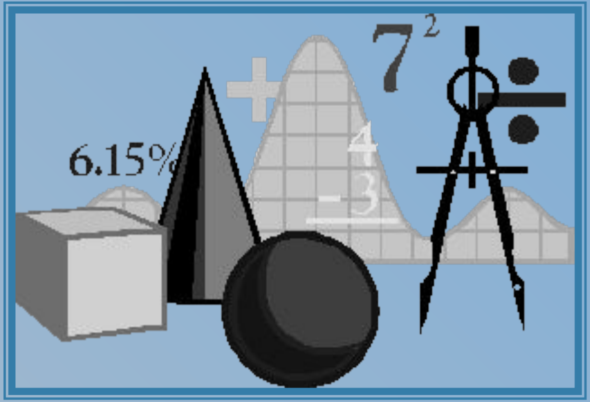


Введение в комбинаторику

Комбинаторные задачи

Комбинаторика – от латинского слова, означает «соединять, сочетать».

Комбинаторика – область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Комбинаторные задачи – задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций.

История науки «Комбинаторика»

Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии ещё во II веке до н. э. Индийцы умели вычислять числа, которые сейчас называют «сочетания». В XII веке Бхаскара вычислял некоторые виды сочетаний и перестановок. Учёные изучали соединения в связи с применением их в поэтике, науке о структуре стиха и поэтических произведениях. Например, в связи с подсчётом возможных сочетаний ударных (долгих) и безударных (кратких) слогов складывали псалмы из n слогов. Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Г Лейбницем в 1665 г работы «Рассуждения о комбинаторном искусстве», в которой впервые было дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Изучением размещений впервые занимался Я .Бернули во второй части своей книги «Искусство предугадывания».

Из истории комбинаторики

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

В Древней Греции

подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей и т.д.

Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т. д.)

В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучал, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных.

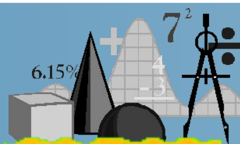
Готфрид Вильгельм Лейбниц (1.07.1646 - 14.11.1716)

Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

Леонард Эйлер(1707-1783)

рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов, положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в большую и важную науку—топологию, которая изучает общие свойства пространства и фигур.

Практическая значимость науки



Комбинаторные навыки полезны:

а) в играх (нарды, карты, шашки, шахматы),

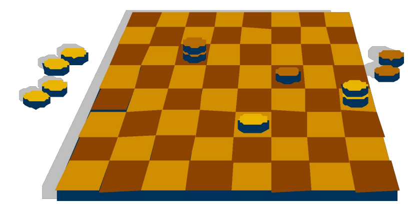
требовавшие умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника. О таких играх английский поэт Уордсварт писал:

Не нужно нам владеть клинком,

Не ищем славы громкой.

Тот побеждает, кто знаком

С искусством мыслить тонким.



б) дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали сложные шифры, основанные на комбинаторных принципах, а секретные службы других государств пытались эти шифры отгадать.

Комбинаторика.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы выбора или расположения элементов множества в соответствии с заданными правилами.

Комбинаторика рассматривает конечные множества.

Методы решения комбинаторных задач

1. **Правило суммы.**
2. **Правило произведения.**
3. **Таблицы.**
4. **Графы (деревья).**
5. **Формулы.**

ПРАВИЛО СУММЫ

- Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить (m+n) способами.
- При использовании правила суммы надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-либо способом выбора объекта B.
- Если такие совпадения есть, правило суммы утрачивает силу, и мы получаем лишь (m + n - k) способов выбора, где k—число совпадений.

Решение задач

В коробке находится 10 шаров: 3 белых, 2 черных, 1 синий и 4 красных. Сколькими способами можно взять из ящика цветной шар?

<u>Решение:</u>

Цветной шар – это синий или красный, поэтому применим правило суммы:

= 5

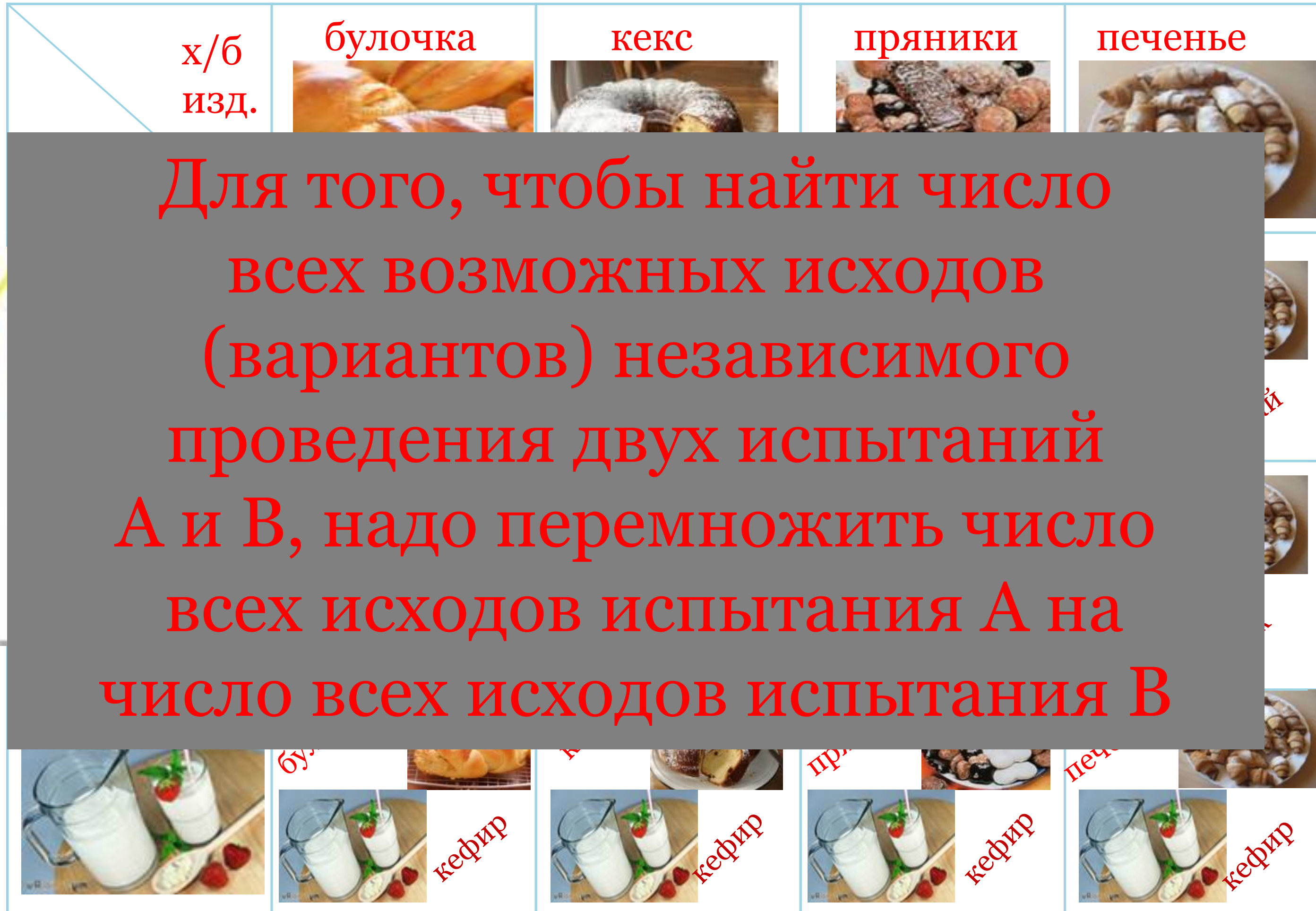
ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

- Если объект А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то выбор пары (А,В) в указанном порядке можно осуществить mn способами.

- При этом число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент.

На зав
печен лько
вариантов завтрака есть?

2.Правило умножения.



Для того, чтобы найти число всех возможных исходов (вариантов) независимого проведения двух испытаний А и В, надо перемножить число всех исходов испытания А на число всех исходов испытания В

Испытание А имеет 3 варианта (исхода), а испытание В-4, всего вариантов независимых испытаний А и В 3•4=12.

Решение задач

Сколько может быть различных комбинаций выпавших граней при бросании двух игральных костей?

Решение:

На первой кости может быть: 1,2,3,4,5 и 6 очков, т.е. 6 вариантов.

На второй – 6 вариантов

Всего: 6*6=36 вариантов

Правила суммы и произведения верны для любого количества объектов.

Выборка элементов (таблицы)

Множество

Подмножество

Подмножество

Перебор возможных вариантов

Пример.

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

135	137	153	157	173	175
315	317	351	357	371	375
513	517	531	537	571	573
713	715	731	735	751	753

Общий вид комбинаторного правила умножения

Пусть имеется n элементов и требуется выбрать один за другим некоторые k элементов.

Если <u>первый элемент</u> можно выбрать <u>n_1 способами</u>, после чего <u>второй элемент</u> можно выбрать из оставшихся элементов <u>n_2 способами</u>, затем <u>третий элемент</u> – <u>n_3 способами</u> и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все элементов, равно произведению

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_к$$

Комбинаторное правило умножения

Первую цифру можно выбрать ***четырьмя*** способами (1, 3, 5, 7).

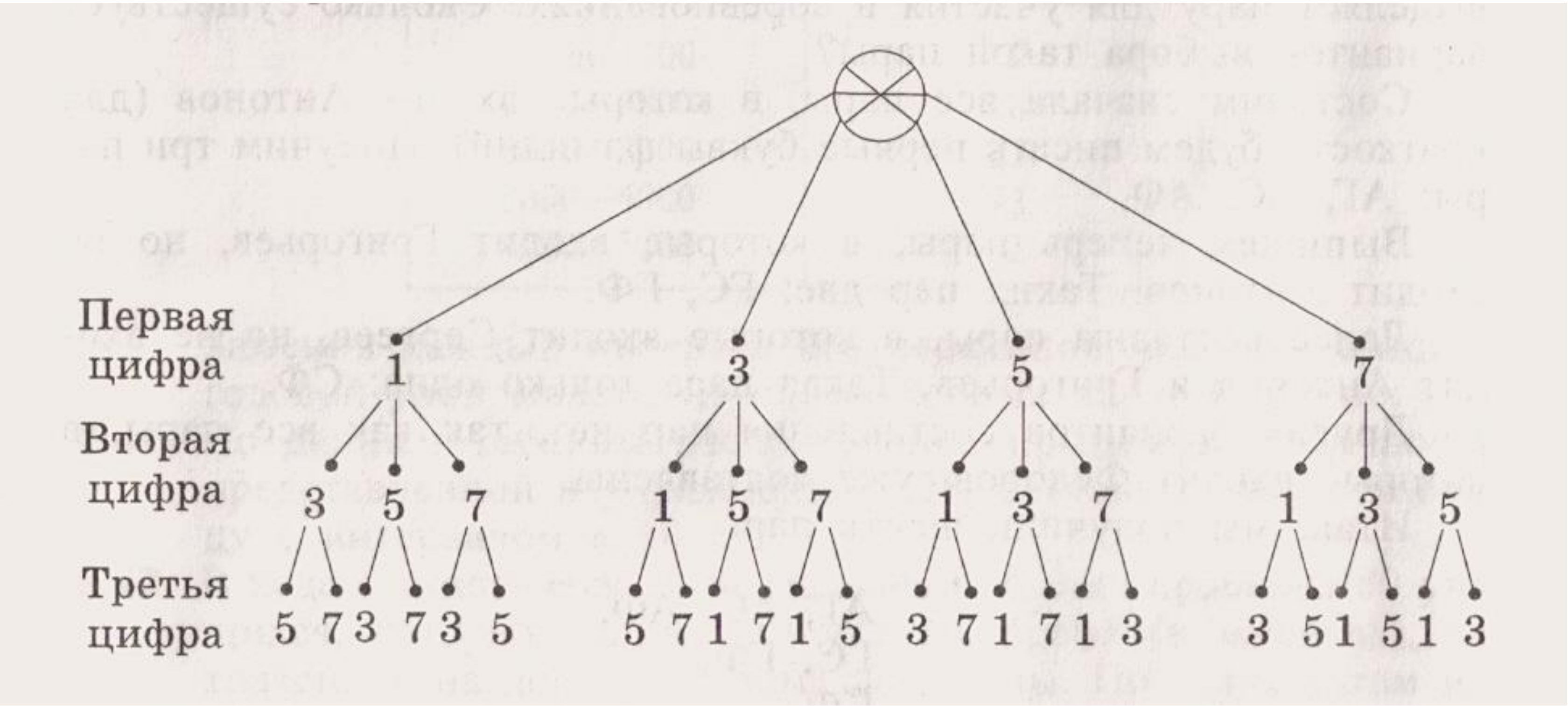
Так как после выбора первой цифры останутся три, то *вторую цифру* можно выбрать ***тремя способами***.

Третью цифру можно выбрать (из оставшихся двух) ***двумя способами***.

Следовательно, ***общее число*** искомых трехзначных чисел равно произведению

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Схема – дерево возможных вариантов



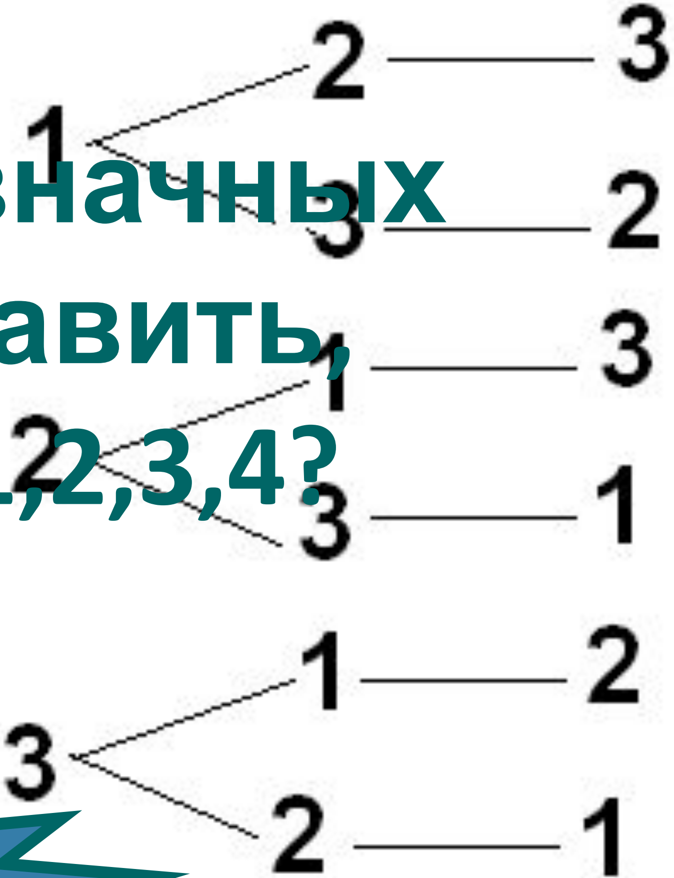
Задача:

Сколько четырёхзначных чисел можно составить, используя числа 1,2,3,4?

Сколько трехзначных чисел можно получить,

Заметили закономерность?

1...



6

24

Это числа:
123, 132, 213,
231, 312, 321

Задача:

Антон, Борис и Виктор купили 3 билета на футбол на 1-е, 2-е, 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами мальчики могут нять эти места?

Решение задачи:

Может быть такая последовательность:

А Б В   А В Б

Может быть и так:

Б В А   Б А В

А может быть и так:

В А Б   В Б А

Ответ: 6 вариантов

3. « Эн факториал»-n!.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 72$

Определение.
Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают n! и называют «эн факториал»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

Удобная формула!!!

$n! = (n-1)! \cdot n$

Факториал

Читаем:

n!

n (эн) - факториал

«Он признавал лишь интегралы,
Комплексных переменных рать
И с помощью факториалов
Мог все на свете доказать...»
(Описание лектора по высшей математике)

Произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n обозначается n!

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

5! =1*2*3*4*5 = 120

7! = 1*2*3*4*5*6*7 =5040

2! =1*2= 2

0!=1

(англ.) factorial – делающий

(англ.) factor – множитель

Расписание уроков.

Пример 3. *В 9 классе в среду 7 уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить?*

Расставляем предметы по порядку

Предмет	Число вариантов
Алгебра	7
Геометрия	6
Литература	5
Русский язык	4
Английский язык	3
Биология	2
Физкультура	1

Всего вариантов расписания

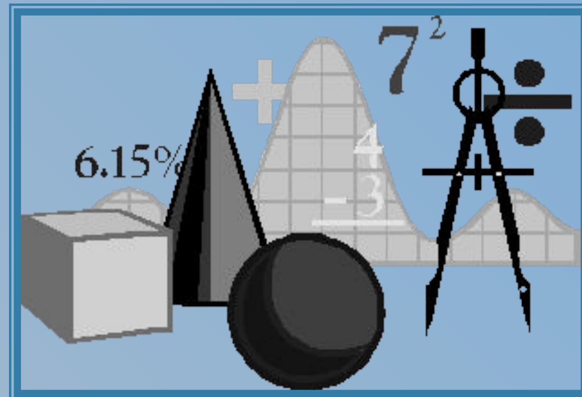
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7! =$$

$$=5040$$

Задание 1:

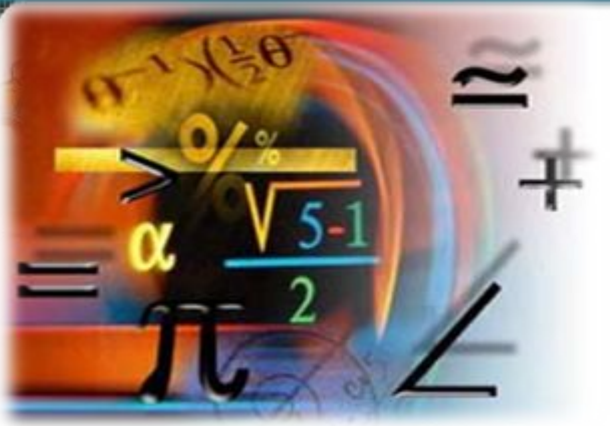
Вычислите :

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!} \qquad \frac{7!+8!-6!}{31\cdot 6!}$$



Основные понятия комбинаторики

- ***Перестановки***
- ***Размещения***
- ***Сочетания***



Комбинаторные понятия: перестановки

Определение:

Перестановкой называется множество из n элементов, записанных в определённом порядке.

Теорема о перестановках элементов конечного множества:

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно n! способами.

$$P_n=n!$$

Свойства перестановок

1. В упорядоченную выборку входят все n элементов;
2. Все перестановки имеют один и тот же состав и отличаются только порядком элементов.

Решение задач

Сколькими способами можно развесить 5 цветных шаров на гирлянде?

<u>Решение:</u>

Каждая расстановка будет отличаться от предыдущей порядком следования шаров (элементов). Поэтому это будет перестановка из 5 элементов.

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Задание 2: Вычислите :

$$\frac{P_8}{P_6}$$

$$\frac{P_5 + P_4}{P_3}$$

Задание 3:Вычислите :

$$\frac{P_6 - P_4}{P_3}$$

$$\frac{P_8 - P_7}{7 \cdot P_7}$$