Изопериметрическая задача

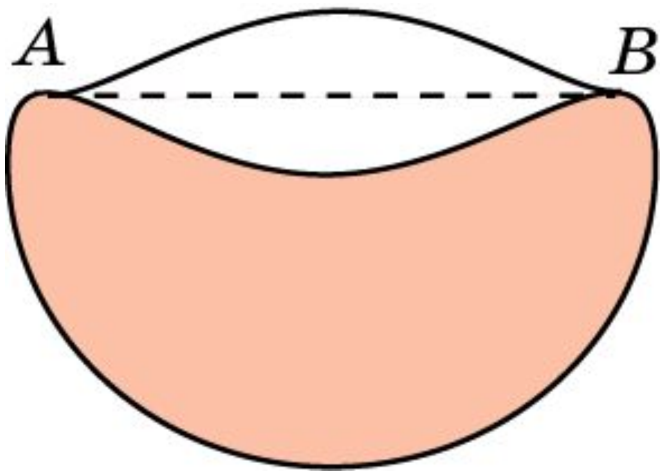
Изопериметрической задачей называют задачу о нахождении фигуры наибольшей площади, ограниченной кривой заданной длины (периметра) (Изопериметрические фигуры – фигуры, имеющие одинаковый периметр.)

Фигуру, ограниченную кривой данной длины, имеющую наибольшую площадь, будем называть максимальной.

Теорема. Среди всех замкнутых кривых данной длины наибольшую площадь охватывает окружность.

Теорема 1

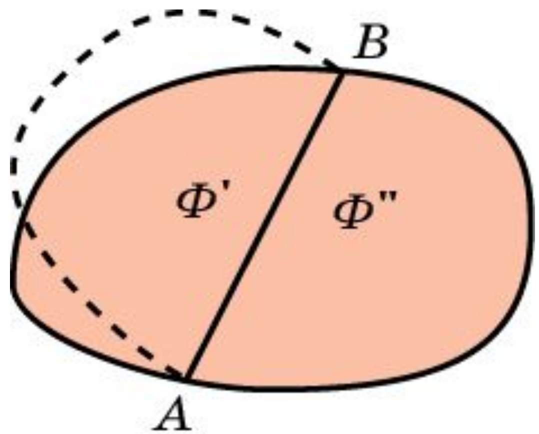
Максимальная фигура является выпуклой.



Доказательство. Если фигура не выпукла, то существует хорда *AB*, концы которой принадлежат кривой, а ее внутренние точки находятся вне кривой. Заменим дугу исходной кривой, соединяющую точки *A*, *B*, на симметричную ей дугу относительно прямой *AB*. Соответствующая ей фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

Теорема 2

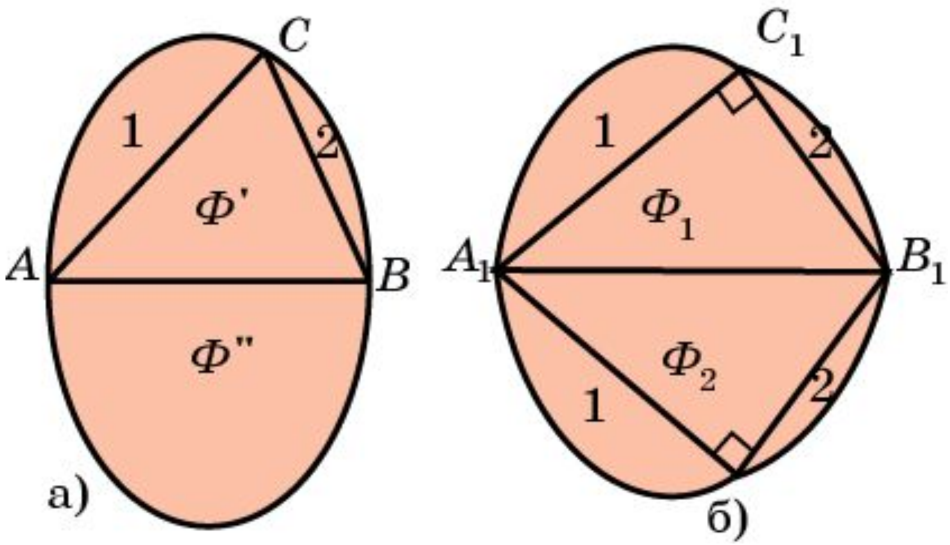
Если хорда делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру на две части равной длины, то она и фигуру делит на две равновеликие части.



Доказательство. Пусть хорда *AB* делит кривую на две части равной длины. Предположим, что площади образовавшихся частей $Ф'$, $Ф''$ фигуры $Ф$ не равны, например $S(Ф') < S(Ф'')$. В фигуре $Ф$ заменим фигуру $Ф'$ на фигуру, симметричную $Ф''$ относительно прямой *AB*. Полученная фигура будет ограничена кривой той же длины, но будет иметь большую площадь по сравнению с исходной. Следовательно, исходная фигура не максимальная.

Теорема 3

Максимальная фигура ограничена окружностью.



Доказательство. Пусть хорда AB делит кривую, ограничивающую максимальную фигуру $Ф$ на две части равной длины. Тогда она делит фигуру $Ф$ на две части $Ф'$ и $Ф''$ равной площади.

Если кривая не является окружностью, то на ней найдется точка C, для которой угол ACB не равен 90°. Построим новую фигуру, того же периметра, но большей площади. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, и присоединим к его катетам соответствующие части 1 и 2 исходной фигуры. Полученную фигуру $Ф_1$ отразим симметрично относительно A_1B_1 и соответствующую фигуру обозначим $Ф_2$. Фигура, состоящая из обеих частей $Ф_1$ и $Ф_2$, будет искомой.

Вопрос 1

Какие фигуры называются изопериметрическими?

Ответ: Изопериметрическими называются фигуры, имеющие одинаковый периметр.

Вопрос 2

Какая задача называется изопериметрической?

Ответ: Изопериметрической задачей называют задачу о нахождении фигуры наибольшей площади, ограниченной кривой заданной длины.

Вопрос 3

Какая фигура называется максимальной?

Ответ: Максимальной называется фигура, ограниченную кривой данной длины, имеющую наибольшую площадь.

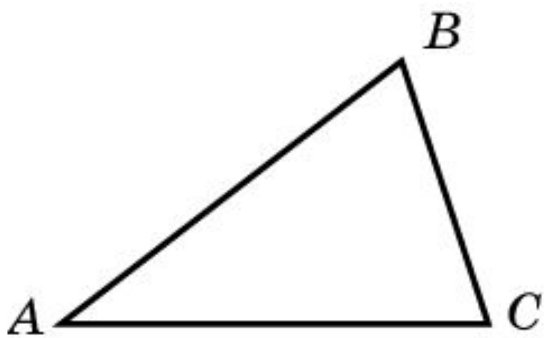
Вопрос 4

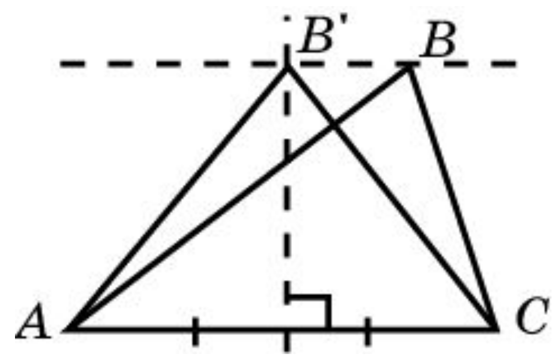
Какая кривая заданной длины охватывает наибольшую площадь?

Ответ: Окружность.

Упражнение 1

Для данного треугольника *ABC*, у которого *AB* > *BC*, укажите треугольник той же площади, но меньшего периметра.

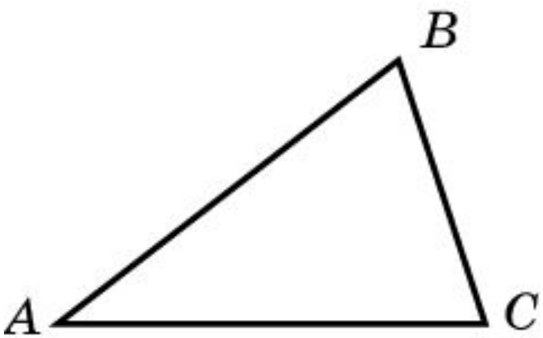


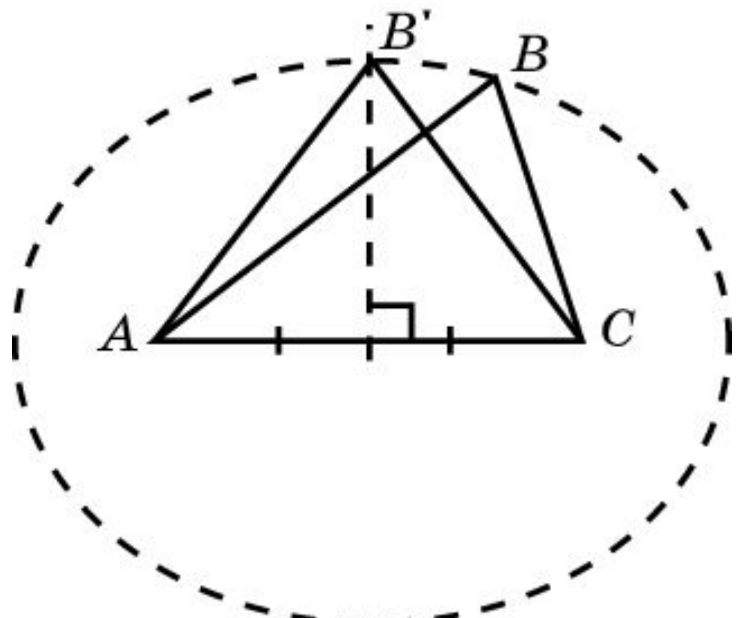


Ответ: Через вершину *B* проведем прямую, параллельную *AC*. Обозначим *B'* точку ее пересечения с серединным перпендикуляром к отрезку *AC*. Треугольник *AB'C* будет искомым.

Упражнение 2

Для данного треугольника ABC, у которого AB > BC, укажите треугольник того же периметра, но большей площади.





Ответ: Рассмотрим эллипс с фокусами A, C и константой $AB + BC$. Обозначим B' точку его пересечения с серединным перпендикуляром к отрезку AC. Треугольник $AB'C$ будет искомым.

Упражнение 3

Из всех треугольников данного периметра найдите треугольник наибольшей площади.

Ответ: Равносторонний треугольник.

Упражнение 4

Существует ли треугольник данного периметра наименьшей площади?

Ответ: Нет.

Упражнение 5

Из всех треугольников данной площади найдите треугольник наименьшего периметра.

Ответ: Равносторонний треугольник.

Упражнение 6

Существует ли треугольник данной площади наибольшего периметра?

Ответ: Нет.

Упражнение 7

Из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой c найдите треугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь?

Ответ: Равнобедренный прямоугольный треугольник. $S = c^2/4$.

Упражнение 8

Все стороны треугольника меньше единицы. Какого числа не превосходит его площадь?

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 9

Периметр треугольника равен единицы. Какого числа не превосходит его площадь?

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Упражнение 10

Площадь треугольника равна $\sqrt{3}$. Укажите нижнюю границу для его периметра. Существует ли верхняя граница периметров таких треугольников?

Ответ: 6. Нет.

Упражнение 11

Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите треугольник наибольшей площади.

Ответ: Равносторонний треугольник.

Упражнение 12

Существует ли треугольник, вписанный в данную окружность, наименьшей площади?

Ответ: Нет.

Упражнение 13

Из всех треугольников, описанных около данной окружности, найдите треугольник наименьшей площади.

Ответ: Равносторонний треугольник.

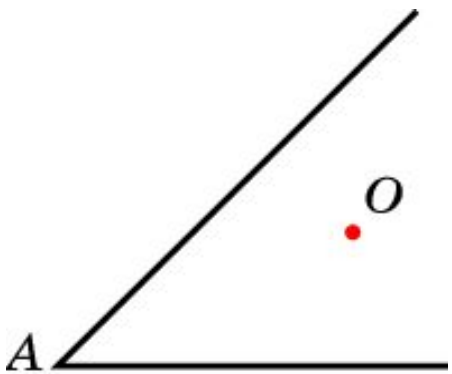
Упражнение 14

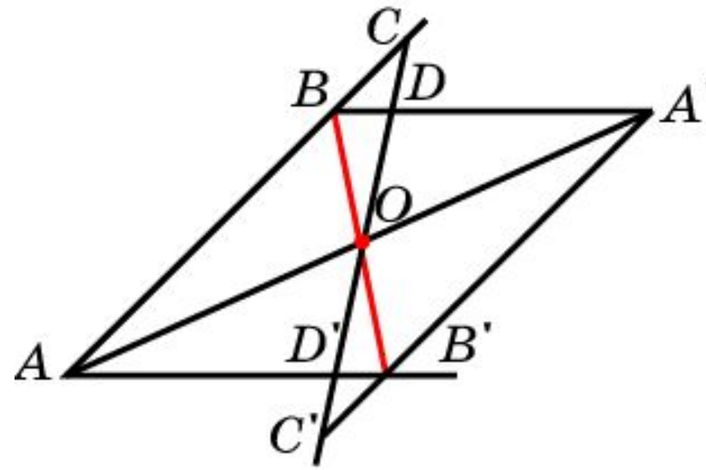
Существует ли треугольник, описанный около данной окружности, наибольшей площади?

Ответ: Нет.

Упражнение 15

Через точку O, расположенную внутри данного угла A, проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади.





Решение: Рассмотрим угол с вершиной A' симметричный данному относительно центра O. Тогда $ABA'B'$ – параллелограмм. Пусть прямая, проходящая через точку O, пересекает стороны параллелограмма и их продолжения в точках C, D, C', D'. Площадь отсекаемого треугольника ACD' равна половине площади параллелограмма плюс площадь треугольника BCD. Из этого следует, что наименьшее значение площадь отсекаемого треугольника принимает, когда прямая проходит через точки B и B'.

Упражнение 16

Квадрат и правильный треугольник имеют одинаковую площадь. У кого из них периметр больше?

Ответ: У правильного треугольника.

Упражнение 17

Квадрат и правильный треугольник имеют одинаковый периметр. У кого из них площадь больше?

Ответ: У квадрата.

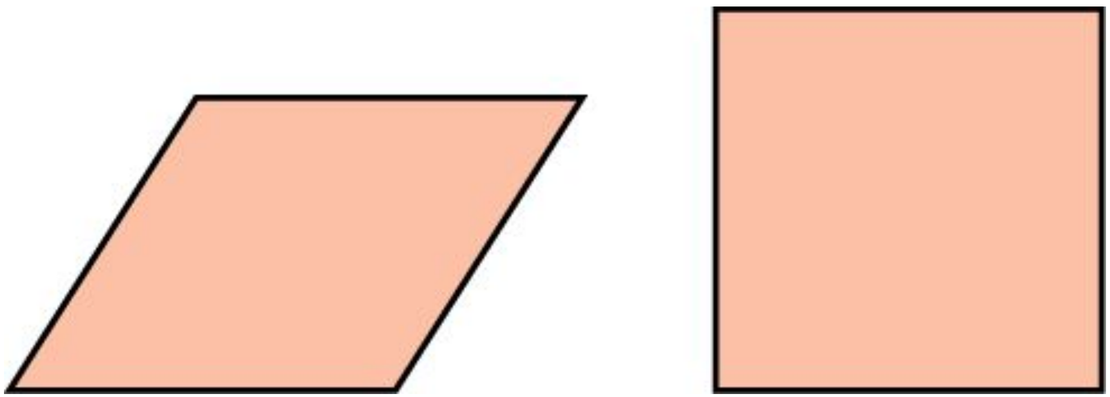
Упражнение 18

Из всех прямоугольников с данной диагональю c найдите прямоугольник наибольшей площади. Чему она равна?

Ответ. Квадрат. $S = c^2/2$.

Упражнение 19

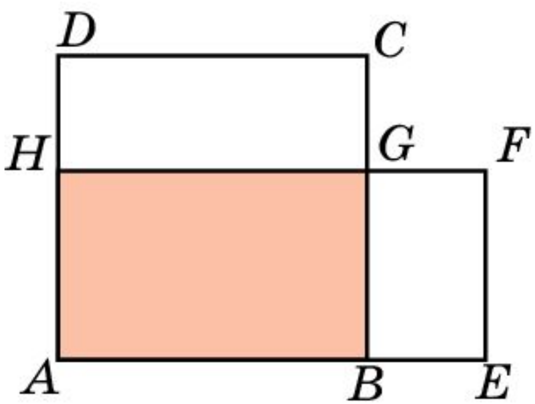
Докажите, что из всех ромбов данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.



Доказательство. Площадь ромба равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними. Так как сторона ромба фиксирована и равна четверти его периметра, то наибольшее значение площадь принимает в случае, когда угол между его соседними сторонами равен 90^{o}, т.е. в случае, когда ромб является квадратом.

Упражнение 20

Докажите, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

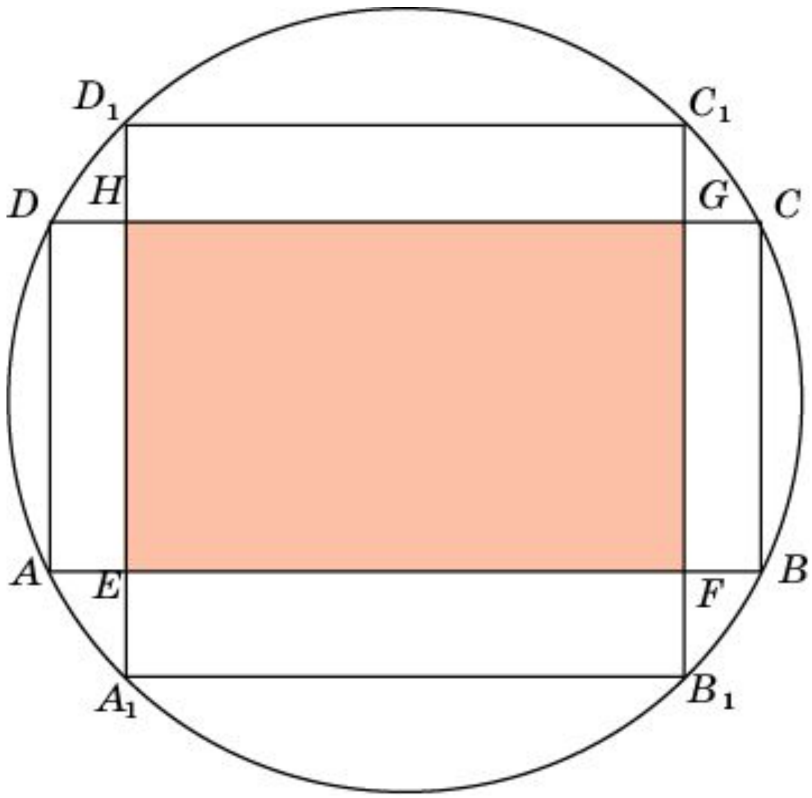


Доказательство. Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площадей прямоугольников $ABGH$ и $HGCD$. Площадь прямоугольника $AEFH$ равна сумме площадей прямоугольников $ABGH$ и $BEFG$.

Из равенства периметров прямоугольника и квадрата следует равенство сторон BE и HD. Так как $BG < HG$, то площадь прямоугольника $BEFG$ меньше площади прямоугольника $HGCD$ и, следовательно, площадь прямоугольника $AEFH$ меньше площади квадрата $ABCD$.

Упражнение 21

Докажите, что из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

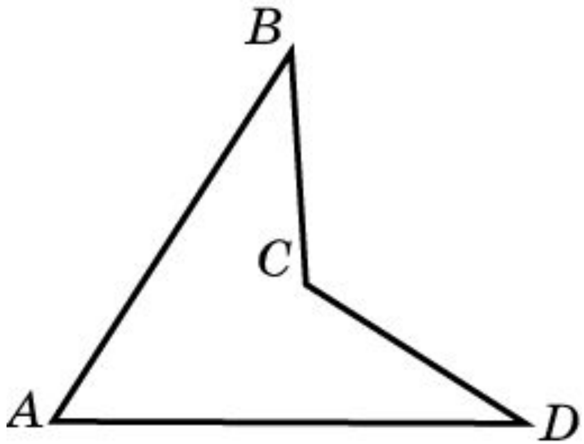


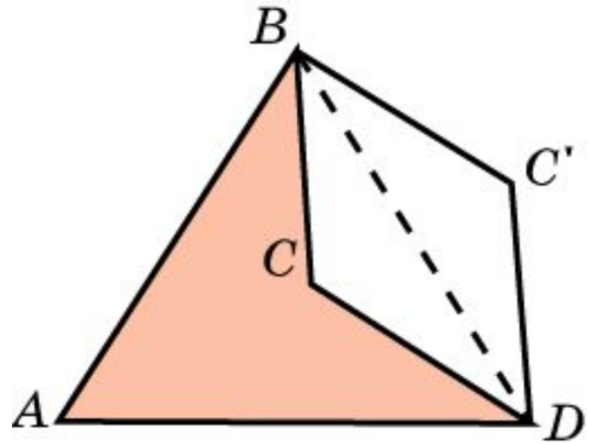
Доказательство. Площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равна сумме площадей прямоугольника $EFGH$ и прямоугольников A_1B_1FE, C_1D_1HG. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна сумме площадей прямоугольника $EFGH$ и прямоугольников $AEHD$ и $BCGF$, площади которых соответственно меньше площадей прямоугольников A_1B_1FE, C_1D_1HG.

Следовательно, площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ больше площади прямоугольника $ABCD$.

Упражнение 22

n-угольник данного периметра, имеющий наибольшую площадь из всех n-угольников будем называть максимальным. Докажите, что максимальный четырехугольник является выпуклым.

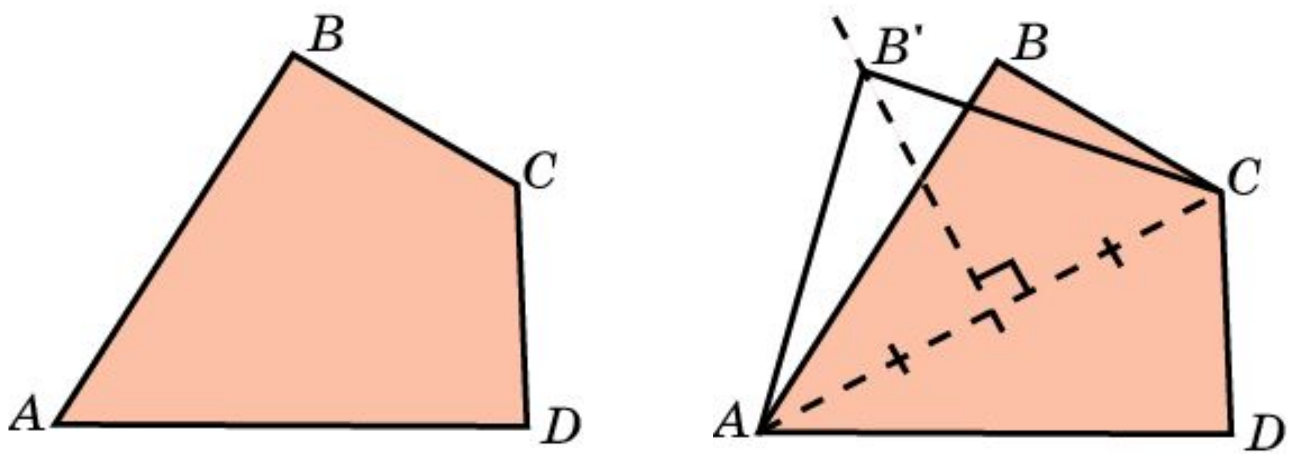




Доказательство. Если четырехугольник невыпуклый, то существует диагональ BD, в нем не содержащаяся. Обозначим C' точку, симметричную C относительно BD. Четырехугольник $ABC'D$ будет иметь тот же периметр, но большую площадь. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ не максимальный.

Упражнение 23

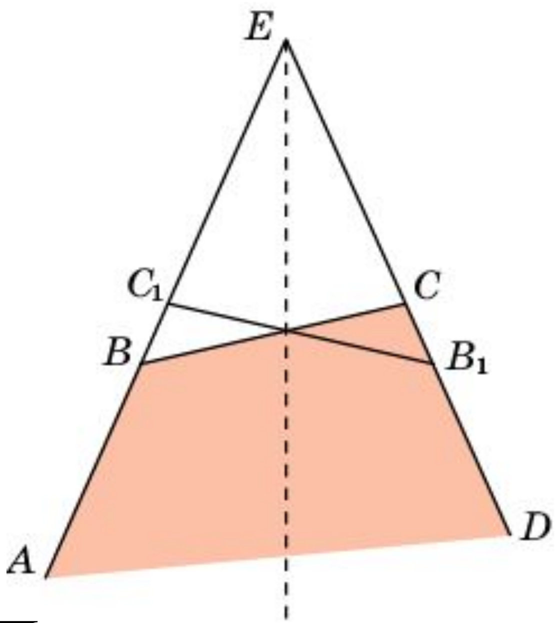
Докажите, что у максимального n-угольника должны быть равны стороны.



Доказательство. Пусть у максимального n-угольника есть две неравные стороны, например, у четырехугольника $ABCD$ $AB > BC$. Тогда треугольник ABC можно заменить на треугольник $AB'C$ с таким же периметром, но большей площади. У полученного n-угольника будет тот же периметр, что и исходный, но его площадь будет больше. Следовательно, исходный n-угольник не максимальный.

Упражнение 24

Докажите, что у максимального n-угольника должны быть равны углы.



Доказательство. Предположим, что у максимального n-угольника $ABCD$… угол B больше угла C. В случае, если продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке E, проведем биссектрису угла AED, и отметим точки B_1, C_1 соответственно симметричные точкам B и C относительно этой биссектрисы.

Периметр и площадь многоугольника AC_1B_1D… будут равны периметру и площади многоугольника $ABCD$… . Следовательно, n-угольник AC_1B_1D… также должен быть максимальным. Однако его стороны AC_1 и B_1D не равны. Противоречие с тем, что у максимального n-угольника должны быть равны стороны.

Случай, когда прямые AB и CD параллельны рассмотрите самостоятельно.

Упражнение 25

Докажите, что из всех *n*-угольников данного периметра наибольшую площадь может иметь только правильный *n*-угольник.

Доказательство. В силу задач 24 и 25 максимальный *n*-угольник должен иметь равные стороны и равные углы, т.е. являться правильным.