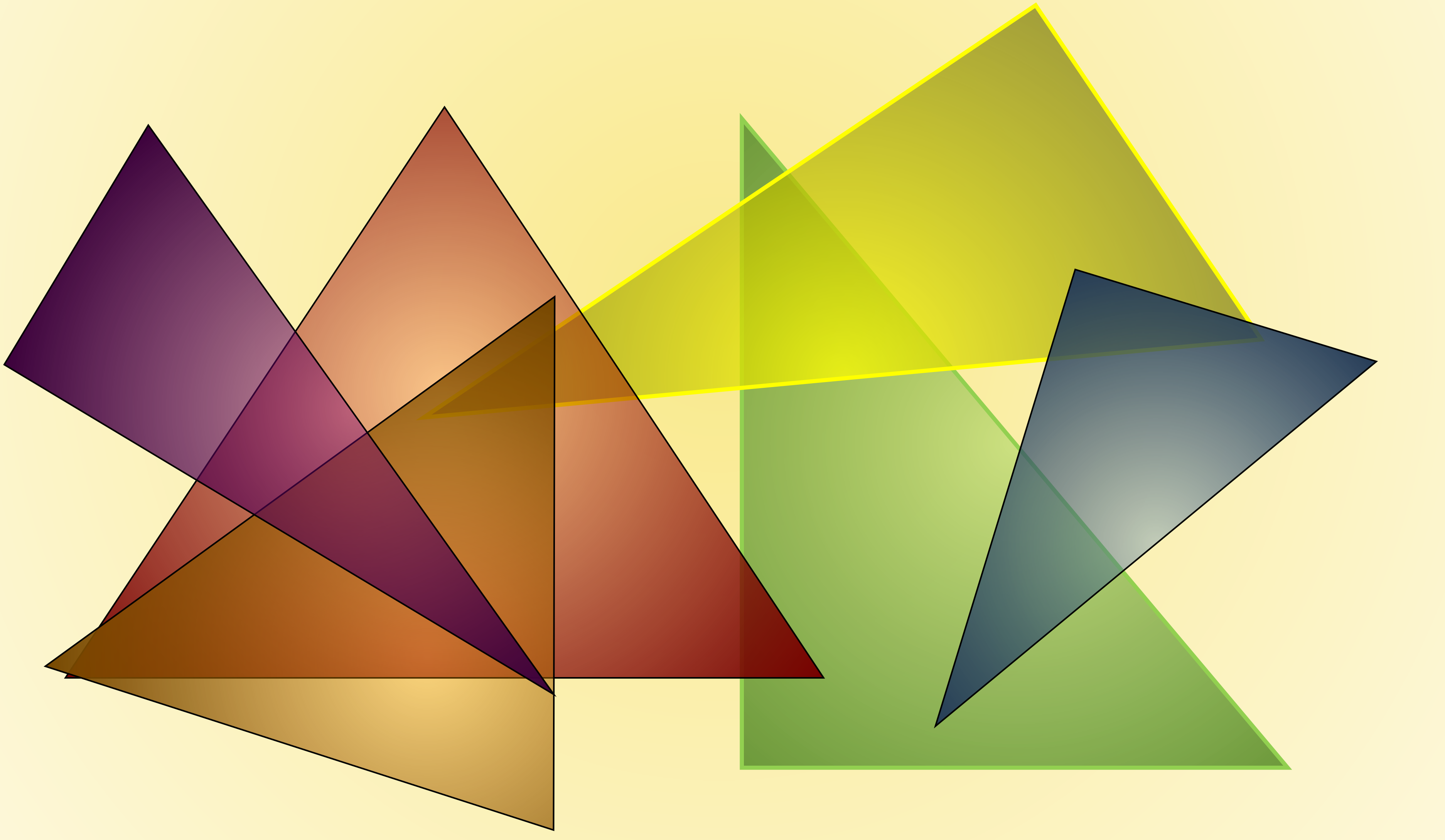
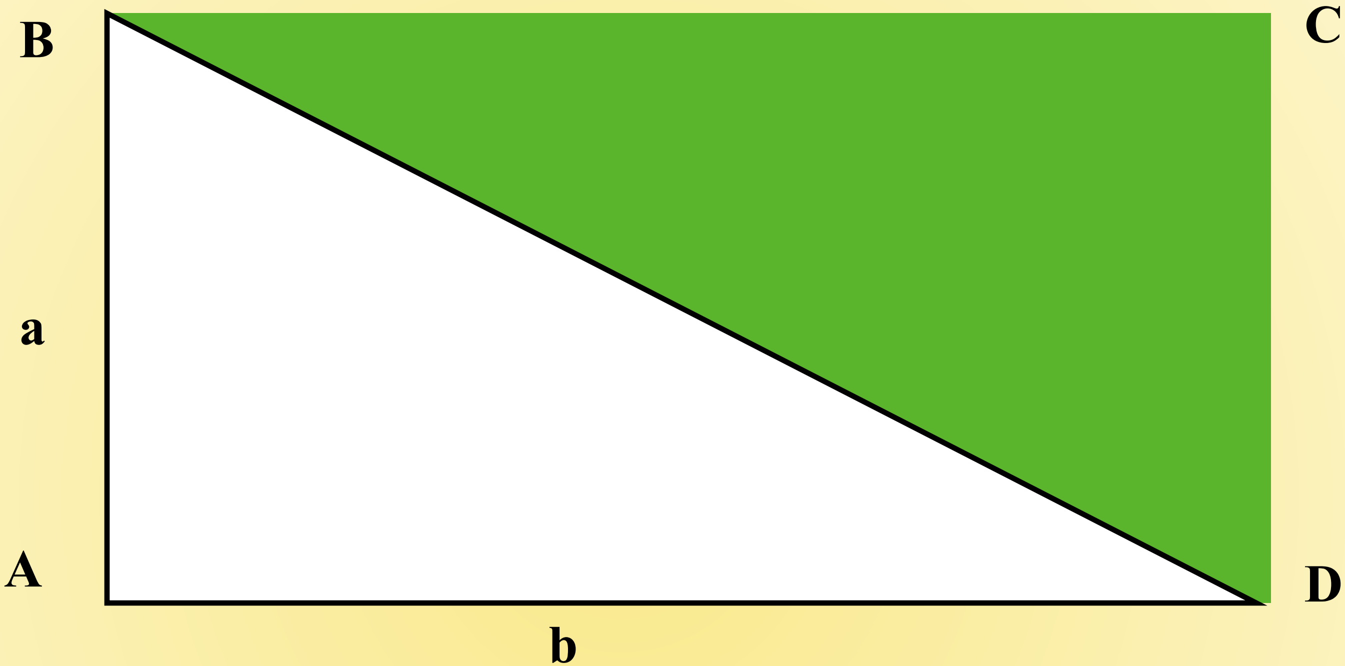
Формулы для вычисления площадей различных треугольников



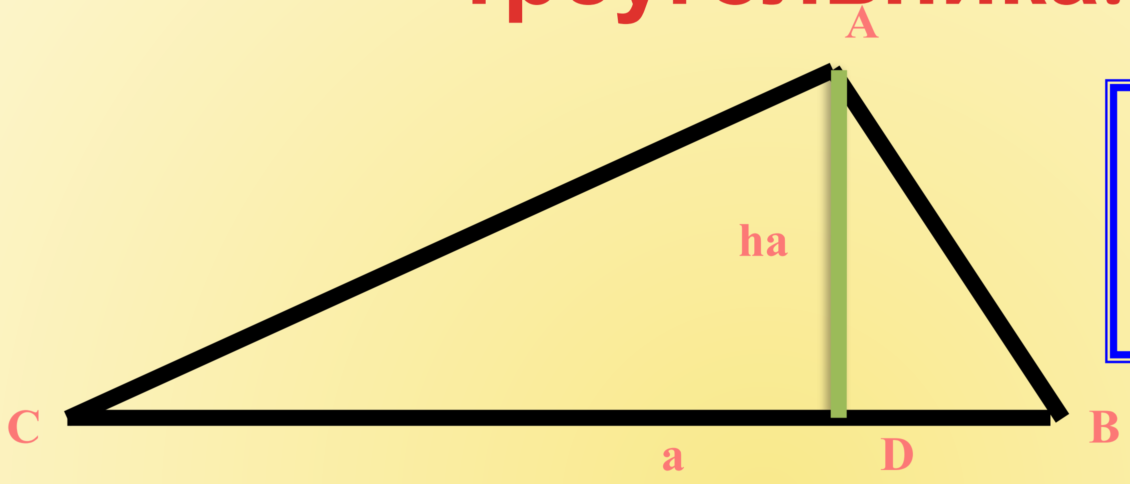
Площадь прямоугольного треугольника.



ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА РАВНА ПОЛОВИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КАТЕТОВ.

$$\boxed{S = \tfrac{1}{2} ab}$$

Площадь любого треугольника.



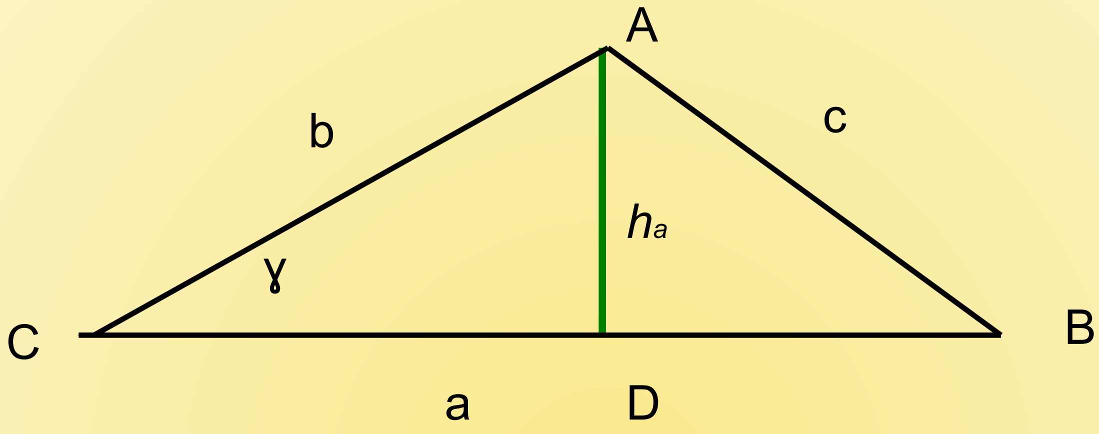
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

Площадь любого треугольника равна половине произведения основания на высоту.

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ADB} = \frac{1}{2} CD \cdot h_a + \frac{1}{2} DB \cdot h_a =$$

$$= \frac{1}{2}(CD + DB) h_a = \frac{1}{2} CB \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

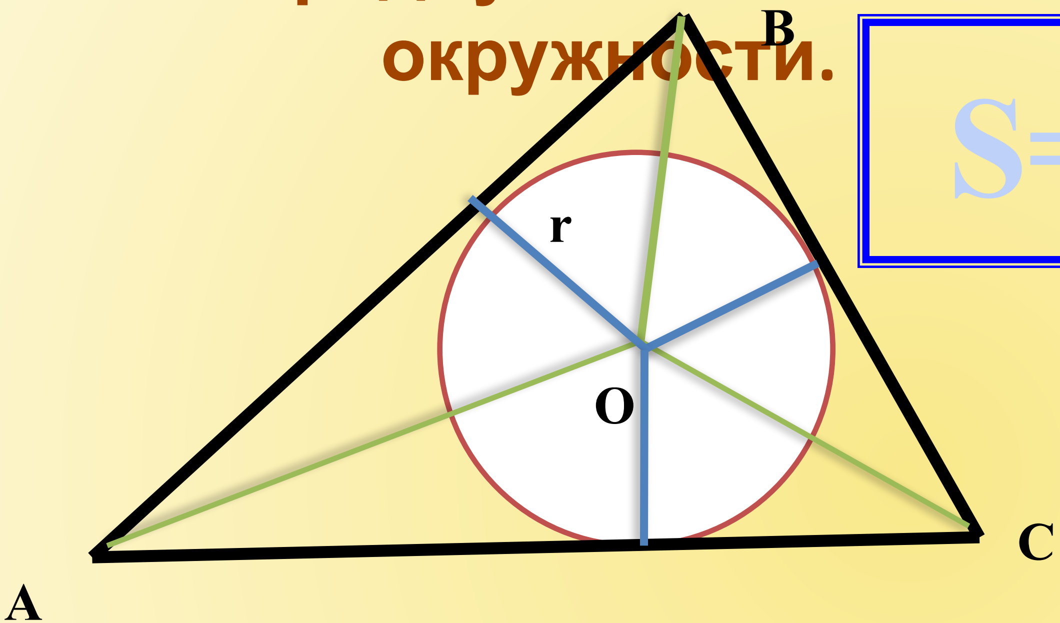


Если в треугольнике известны две стороны и угол между ними, то площадь такого треугольника можно найти, как половина произведения двух сторон на синус угла между ними.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, но из прямоугольного

треугольника ADC $h_a = b \cdot \sin \gamma$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$

Площадь треугольника через r-радиус вписанной окружности.



$$S = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r$$

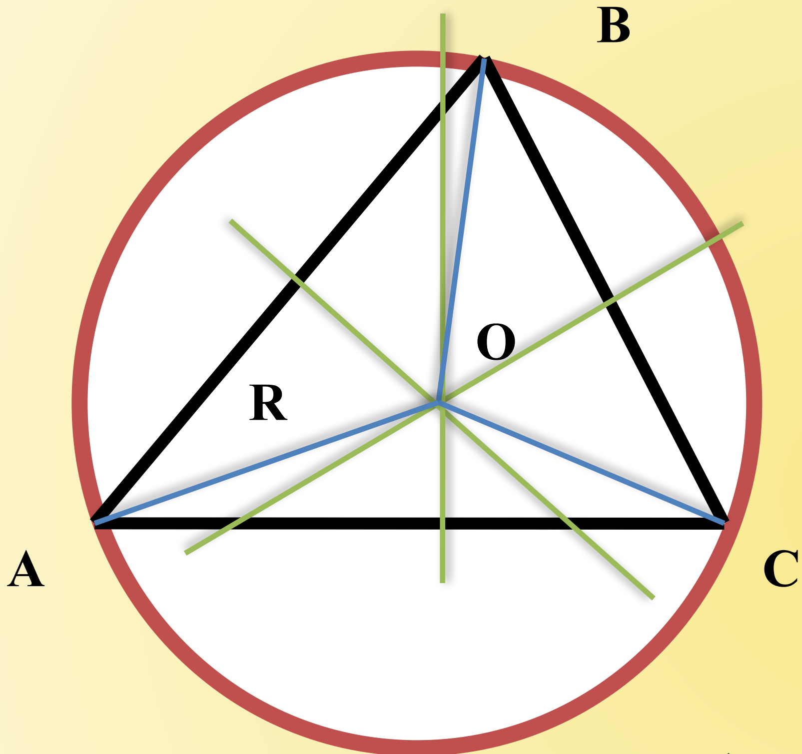
Площадь треугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC} = \frac{1}{2}AB \cdot r +$$

$$+\frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$$

$r =$ *радиус вписанной окружности.*

Площадь треугольника через R-радиус описанной окружности



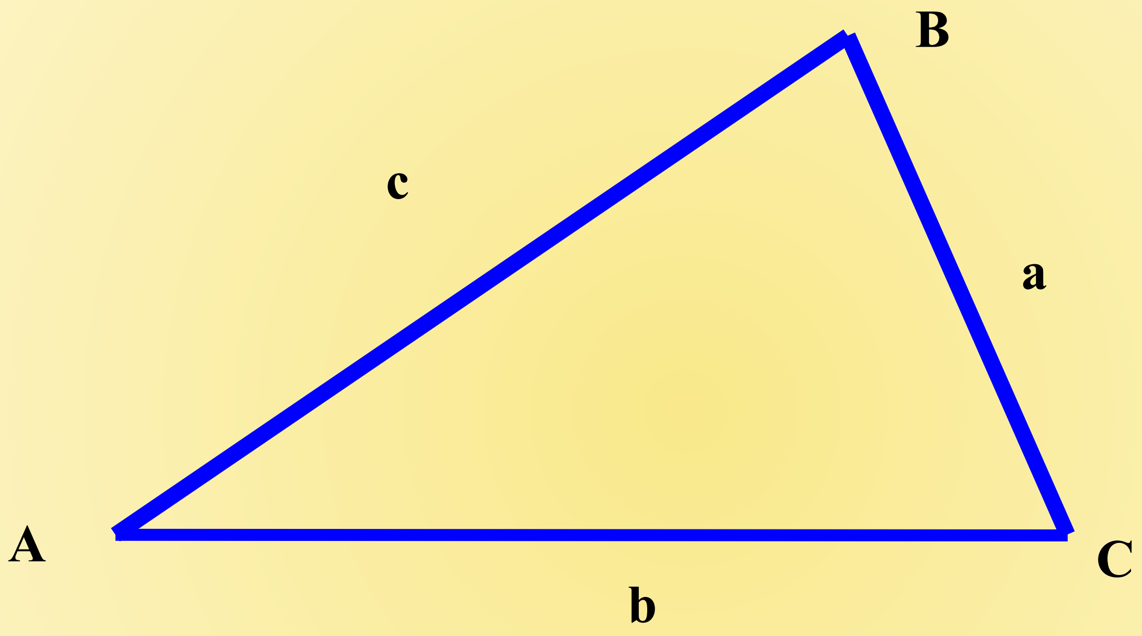
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Мы знаем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$; $\sin C$ найдем из соотношения

$$\frac{c}{\sin C} = 2R; \sin C = \frac{c}{2R}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на четыре радиуса описанной окружности.

І формула Герона



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Доказательство: По теореме косинусов можно записать:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) = \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

т.к.

$$a + b + c = 2p$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c$$

$$c + a - b = c + a + b - 2b = 2p - 2b$$

$$c - a + b = c + b + a - 2a = 2p - 2a,$$

то

$$\sin^2\gamma = \frac{1}{4a^2b^2} \cdot (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) \cdot 2p = \frac{16}{4a^2b^2}(p - a)(p - b)(p - c) \cdot p =$$

$$= \frac{4}{a^2b^2}(p - a)(p - b)(p - c) \cdot p.$$

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}.$$

$$S. = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{ab}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

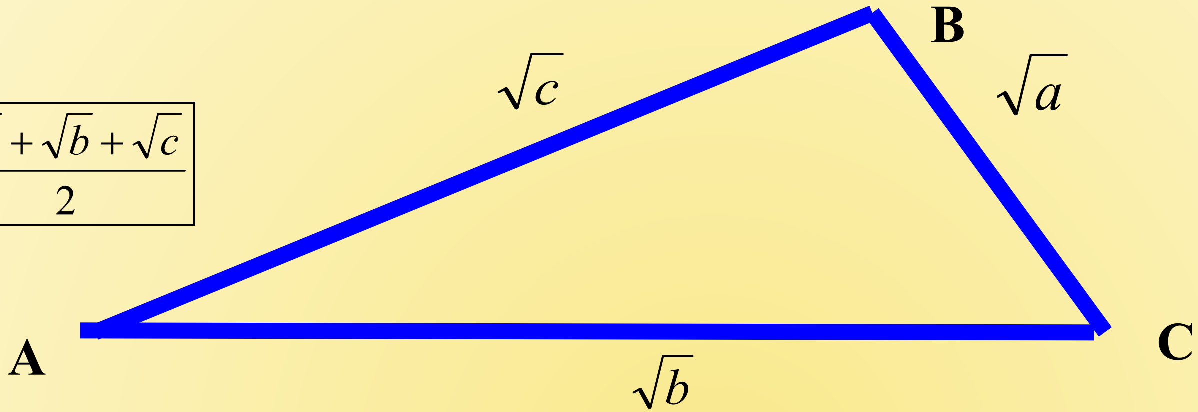
ч.т.д.

ГЕРОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (Heronus Alexandrinus)

Герон Александрийский – греческий учёный, работавший в Александрии,(даты рождения и смерти неизвестны, вероятно, I – II вв. н. э.). Математические работы Герона являются энциклопедией античной прикладной математики. В "Метрике" даны правила и формулы для точного и приближённого расчёта различных геометрических фигур, например *формула Герона* для определения площади треугольника по трём сторонам, правила численного решения квадратных уравнений и приближённого извлечения квадратных и кубических корней. В основном изложение в математических трудах Герона догматично – правила часто не выводятся, а только выясняются на примерах.

Герон занимался геометрией Герон занимался геометрией, механикой Герон занимался геометрией, механикой, гидростатикой Герон занимался

II формула Герона



$$\boxed{p=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}}$$

$$\boxed{S=\frac{1}{4}\sqrt{4ab-(a+b-c)^2}}$$

$$S=\sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}-\sqrt{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}-\sqrt{b}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}-\sqrt{c}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}=$$

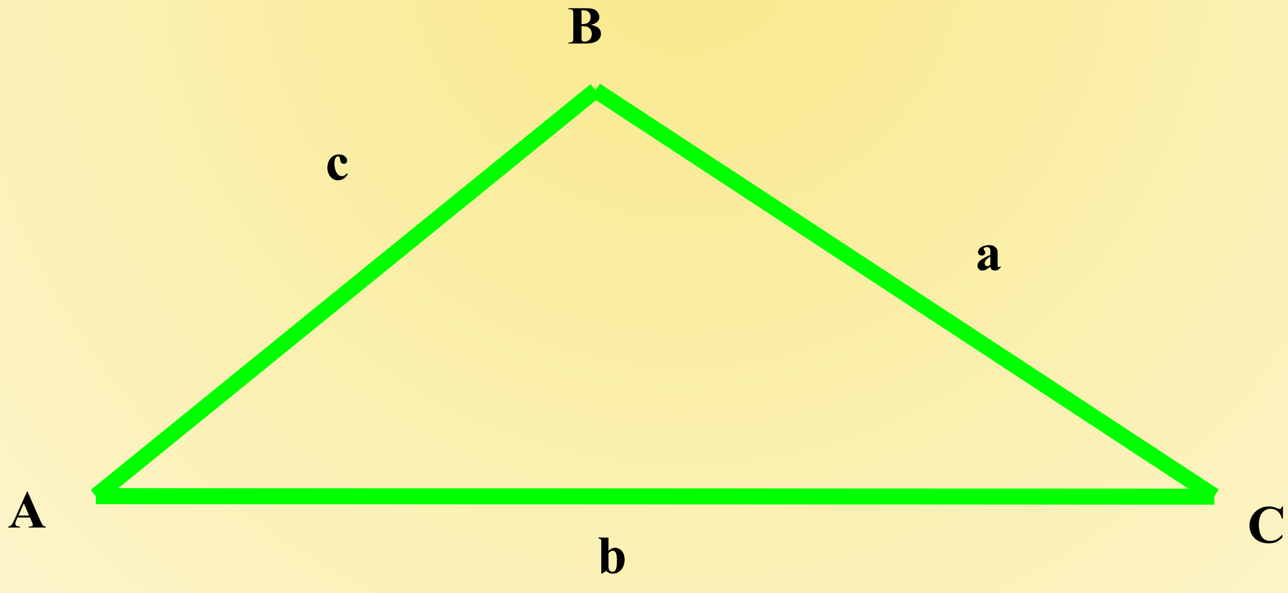
$$=\frac{1}{4}\sqrt{((\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{a})((\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{a})(\sqrt{a}-(\sqrt{b}-\sqrt{c}))(\sqrt{a}+(\sqrt{b}-\sqrt{c}))}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{((\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-a)(a-(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(b+2\sqrt{bc}+c-a)(a-b+2\sqrt{bc}-c)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2\sqrt{bc}+(b+c-a))(2\sqrt{bc}-(b+c-a))}=\frac{1}{4}\sqrt{4bc-(b+c-a)^2}$$

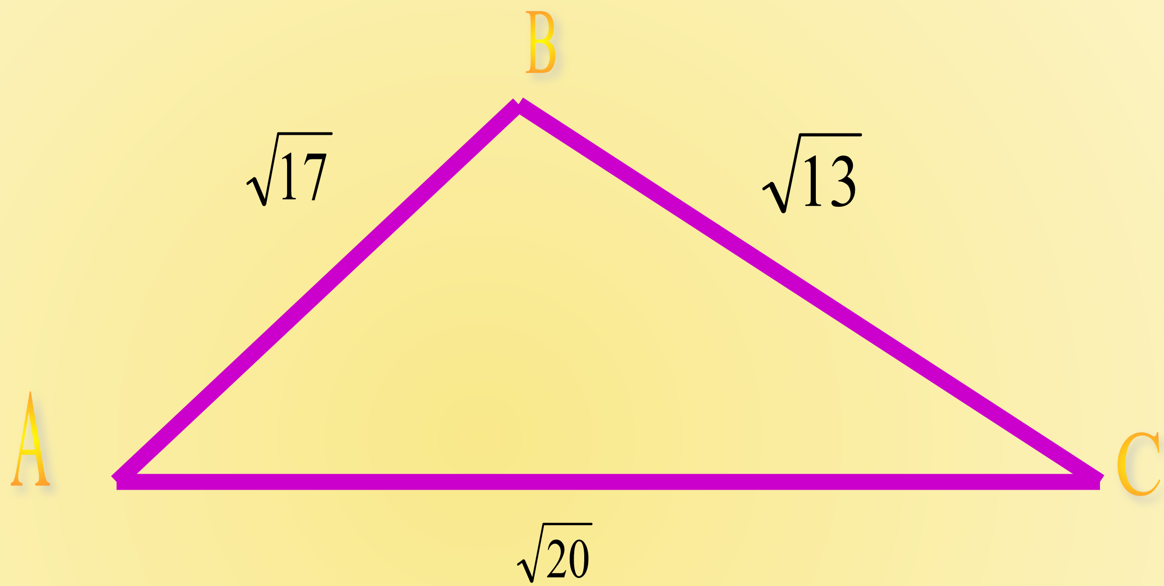
Итак, мы получили II формулу Герона. И если стороны треугольника a,b,c , то запишем ее в виде:

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}$$



Задача:

Найти площадь треугольника со сторонами $\sqrt{17}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{13}$



Решение:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4\cdot 13\cdot 20-(13+20-17)}^2=\frac{1}{4}\sqrt{1040-256}=\frac{1}{4}\sqrt{784}=7$$

Формулы медиан треугольника

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Из треугольника ACD по теореме косинусов :

$$m_a = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2b\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\gamma = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab\cdot\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2 - m_a{}^2}{ab} = \frac{a^2 + 4b^2 - 4m_a^2}{4ab} \qquad (1)$$

Из треугольника ABC по теореме косинусов :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad (2)$$

Приравнивая формулы (1) и (2) получаем :

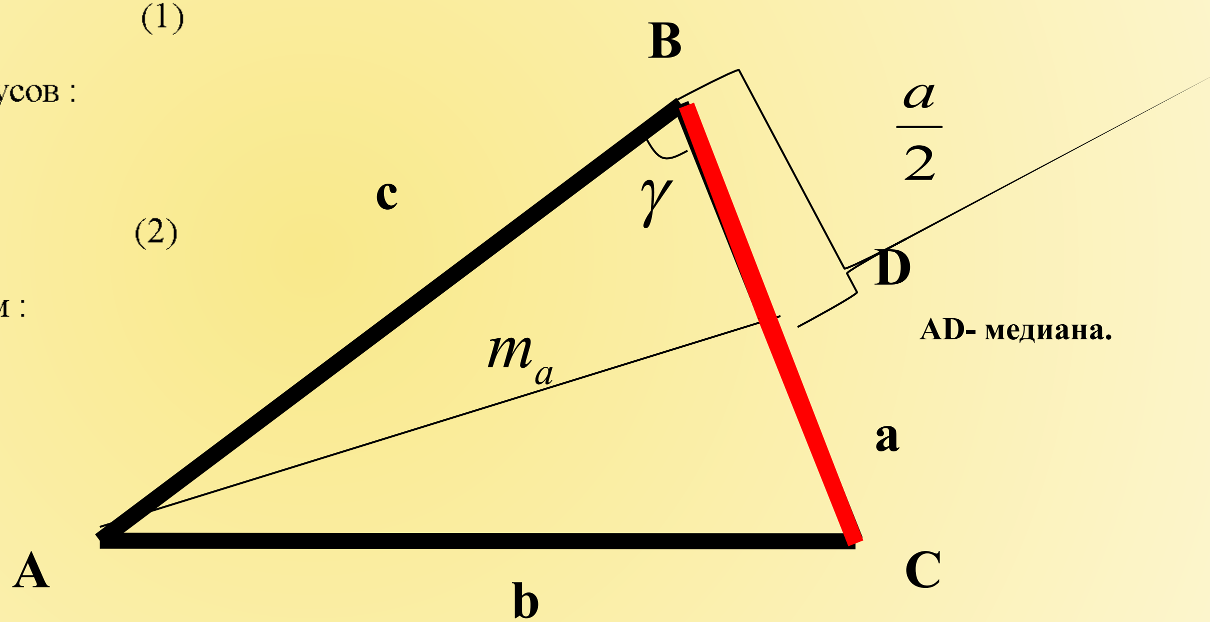
$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{a^2}{2} + 2b^2 - 2m_a^2$$

$$2m_a^2 = \frac{a^2}{2} + 2b^2 - a^2 - b^2 + c^2$$

$$2m_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{2} + c^2$$

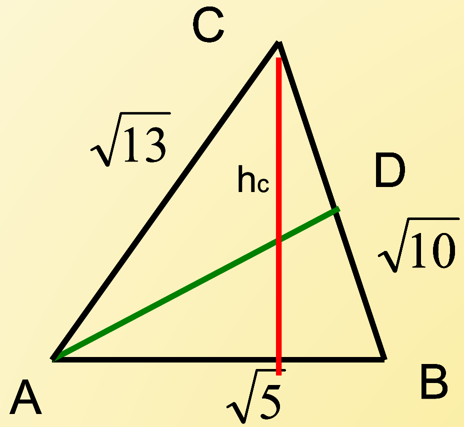
$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$



AD- медиана.

Ч.Т.Д.



Дано: *треугольник* ABC

$c = \sqrt{5}$

$a = \sqrt{10}$

$в = \sqrt{13}$

Найти:

1) S_{ABC}.

2) h_c.

3) cos B.

4) R(радиус описанной окружности).

5) Медиану AD

По второй формуле Герона:

$$1)\ S = \frac{1}{4}\sqrt{4\cdot(\sqrt{10})^2\cdot(\sqrt{13})^2-((\sqrt{10})^2+(\sqrt{13})^2-(\sqrt{5})^2)^2} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{4\cdot10\cdot13-(10+13-5)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{520-324} = \frac{1}{4}\sqrt{196} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$2)\ Проведем\ высоту\ CK = h_c,$$

$$h_c = \frac{2S}{c};\ h_c = \frac{2\cdot3{,}5}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$3)\quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{10+5-13}{2\cdot5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

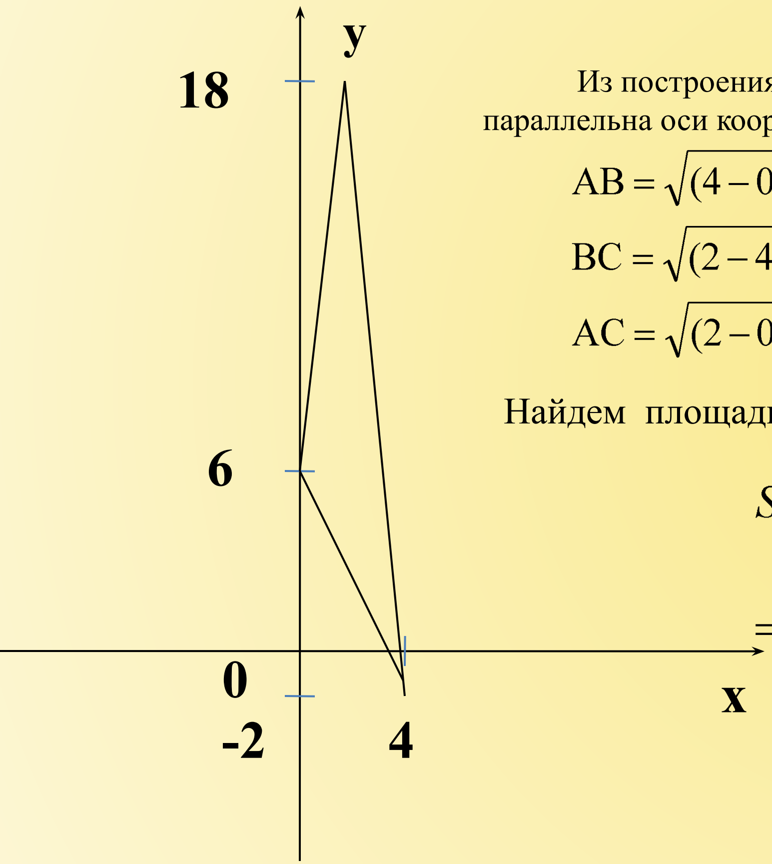
$$4)\ R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}{4\cdot3{,}5} = \frac{5\sqrt{26}}{14}$$

5) Проведем медиану $AD = m_a$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(\sqrt{13})^2+2\cdot(\sqrt{5})^2-(\sqrt{10})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26+10-10} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Площадь треугольника в системе координат

Найти площадь треугольника ABC если, A(0;6) B(4;-2) C(2;18)



Из построения видно, что треугольник ABC разносторонний, и ни одна из высот не параллельна оси координат.

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (18+2)^2} = \sqrt{404}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (18-6)^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148}$$

Найдем площадь треугольника по II формуле Герона..

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4 \cdot 80 \cdot 404 - (80+404-148)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{129280 - 112896} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16384} = \frac{1}{4} \cdot 128 = 32$$

Как мы видим здесь очень громоздкие вычисления и без калькулятора не обойтись. Тогда встает вопрос . А нет ли какой-нибудь формулы попроще, чтоб посчитать площадь треугольника в прямоугольной системе координат? И вот эта формула.

Пусть вершины треугольника АВС имеют следующие координаты:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\|$$

А(x_1; y_1), В (x_2; y_2), С(x_3; y_3)

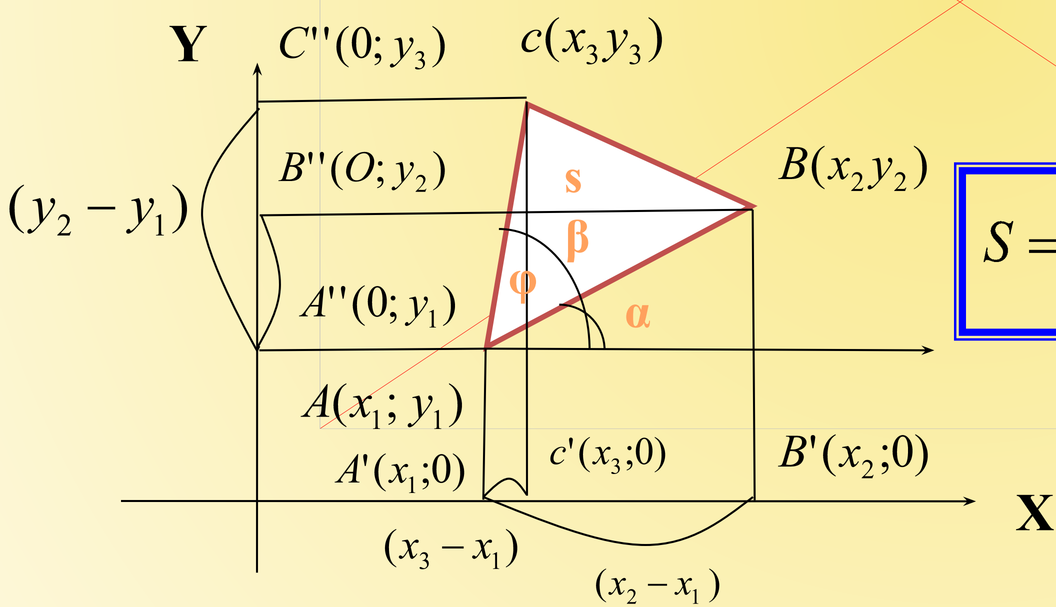
Применим эту формулу к нашему примеру.

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4-0 & 2-0 \\ -2-6 & 18-6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(48+16) = 32.$$

Если предположить, что x_1=y_1=0, то получится еще более простая формула:

$$S = \frac{1}{2}\left| x_2 y_3 - x_3 y_2 \right|$$

Вывод этой последней формулы приводится ниже .



$$S = \frac{1}{2}\left| (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \right|$$

Пусть требуется найти площадь S треугольника ABC с вершинами A $(x_1; y_1)$, B$(x_2; y_2)$, C$(x_3; y_3)$.
Пусть AB= c, AC = b, а углы, образованные этими сторонами осью Ox, соответственно равны α и β

$$\left.\begin{array}{l} A'B' = c_x = c\cos\alpha = x_2 - x_1 \\ A''B'' = c_y = c\sin\alpha = y_2 - y_1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} A'C' = b_x = b\cos B = x_3 - x_1 \\ A''C'' = b_y = b\sin B = y_3 - y_1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Прямоугольная система координат на плоскости:

Пусть ф = угол CAB; очевидно

ф = β – α

По известной формуле тригонометрии получаем:

S= ½ bc sin ф = ½ bc sin (β – α) = ½ bc(sin β cos α- cosβ sinα) = ½($b_y c_x - b_x c_y$) (3)

Отсюда в силу (1) (2) имеем:

$S = \frac{1}{2}[(y_3-y_1)(x_2-x_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)]$ (4)

Заметим, что формула (4) при ином расположении вершин может дать площадь треугольника S со знаком минус. Поэтому формулу для площади треугольника обычно пишут в виде:

$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)]$ (4’)

Где знак выбирается так, чтобы для площади получалось положительное число.

Формулу (4) можно записать в удобном для запоминания форме:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{matrix}\right\|$$

Восемь формул для нахождения площадей различных треугольников.

$$S=\frac{1}{2}ab$$

$$S=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$S=\frac{1}{2}a\cdot ha$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

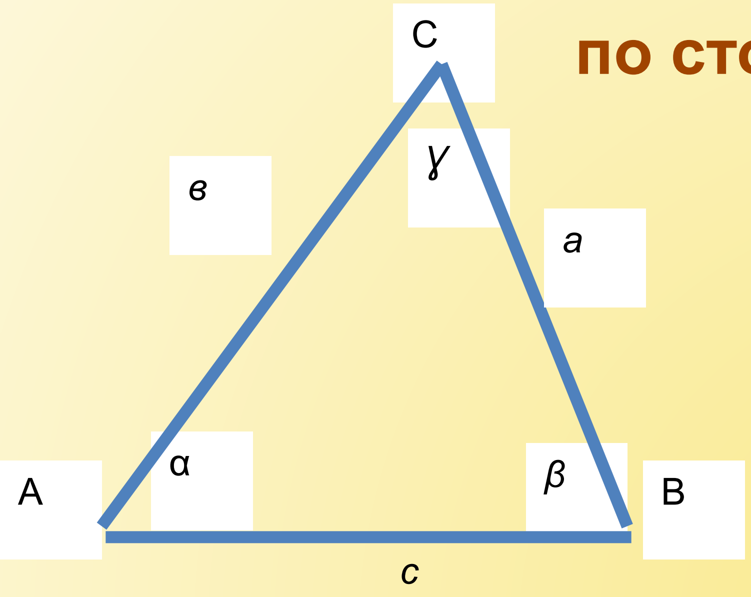
$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$$

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1-x_0 & \mathrm{y}_1-y_0 \\ x_2-x_0 & \mathrm{y}_2-\mathrm{y}_0 \end{matrix}\right\|$$

$$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



$$\boxed{S=\frac{c^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$S=\frac{c^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \qquad (1)$$

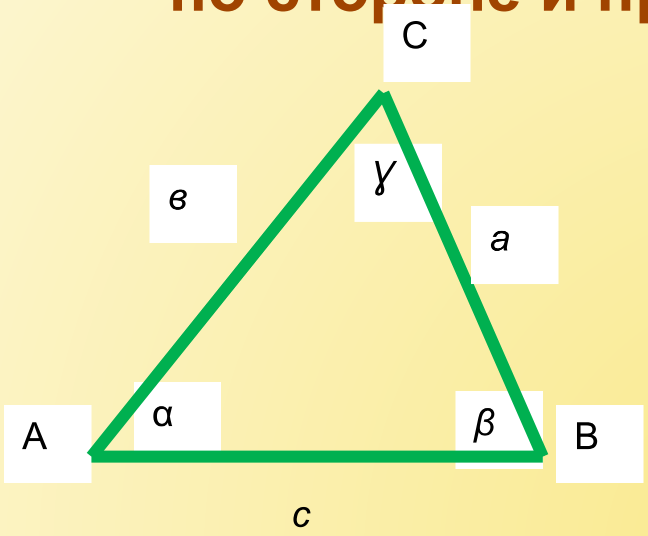
Доказательство :

$\gamma=180°-(\alpha+\beta)$

Из $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$ следует $a=c\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b=c\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\sin\gamma=\frac{c^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\gamma}=\frac{c^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(180°-(\alpha+\beta))}=\frac{c^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



$$\boxed{S = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.}$$

Доказательство :

Т.к. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta =$

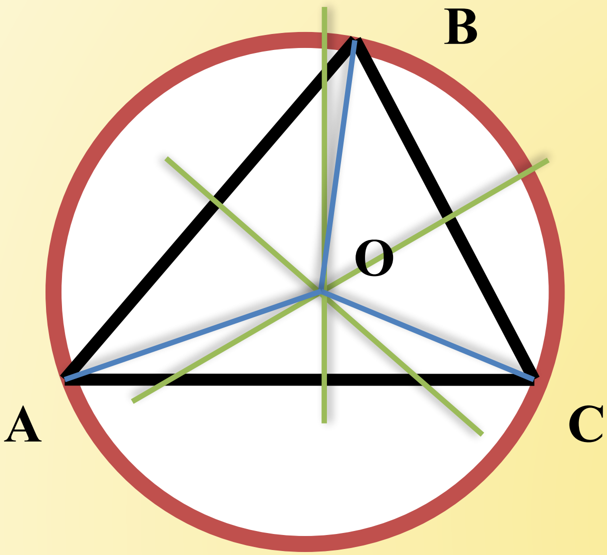
$$= \sin\alpha \cdot \sin\beta \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \right) = \sin\alpha \cdot \sin\beta (ctg\alpha + ctg\beta).$$

Подставляя в формулу (1), получим :

$$S = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta (ctg\alpha + ctg\beta)} = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

$$S = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и радиус описанной окружности.



$$S = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Доказательство:

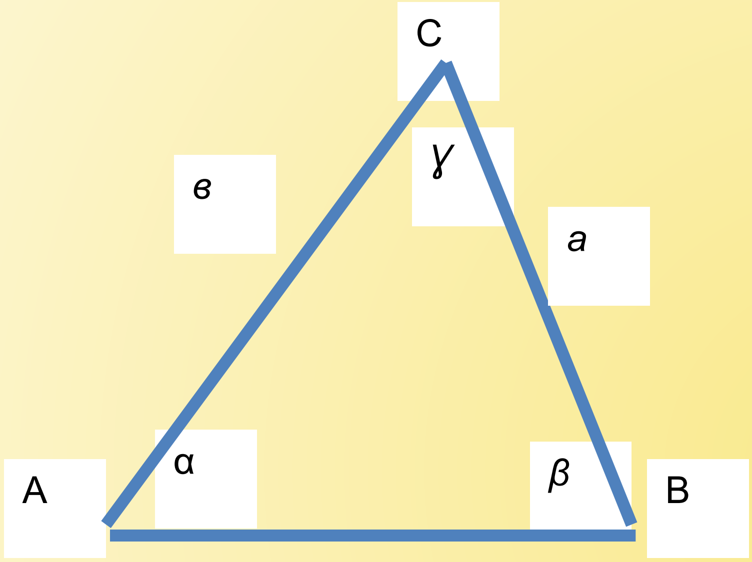
Из $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

получим $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R \cdot \sin\beta$. Подставим в формулу

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$$

$$S = \frac{1}{2}2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot \sin\gamma = 2R^2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и одну из сторон треугольника



$$S = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

Доказательство :

Из $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ имеем $b = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin A}$

Подставим в формулу $S = \dfrac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$; $S = \dfrac{1}{2} a \cdot \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \dfrac{1}{2} \dfrac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

Вычисление площади треугольника через радиусы вневписанных окружностей.

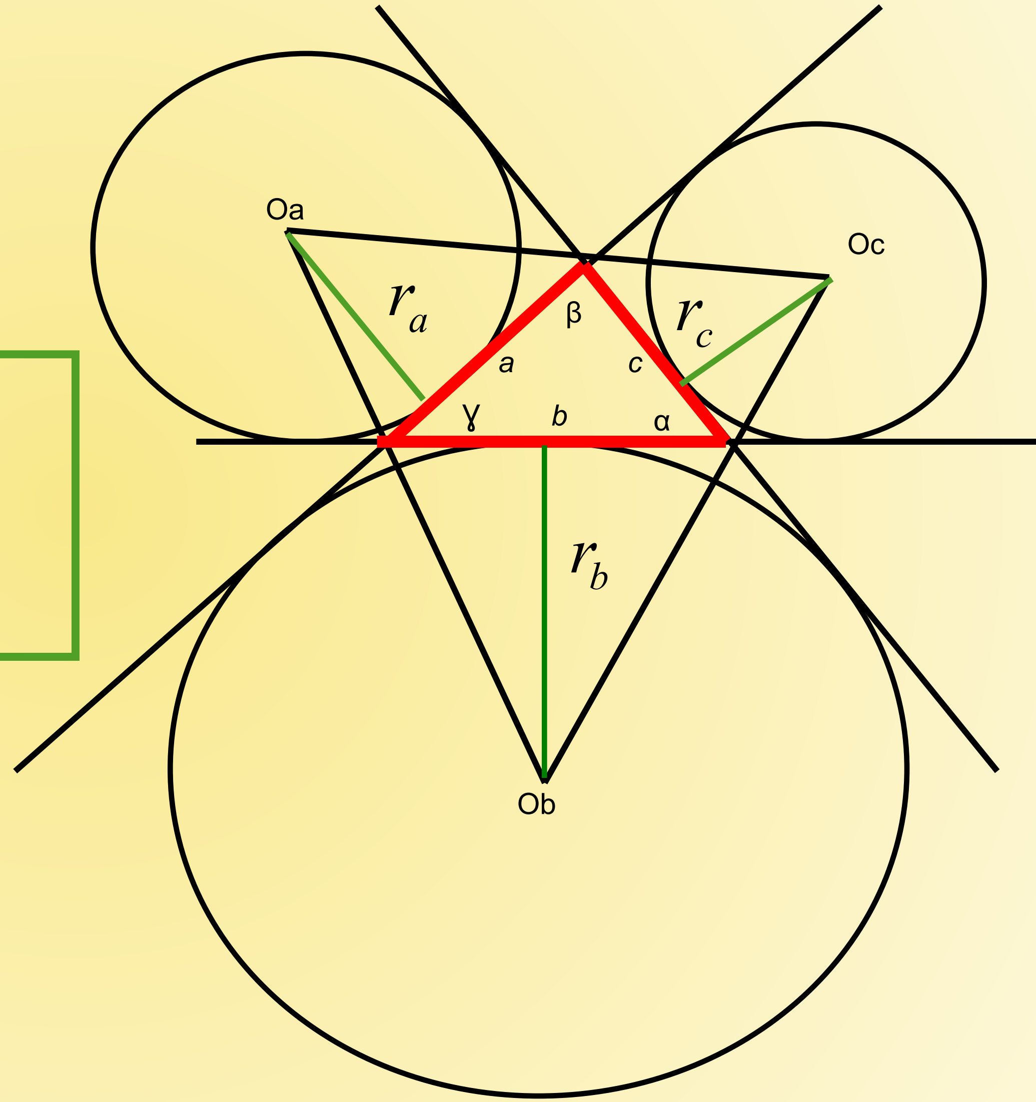
Вневписанная окружность- это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.

$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$$

$$S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей

p – полупериметр



Интернет-ресурсы

- Сайт [http://**www.webmath.ru**](http://www.webmath.ru)
- **Вычисление площади треугольника**
- **Формула площади треугольника, онлайн сервис для расчета площади треугольника. Нахождение площади треугольника 7-ю методами, всего за несколько секунд Вы найдете площадь треугольника.**