$$\begin{cases}
 \dot{v}_C^x = ( (\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \sin \theta) \cdot \sum F_i + R_x ) / m \\
 \dot{v}_C^y = ( (\cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi) \cdot \sum F_i + R_y ) / m \\
 \dot{v}_C^z = ( \cos \varphi \cos \theta \cdot \sum F_i + R_z ) / m - g \\
 \dot{\omega}_{X_1} = [ (-F_2 + F_4) \cdot l_0 \cdot \sin 60^\circ - \omega_{Y_1} \omega_{Z_1} (J_i^{Z_1} - J^{X_1}) - \omega_{Y_1} \sum J_i^z \omega_i + M_{X_1}^C ] / J^{X_1} \\
 \dot{\omega}_{Y_1} = [ (-F_3 \cdot l_0 + (F_2 + F_4) \cdot \sin 30^\circ \cdot l_0) - \omega_{X_1} \omega_{Z_1} (J^{X_1} - J_i^{Z_1}) + \omega_{X_1} \sum J_i^z \omega_i + M_{Y_1}^C ] / J^{Y_1} \\
 \dot{\omega}_{Z_1} = [ -J_i^z \dot{\omega}_i - \omega_{X_1} \omega_{Y_1} (J^{Y_1} - J^{X_1}) + M_{Z_1}^C ] / J^{Z_1} \\
 \dot{\varphi} = \omega_{X_1} - (\omega_{Z_1} \cos \varphi + \omega_{Y_1} \sin \varphi) \operatorname{tg} \theta \\
 \dot{\theta} = \omega_{Y_1} \cos \varphi - \omega_{Z_1} \sin \varphi \\
 \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} (\omega_{Z_1} \cos \varphi + \omega_{Y_1} \sin \varphi) \\
 \dot{\omega}_i = f(U(\Delta))
 \end{cases}$$

$U = \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{matrix}} \right\}$ 

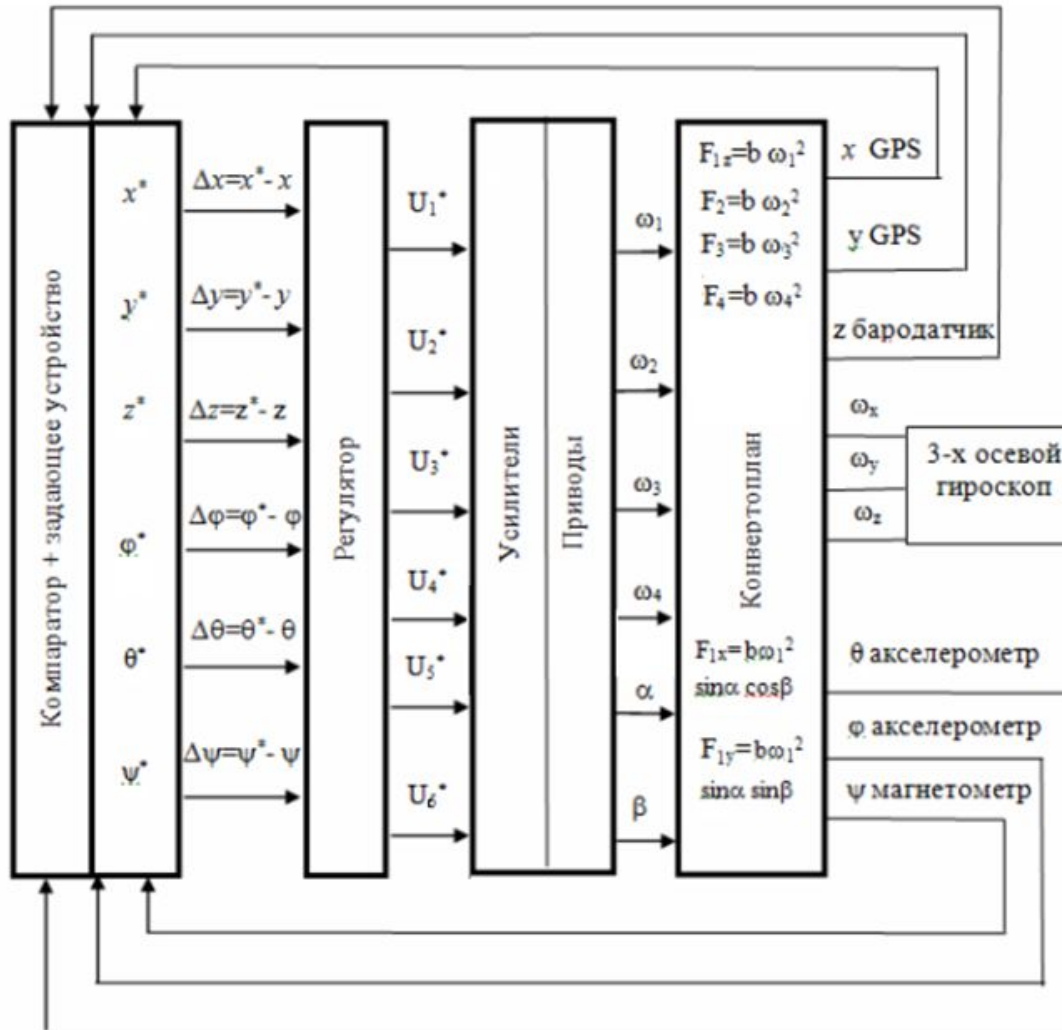
вектор управляющих напряжений,  
поступающих на двигатели винтов;

вектор управляющих напряжений,  
используемых для изменения вектора  
тяги поворотного винта 2;

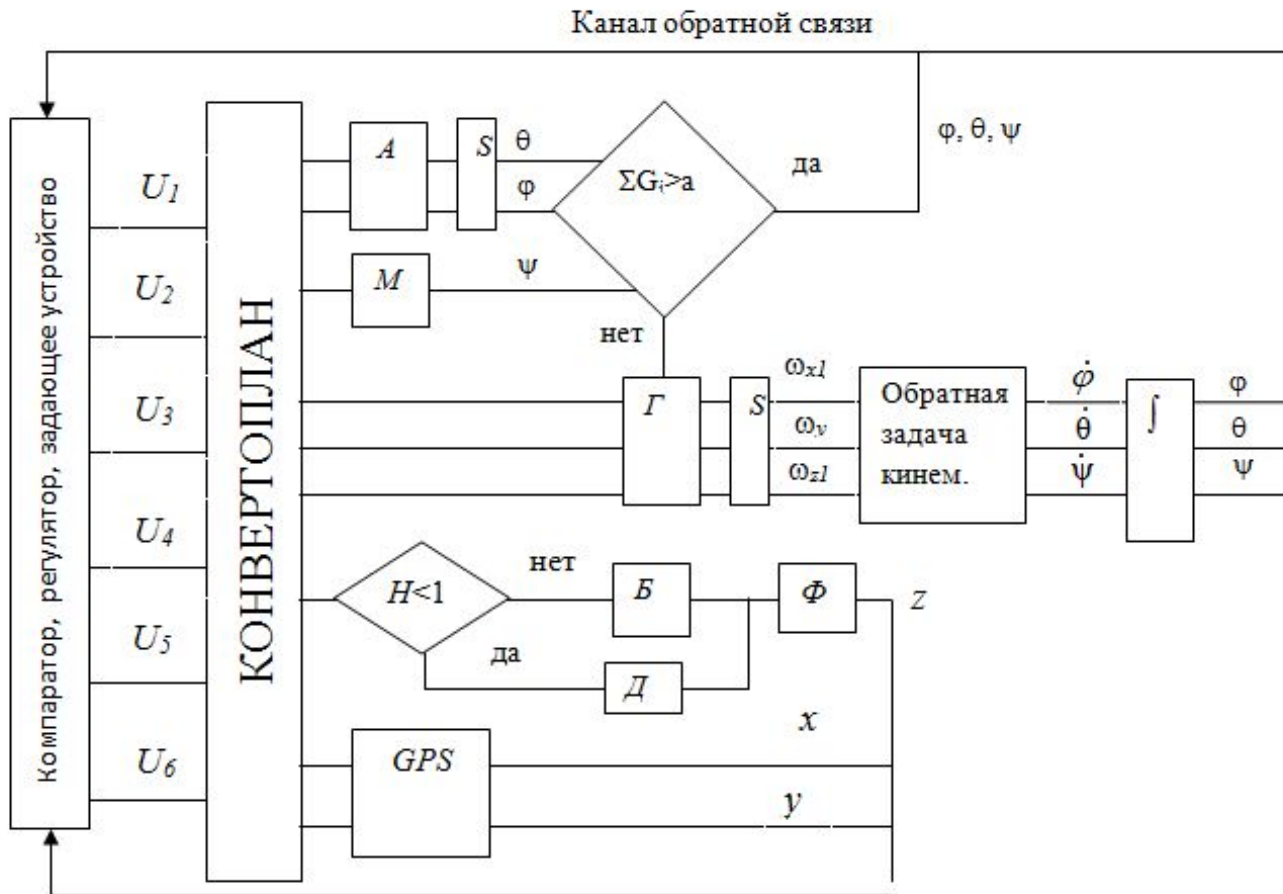
$\Delta = | \Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta |^{-1}$  - ошибка отклонения от заданной траектории;

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(U_4), \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}(U_5)$$

# Общая структурная схема многоконтурной САУ



# Развернутая схема многоконтурной САУ



$U_i$  – управляющие напряжения питания ( $i=1-6$ );  $A$  – акселерометр,  $M$  – магнитометр;  $\Gamma$  – 3-х осевой гироскоп;  $B$  – бародатчик;  $D$  – дальномер;  $S$  – сглаживание сигнала;  $\Phi$  – фильтр сигнала

# Алгоритм управления движением

## 1 Этап: взлет вертикальный или по траектории

Начало полёта при  $N=0$ ;  $Mg < F_{1z}+F_2++F_3+F_4$ :  $0 \leq Z \leq H$

1) Вертикальный подъём:

$$X=X_0: Y=Y_0: Z=Z(t),$$

2) Подъём по траектории:

$$Z=at^3 + bt^2 + ct + d$$

$a, b, c, d$  – постоянные, определяемые из начальных условий

$$\text{при } t = 0; \quad z = 0; \quad \dot{z} = 0,$$

$$\text{при } t = t_1; \quad z = H; \quad \dot{z} = 0,$$

$$Z = Z(t) = \frac{3H}{t_1^2} t^2 - \frac{2H}{t_1^3} t^3$$

$t_1$  – время подъёма

где  $X_0, Y_0$  – координаты взлёта,  $H$  – высота подъёма;

$$U_i = U_0 + k_1 \Delta z + k_2 \Delta \dot{z}$$

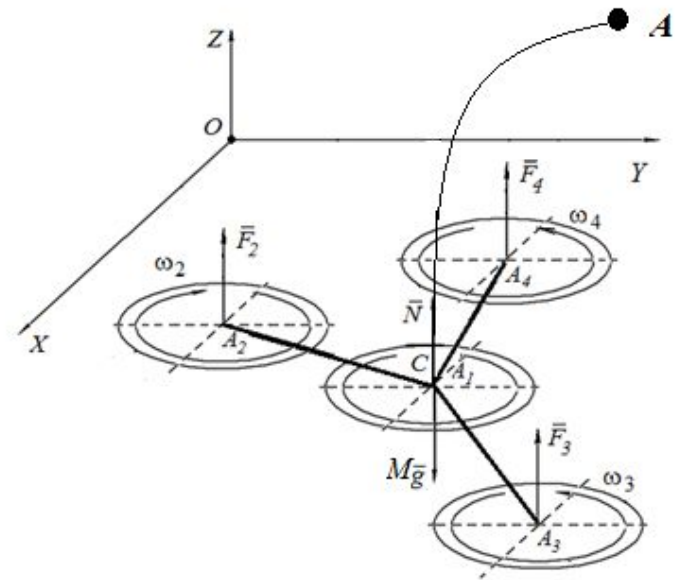
$$\omega_i = \omega_i(U_i)$$

$$F_{1z} = F_2 = F_3 = F_4 =$$

$$C_{TP} F_H (\omega_2 R)^2 / 2$$

$$F_{1z} + F_2 + F_3 + F_4 = f(\Delta z)$$

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0$$



$N$  – нормальная реакция опоры поверхности,  $F_i$  – тяговое усилие винта,  $Mg$  – вес центра масс конвертоплана

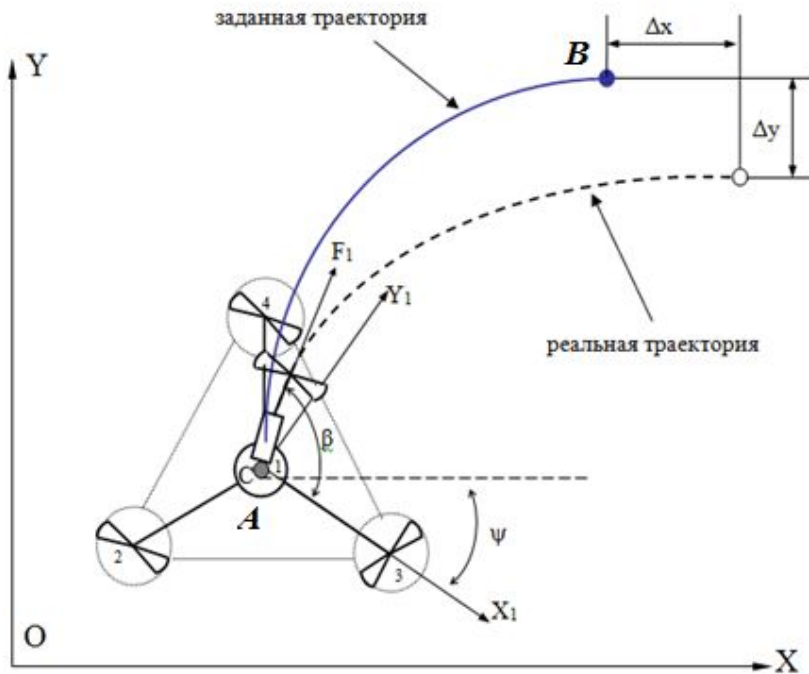


# Алгоритм управления движением

**2 этап:** Движение в горизонтальной плоскости (XOY) по заданной траектории;  $Z = H$ ,  $X=f_1(t)$ ,  $Y=f_2(t)$ ,  $t_2$ -время движения.

$$X=a \sin(\omega t); Y=b \cos(\omega t); Z=H=const$$

$$M \square g = \square F_{1z} + \square F_2 + \square F_3 + \square F_4$$



если  $\alpha = 90$ ;  $\beta - \Delta\psi \rightarrow 0$

$$\alpha = \alpha(U_5); \beta = \beta(U_6);$$

$$\beta = c_1 \beta + U_6$$

$$0 \leq \alpha \leq 90; 0 \leq \beta \leq 90;$$

$$\alpha = c_2 \alpha + U_5$$

$$U_5 = U_5(\Delta\theta); U_6 = U_6(\Delta\psi)$$

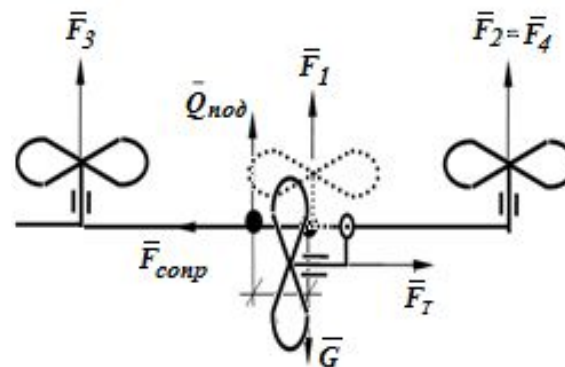
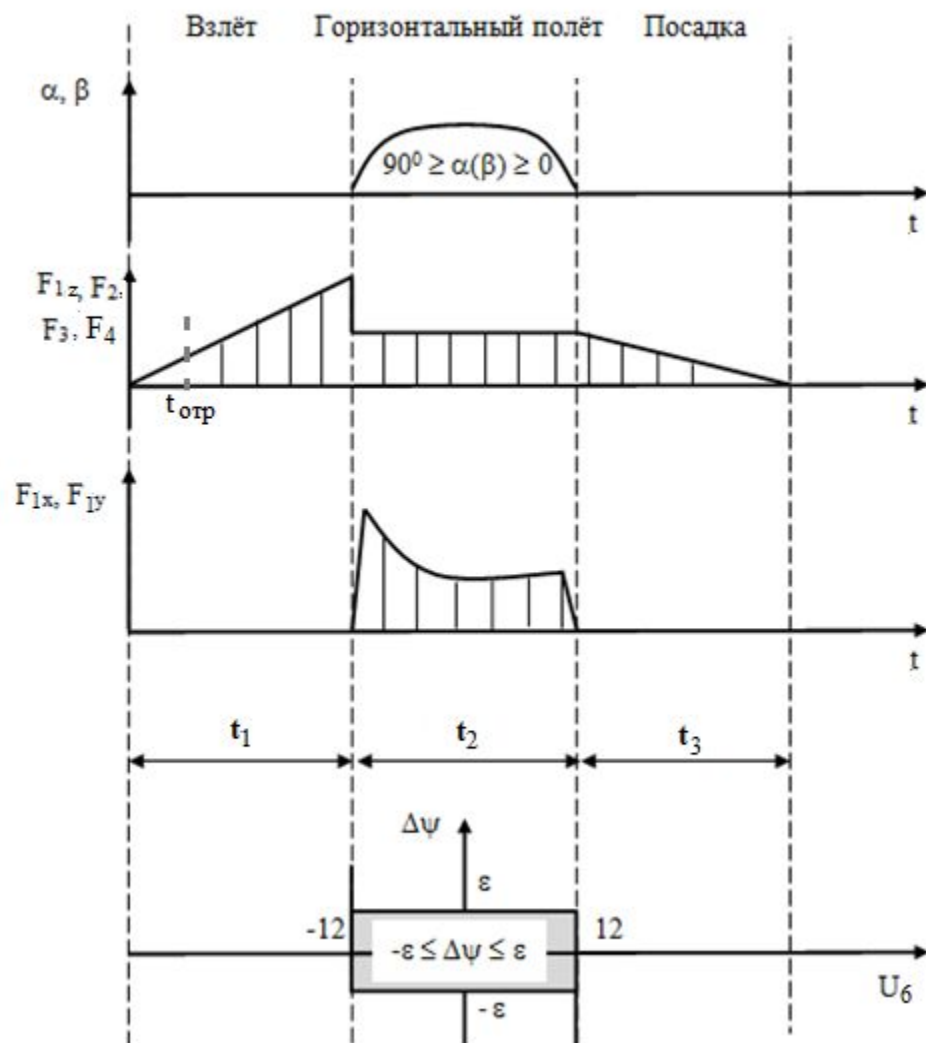
$c_1, c_2$  —  
КОНСТАНТЫ.

$$F_3 = (F_2 + F_4) \sin 30 = f(\Delta\theta)$$

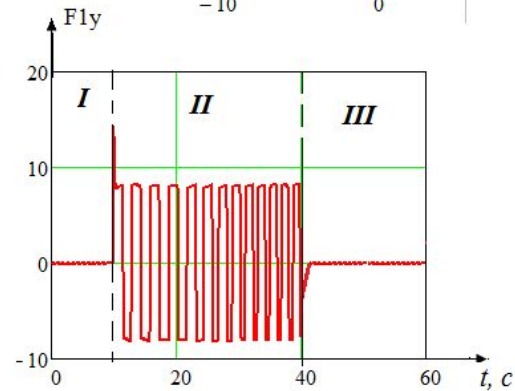
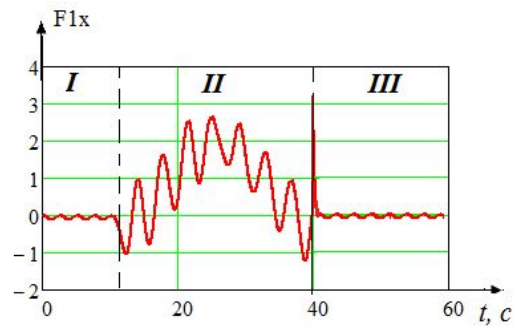
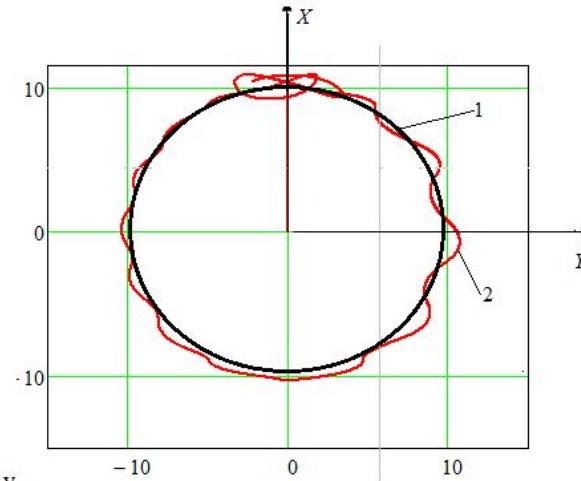
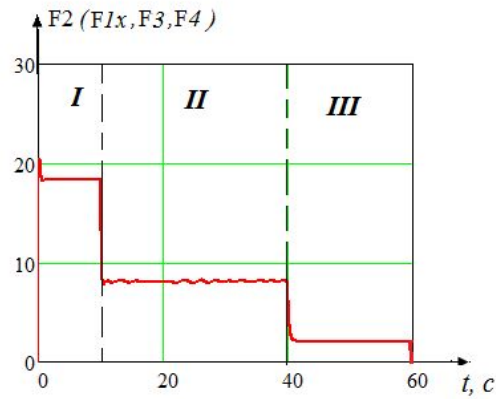
$$U_6 = \begin{cases} U_6 & \psi \geq \varepsilon \\ 0 & -\varepsilon \leq \psi \leq \varepsilon \\ -U_6 & \psi \leq -\varepsilon \end{cases} \quad U_5 = \begin{cases} U_5 & \theta \geq \varepsilon \\ 0 & -\varepsilon \leq \theta \leq \varepsilon \\ -U_5 & \theta \leq -\varepsilon \end{cases}$$



# Циклограмма управляющих воздействий на различных режимах движения

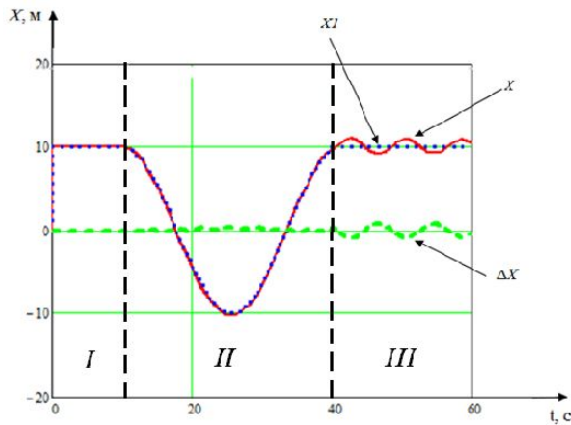


# Результаты моделирования

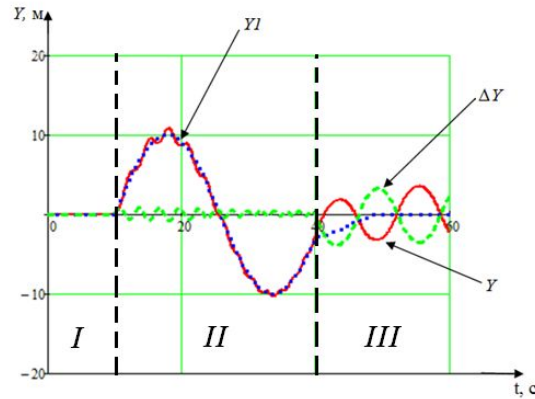


Графики изменения тяговых усилий конвертоплана: 1- заданная траектория; 2- фактическая траектория,; I, II, III – зоны взлета, движения по траектории и посадки соответственно

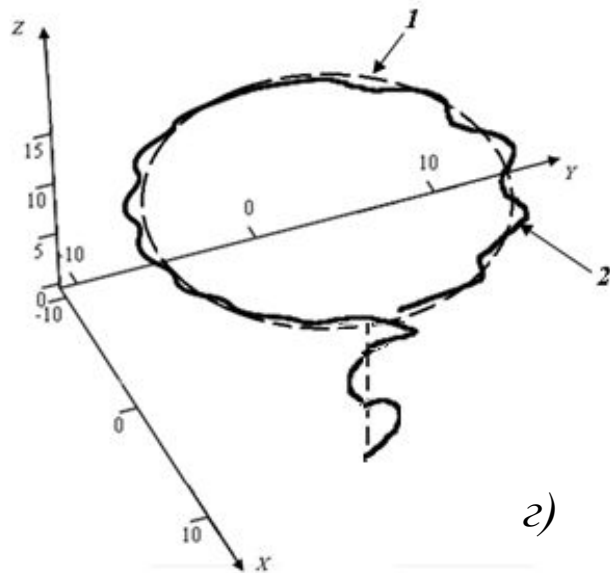
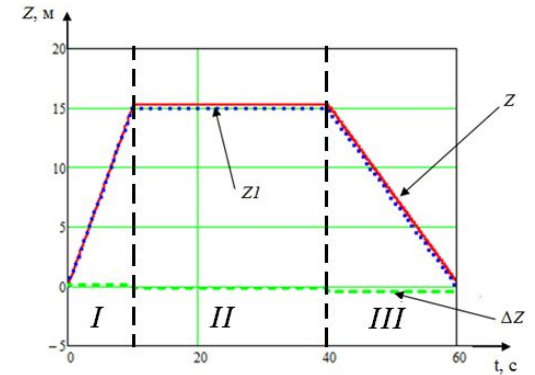
# Результаты моделирования



a)



б)



в)

Графики перемещения конвертоплана вдоль координатных осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ :  
 $X1$ ,  $Y1$ ,  $Z1$  – фактическая траектория,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – заданная траектория,  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  – ошибка управления;  $I$ ,  $II$ ,  $III$  – зоны взлета, движения по траектории и посадки соответственно

# Выводы

- Предложена расчетная схема и математическая модель пространственного движения конвертоплана с центрально расположенным регулируемым приводом, учитывающая гироскопические эффекты вращающихся винтов, массогабаритные свойства электроприводов, снабженных редукторами, кинематические связи, свойства электродвигателей, позволяющая исследовать основные режимы и условий полёта аппарата с переменным вектором тяги.
- Предложен метод управления движением аппарата, включающий задание произвольной траектории в виде функций в пространстве координат, позволяющий минимизировать ошибки перемещения летательного аппарата. Результаты математического моделирования показали достижимость поставленных задач, точность позиционирования конвертоплана относительно желаемой траектории.

**Спасибо за внимание**