Лекция 3. Общие понятия и определения. Классификация функций. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о бесконечно малых функциях.

Функция

При решении различных задач обычно приходится иметь дело с постоянными и переменными величинами.

<u>Определение</u>

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и тоже значение или вообще или в данном процессе: в последнем случае она называется параметром.

Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Понятие функции

При изучении различных явлений обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин (независимые переменные) полностью определяют значения других (зависимые переменные и функции).

<u>Определение</u>

Переменная величина у называется функцией (однозначной) от переменной величины х, если они связаны между собой так, что каждому рассматриваемому значению х соответствует единственное вполне определенное значение величины у (сформулировал Н.И.Лобачевский).

Обозначение $y=f(x)$ (1)

x – независимая переменная или аргумент;

y – зависимая переменная (функция);

f – характеристика функции.

Совокупность всех значений независимой переменной, для которых функция определена, называется областью определения или областью существования этой функции. Областью определения функции может быть: отрезок, полуинтервал, интервал, вся числовая ось.

Примеры:

1. Формула площади круга $S = \Pi R2$

Каждому значению радиуса соответствует значение площади круга. Площадь – функция от радиуса, определенная в бесконечном интервале $0 \le R < +\infty$

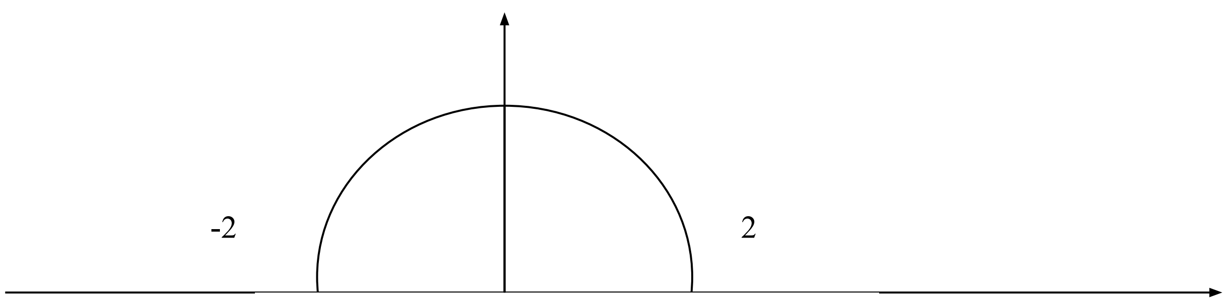
2. Функция $y = \sqrt{4 - x^2}$ (2). Функция определена при $4 - x^2 \ge 0 \Rightarrow |x| \le 2$

Для наглядного представления поведения функции строят график функции.

<u>Определение</u>

Графиком функции *y=f(x)* называется множество точек *M(x,y)* плоскости *OXY*, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью. Или график функции – это линия, уравнением которой служит равенство, определяющее функцию.

Например, график функции (2) – полуокружность радиуса 2 с центром в начале координат.



Простейшие функциональные зависимости

Рассмотрим несколько простейших функциональных зависимостей

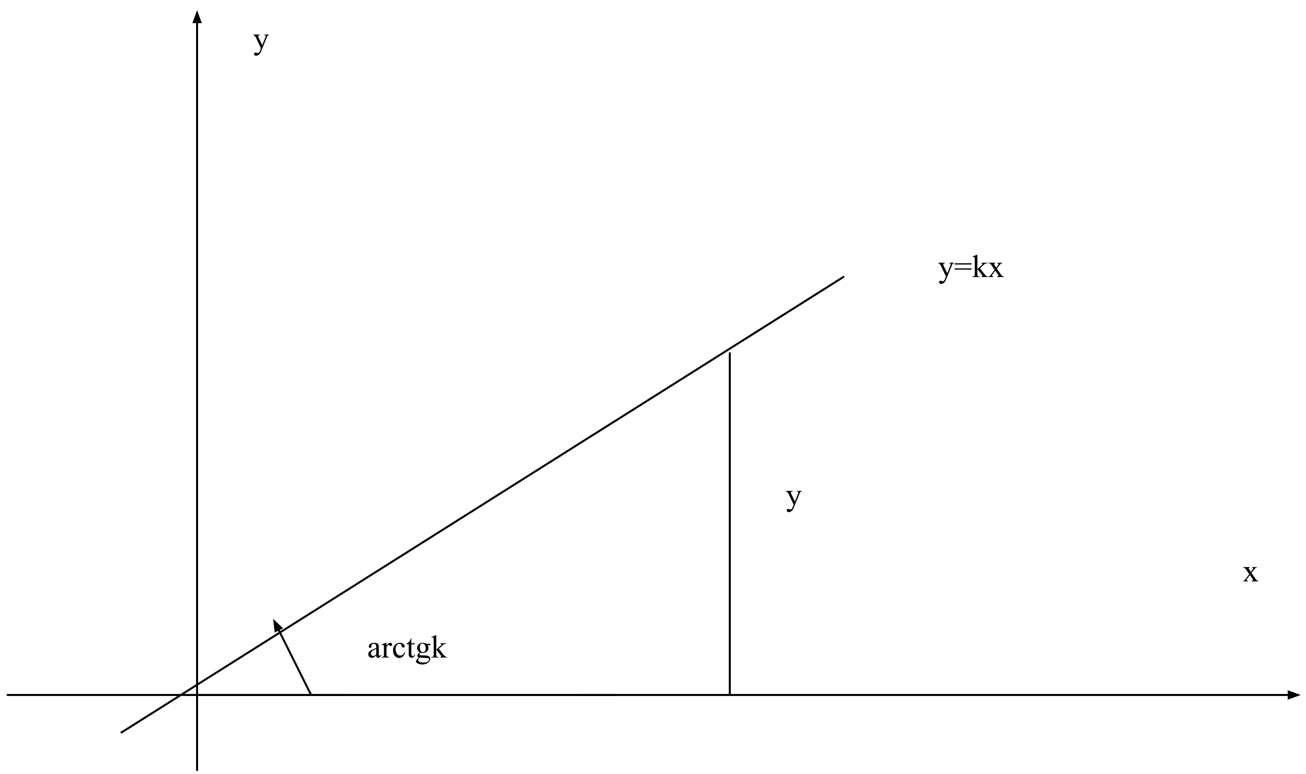
1. Прямая функциональная зависимость

<u>Определение</u>

Две переменные величины называются прямо пропорциональными, если при изменении одной из них в некотором отношении, другая изменяется в том же соотношении.

$y=kx$, где k – коэффициент пропорциональности.

График функции

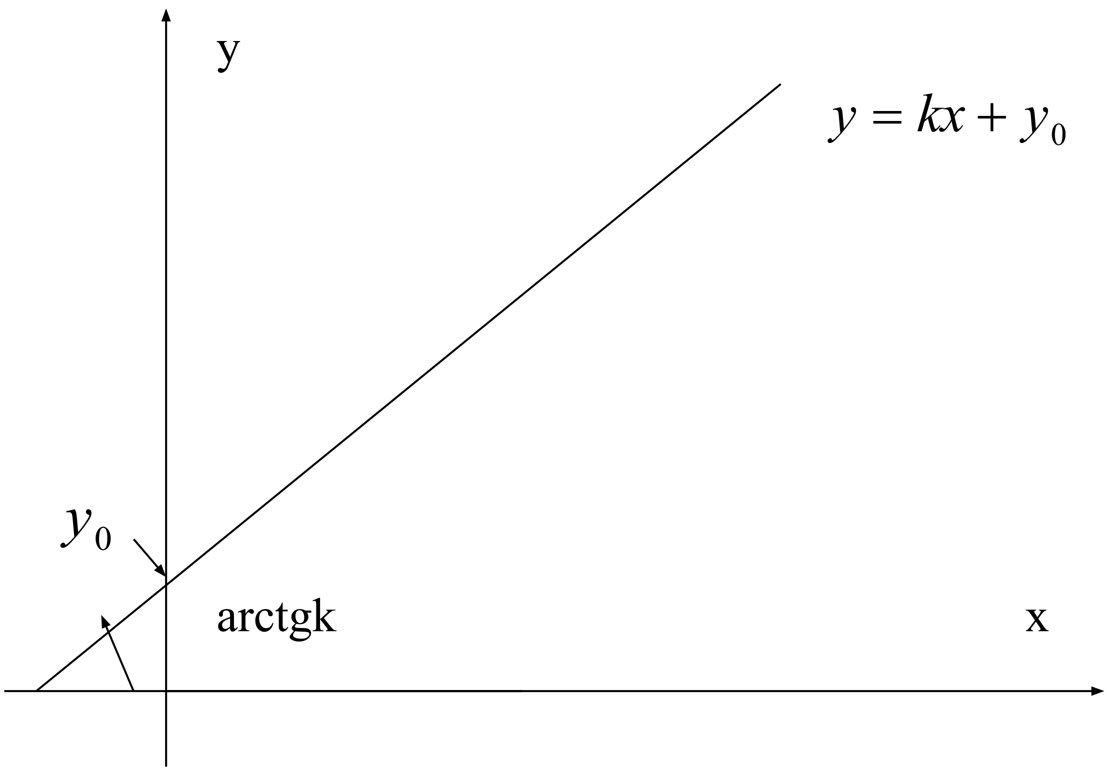


2. Линейная зависимость

Определение

Две переменные величины связаны линейной зависимостью, если $y = kx + y_0$, где k, y_0 - некоторые постоянные величины.

График функции

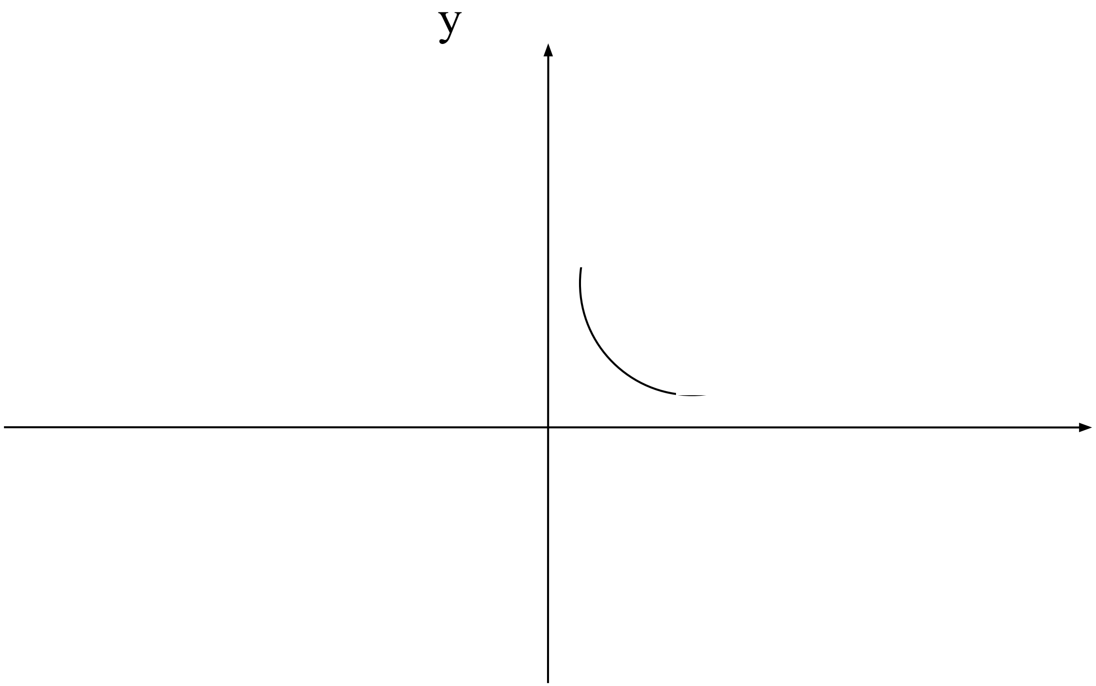


3. Обратная пропорциональная зависимость

Определение

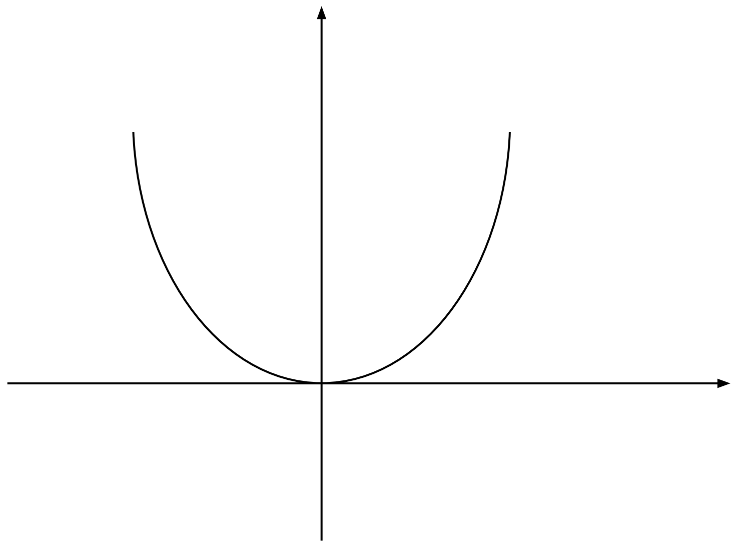
Две переменные величины называются обратно пропорциональными, если при изменении одной из них в некотором отношении, другая изменяется в обратном отношении.

$$y = \frac{k}{x}$$



4. Квадратичная зависимость

Квадратичная зависимость в простейшем случае имеет вид $y = kx^2$, где k – некоторая постоянная величина. График функции – парабола.



5. Синусоидальная зависимость.

При изучении периодических явлений важную роль играет синусоидальная зависимость $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ - функция называется гармоникой.

A – амплитуда;

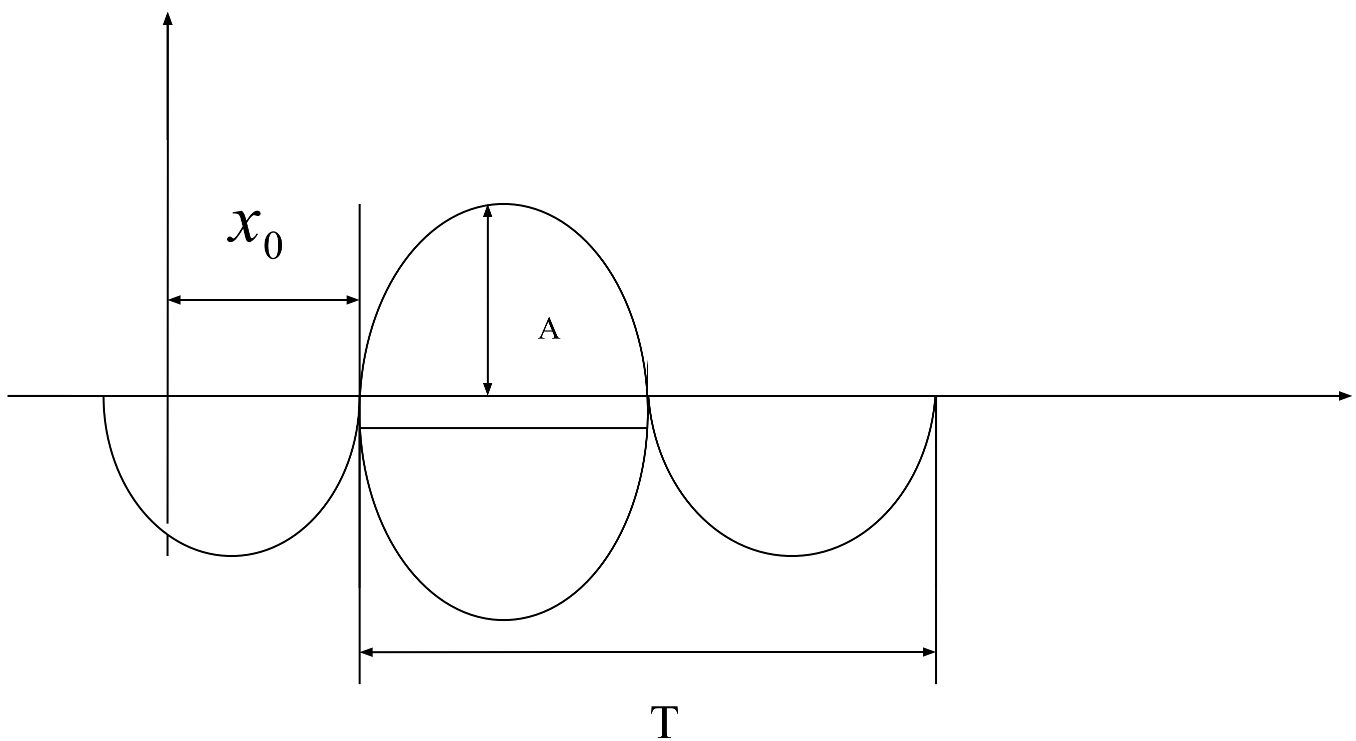
ω - частота;

φ - начальная фаза.

Функция периодическая с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Значения функции в точках x и $x+T$, отличающихся на период, одинаковы.

Функцию можно привести к виду $y = A\sin\omega(x - x_0)$, где $x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$. Отсюда

получаем, что графиком гармоники является деформированная синусоида с амплитудой А периодом Т, сдвинутая по оси ОХ на величину x_0



Способы задания функции

Обычно рассматривают три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

1. Аналитический способ задания функции

Если функция выражена при помощи формулы, то она задана аналитически.

Например $V = \frac{4}{3}\Pi R^3$

Если функция *y=f(x)* задана формулой, то ее характеристика *f* обозначает ту совокупность действий, которую нужно в определенном порядке произвести над значением аргумента *x*, чтобы получить соответствующее значение функции.

Пример $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Выполняется три действия над значением аргумента.

2. Табличный способ задания функции

Этот способ устанавливает соответствие между переменными с помощью таблицы. Зная аналитическое выражение функции, можно представить эту функцию для интересующих нас значений аргумента при помощи таблицы.

Можно ли от табличного задания функции перейти к аналитическому выражению?

Заметим, что таблица дает не все значения функции, причем промежуточные значения функции могут быть найдены лишь приближенно. Это, так называемое интерполирование функции. Поэтому, в общем случае найти точное аналитическое выражение функции по табличным данным нельзя. Однако всегда можно построить формулу, и при том не одну, которая для значений аргумента, имеющихся в таблице, будет давать соответствующие табличные значения функции. Такого рода формула называется интерполяционной.

3. Графический способ задания функции

Аналитический и табличный способы не дают наглядного представления о функции.

Этого недостатка лишен графический способ задания функции $y=f(x)$, когда соответствие между аргументом x и функцией y устанавливается с помощью графика.

Понятие неявной функции

Функция называется явной, если она задана формулой, правая часть которой не содержит зависимой переменной.

Функция y от аргумента x называется неявной, если она задана уравнением

$F(x,y)=0$ (1) неразрешенным относительно зависимой переменной.

Пример. $\ln y + y\sin(x+y) = 0$

Понятие обратной функции

Пусть задана функция $y=f(x)$ (1). Задавая значения аргумента x, получаем значения функции y.

Можно, считая y аргументом, а x – функцией, задавать значения y и получать значения x. В таком случае уравнение (1) будет определять x, как неявную функцию от y. Эта последняя функция называется <u>обратной</u> по отношению к данной функции y.

Предполагая, что уравнение (1) разрешено относительно x, получаем явное выражение обратной функции

$x=\varphi(y)$ (2), где функция $\varphi(y)$ для всех допустимых значений y удовлетворяет условию

$$f[\varphi(y)] = y$$

Пример

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$

<u>Замечание</u>

Обратная функция однозначной функции может быть многозначной, то есть данному значению y может соответствовать несколько значений $x_1, x_2, \ldots$ обратной функции .

Например, тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции. Или - двузначная.

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

Классификация функций одного аргумента

Принята следующая классификация:

1. Целая рациональная функция или многочлен

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

Над аргументом выполняются действия: сложение, вычитание, умножение, возведение в целую положительную степень.

2. Дробно-рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n}$$

1) и 2) – класс рациональных функций.

3. Иррациональная функция

Над аргументом x помимо вышеперечисленных операций производится операция извлечения корня конечное число паз и при этом результат не является рациональной функцией.

Пример
$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{5x^2 + 4x - 7}{3x^3 - 8x + 4}} + \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^5$$

Совокупность рациональных и иррациональных функций образует класс <u>явных алгебраических функций</u>

4. Многозначная неявная функция

Это - более общий случай алгебраических функций

$$P_0(x) y^n + P_1(x) y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x) y + P_n(x) = 0$$

, где n – целое положительное число

$P_0(x), P_1(x), \dots$ - целые рациональные функции от x.

Пример
$$y^5 + xy^3 - x^2 + x = 0$$

5. Трансцендентные функции

Всякая неалгебраическая функция называется трансцендентной.

Элементарные трансцендентные функции:

a) показательная $a^x, a>0, a\neq 1$

b) логарифмическая функция $\log_a x, x>0, a>0, a\neq 1$

c) тригонометрические функции *sinx, cosx, tgx, ctgx;*

d) обратные тригонометрические функции *arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx.*

Предел функции

В математическом анализе, как правило, рассматриваются безразмерные величины, то есть величины, лишенные физического содержания. Совокупность значений таких величин представляют собой некоторые числовые множества.

Формализуем определение функции.

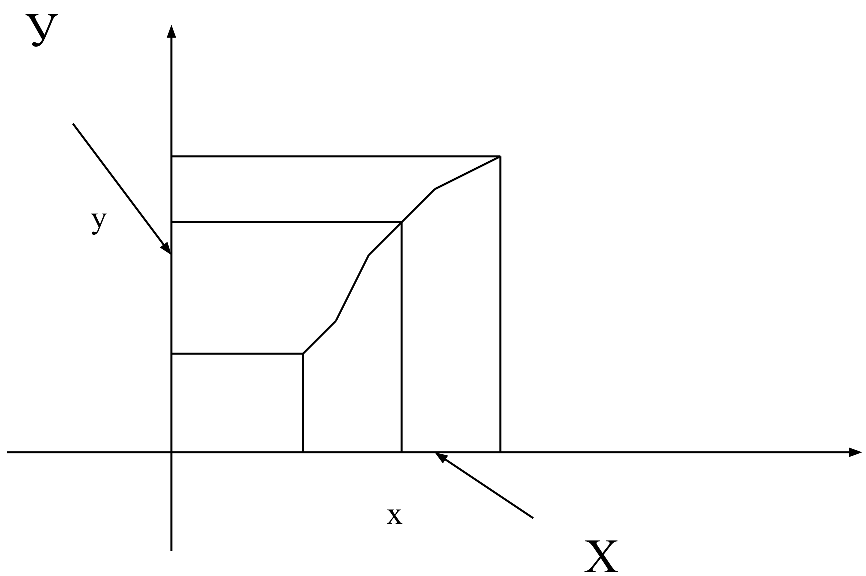
Определение 1

Пусть X и Y – данные числовые множества. Если в силу некоторого соответствия f, сопоставляющего элементам множества X элементы множества Y, $\forall x\in X \Rightarrow \exists y\in Y$ (единственный), то y называется функцией от x, определенной на множестве Y.

Обозначение *y=f(x)* $(x\in X)$ (1)

Множество значений функции (1), по смыслу определения, содержится в Y, то есть $\{f(x)\}\subset Y$. Можно сказать, что функция f отображает множество X в множество Y.

Графическая интерпретация.



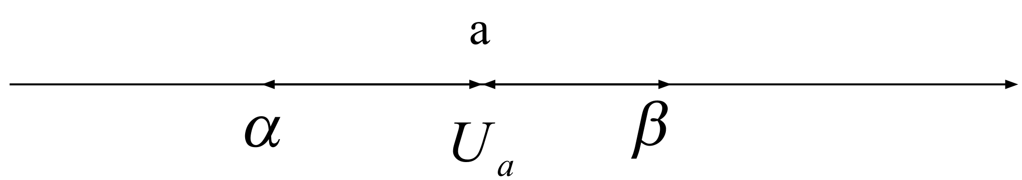
Пример *f(x)=sinx* $(0 < x < 2\pi)$ отображает интервал на отрезок [-1,1].

Пусть между элементами множеств *X* и *Y* функция *y=f(x)* устанавливает взаимнооднозначное соответствие, то есть $\forall x \in X$ существует один и только один его образ $y = f(x) \in Y$ и обратно, $\forall y \in Y$ найдется единственный прообраз $x \in X$ такой, что *f(x)=y*. Тогда функция $x = f^{-1}(y), y \in Y$, устанавливающая соответствие между элементами множеств *Y* и *X* называется обратной для функции *y=f(x)*. Иными словами обратная функция $x = f^{-1}(y), y \in Y$ является отображением множества *Y* на множество *X*.

y=f(x) и $x = f^{-1}(y), y \in Y$ – взаимно обратные.

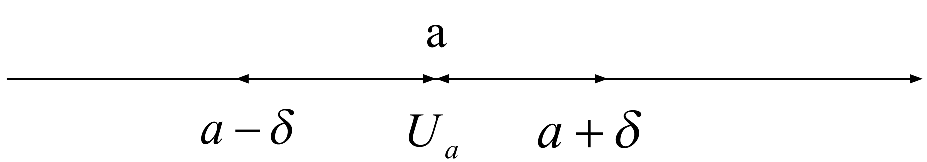
<u>Определение 2</u>

Под окрестностью U_a точки *a* (*a* – действительное число) будем понимать любой интервал $\alpha < x < \beta$, окружающий эту точку $(\alpha < a < \beta)$, из которого удалена точка *a*.



Под окрестностью U_∞ символа $\infty = \pm\infty$ понимается внешняя часть любого отрезка $[\alpha, \beta]$, то есть $U_\infty = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$

Для положительного числа δ окрестность U_a некоторой конечной точки *a* назовем ее δ - окрестностью, если $U_a = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, то есть, если $\forall x \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta$



Пусть функция f(x) задана на множестве X. Точка *a* называется <u>предельной точкой</u> (точкой накопления) этого множества, если в любой ее δ - окрестности содержится бесконечно много элементов $x \in X$, то есть $U_a \cap X \neq \varnothing, \forall U_a$.

Определение 3

Число A называется пределом функции f(x) при $x \to a$, то есть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$ окрестность $U_a = \{X \mid 0 < |x-a| < \delta\}, (\delta = \delta(\varepsilon))$, что $|f(x)-A| < \varepsilon$ при $x \in U_a$ (2)

Неравенство (2) должно выполняться для всех тех *x*, для которых определена функция *f(x)*, то есть для $x \in X \cap U_a$; согласно определению предельной точки в каждой окрестности U_a множество таких точек не пусто.

Замечание 1

По смыслу определения предела функции, числа $\varepsilon, \delta = \delta(\varepsilon)$ можно полагать достаточно малыми.

Определение 4

Утверждение $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ (3) эквивалентно следующему $|f(x)-A| < \varepsilon$ при $|x| > \Delta, \Delta = \Delta(\varepsilon)$

Множество всех точек *x*, для которых $|x| > \Delta, \Delta = \Delta(\varepsilon)$, очевидно, является симметричной окрестностью U_∞ символа $\infty = \pm\infty$; при этом предполагается, что для любой точки окрестности $U_\infty \cap X \neq \varnothing, \forall U_\infty$, условно можно сказать, что ∞ - есть предел множества *X* – области определения функции *f(x)*.

Объединяя определения 3 и 4 получим общее определение предела функции при $x \to a$, которое справедливо как для конечного значения *a*, так и для $a = \infty$.

Общее определение предела функции

Пусть *f(x)* – функция, определенная на множестве *X*, и *a* – предельная точка этого множества. Число *A* является пределом функции *f(x)* при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$ - окрестность U_a, что $|f(x)-A| < \varepsilon$ при $x \in U_a \cap X \neq \varnothing$ (4).

Короткая запись $\lim_{x\to a} f(x) = A$ (5) или $f(x) \to A$ при $x \to a$ (5').

Теорема 1

Если функция *f(x)=c* постоянна в некоторой окрестности точки a, то $\lim_{x\to a} f(x) = c$, причем c является единственным пределом этой функции при $x \to a$.

Определение 5

Функция *f(x)* называется ограниченной на данном множестве *X,* если существует такое положительное число *M*, что $|f(x)| \le M$ при $x \in X$ (6). Если такого числа *M* нет, то функция f(x) называется неограниченной.

Лемма

Функция *f(x),* имеющая предел *A* при $x \to a$, ограничена в некоторой окрестности точки *a*.

Доказательство

Пусть $\varepsilon = 1 \Rightarrow |f(x) - a| < 1$ при $x \in X \cap U_a$, где U_a - соответствующая окрестность точки *a*. Отсюда для всех допустимых значений аргумента *x* получаем $|f(x)| = |[f(x0 - A] + a| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| = M$, если только $x \in X \cap U_a$.

Отметим еще одну теорему, устанавливающую связь между границами функции и ее пределом.

Теорема 2

Пусть существует $\lim_{x \to a} f(x) = A$ и *M<f(x)<N* (7) в некоторой окрестности U_a точки *a*. Тогда $M \le A \le N$ (8).

Доказательство

Пусть *A<M*. Полагая $\varepsilon = M - A > 0$, в некоторой окрестности V_a будем иметь *|f(x)-A|<M-A*, то есть *–(M-A)<f(x)<M-A*. Отсюда, выбирая $x \in V_a \cap U_a$, получаем, что *f(x)<M*, что противоречит левому неравенству (7). Аналогично опровергается предположение *A>N*. Таким образом, неравенство (8) доказано.

Следствие

Положительная функция не может иметь отрицательного предела.

Односторонние пределы функции

В приложениях математического анализа встречаются так называемые односторонние пределы.

Введем понятия левой и правой окрестностей точки a (a – число).

Определение 1

1) любой интервал $U_a^- = (\alpha, a)$ правым концом которого является точка а, называется ее <u>левой</u> окрестностью.

2) любой интервал $U_a^+ = (a, \beta)$ левым концом которого является точка а, называется ее <u>правой</u> окрестностью.

Запись $x \to a - 0$ означает, что x принимает лишь значения, принадлежащие некоторой левой окрестности точки a, то есть $x \to a, x < a$

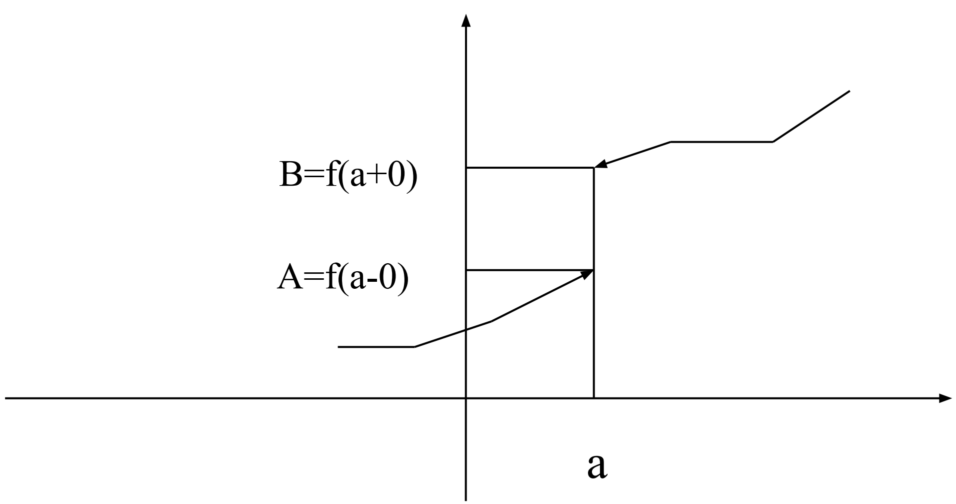
Запись $x \to a + 0$ означает, что x принимает лишь значения, принадлежащие некоторой правой окрестности точки a, то есть $x \to a, x > a$

Определение 2

1) Формула $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$, где функция $f(x)$ определена на множестве X и a – предельная точка этого множества, а A – число, обозначает, что $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$, такая, что $|f(x)-A| < \varepsilon$ при $x \in U_a^- \cap X \neq \varnothing$ (1)

2) Формула $\lim_{x \to a+0} f(x) = B$, где функция $f(x)$ определена на множестве X и a – предельная точка этого множества, а B – число, обозначает, что $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$, такая, что $|f(x)-B| < \varepsilon$ при $x \in U_a^+ \cap X \neq \varnothing$ (2)

Для чисел A и B используется следующая символическая запись $A=f(a-0)$, $B=f(a+0)$



Определение 3

Под окрестностью символа $-\infty$ понимается любой интервал $(-\infty,\alpha)$, и под окрестностью символа $+\infty$ понимается любой интервал $(\beta,+\infty)$

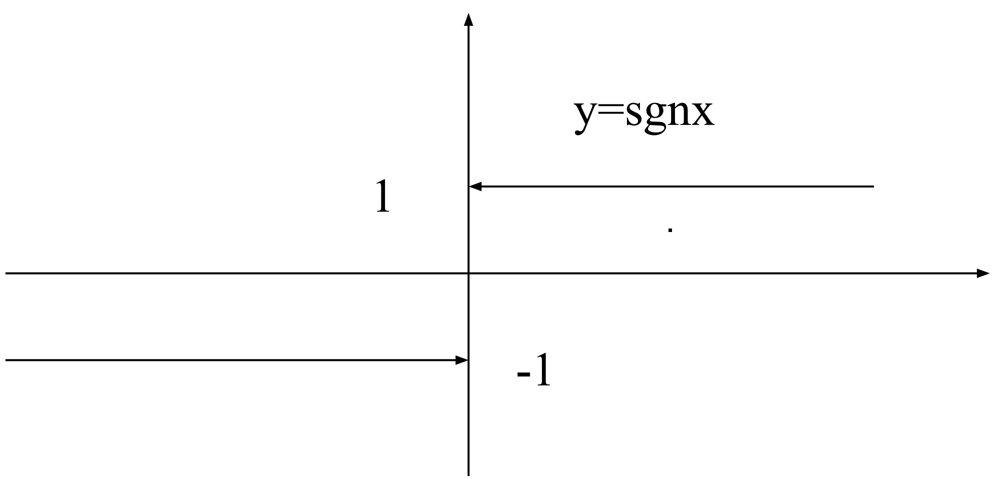
Формулы

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A'$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = B'$ (3) интерпретируются таки образом

$|f(x)-A'|<\varepsilon, x\in(-\infty,\Delta_1)$ и $|f(x)-B'|<\varepsilon, x\in(\Delta_2,+\infty)$, где ε - произвольно, $x\in X$ и $\Delta_i=\Delta_i(\varepsilon),(i=1,2)$

Пример $f(x)=\operatorname{sgn} x=\dfrac{x}{|x|},(x\neq 0)$

Имеем $\lim_{x\to-0} f(x)=-1$ и $\lim_{x\to+0} f(x)=1$



Замечание

Для существования предела функции *f(x)* при $x\to a$ (a - число) необходимо и достаточно выполнение равенства *f(a-0)=f(a+0)*.

Бесконечно малые функции

Определение

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (a – вещественное число или символ ∞), если $\forall \varepsilon > 0, \exists U_a$, что $|\alpha(x)| < \varepsilon, x \in U_a$. (1)

Это эквивалентно $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ (2) или $\alpha(x) \to 0, x \to a$ (3).

Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x \to a - 0$, $x \to a + 0$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Замечание

Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$ (4), то в силу определения предела функции получаем, что *f(x)-A* – бесконечно малая функция. Таким образом, из (4) получаем представление функции f(x), имеющей предел *A* при $x \to a$ в виде

$f(x) = A + \alpha(x)$ (5), где $\alpha(x) \to 0, x \to a$.

Обратно, если для функции *f(x)* справедлива формула (5), то число *A* является пределом функции при $x \to a$. Из формулы (5) вытекает важная лемма о сохранении знака функции.

Лемма

Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, то в некоторой окрестности U_a знак функции *f(x)* совпадает со знаком числа *A*.

Действительно, пусть $\varepsilon = |A| > 0$. Выбирая окрестность U_a так, чтобы $|\alpha(x)| < A$ при $x \in U_a$ в силу равенства (5) будем иметь

$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$, где $x \in U_a \cap X$.

Sgn x=+1, при x>0

Sgn 0=0

Sgn x=-1, при x<0

Замечание Функция $f(x) = 0$ в некоторой окрестности U_a по смыслу определения (1) является бесконечно малой при $x \to a$.

Бесконечно большие функции

Определение

Функция *f(x)* называется бесконечно большой при $x \to a$ (*a* – число или символ ∞)

$f(x) \to \infty$ при $x \to a$ (1), если для $\forall E > 0 \Rightarrow \exists U_a$ точки а, что $|f(x)|>E$ при $x \in U_a$ (2) для всех допустимых значений аргумента *x*.

Если функция f(x) - бесконечно большая при $x \to a$, то условно пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad (3)$$

Пример $tgx \to \infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$

Записи $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ соответственно означают $f(x) < -E$ при $x \in U_a$ и $f(x) > E$ при $x \in U_a$.

Лемма

1. Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$
2. Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\frac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to a$

Основные теоремы о бесконечно малых функциях

Теорема 1

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство

Для простоты ограничимся тремя функциями $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0, \gamma(x) \to 0$ при $x \to a$.

Рассмотрим их алгебраическую сумму $\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3} > 0$. В силу определения бесконечно малой функции существуют три, характеризуемые $\frac{\varepsilon}{3}$ окрестности $U_a^{'}, U_a^{''}, U_a^{'''}$, такие что

$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in U_a^{'}$ (1) $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in U_a^{''}$ (2) $|\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in U_a^{'''}$ (3)

$U_a = U_a^{'} \cap U_a^{''} \cap U_a^{'''}$ представляет окрестность точки а, в которой одновременно будут выполнены неравенства (1),(2),(3). Таким образом,

$$\alpha(x) + \beta(x) - \gamma(x) \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |-\gamma(x)| = |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

если $x \in U_a \cap X$. Теорема доказана.

В частности разность двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Определение

Функция *f(x)* ограничена при $x \to a$, если она ограничена в некоторой окрестности U_a.

Теорема 2

Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую при функцию, есть функция бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство

Пусть при , где - некоторая окрестность точки *a* и при . Тогда , что при $x \to a$ Отсюда имеем , если Таким образом, при $x \to a$.

Доказательство

Пусть $|f(x)| \le M$ при $x \in V_a$, где V_a - некоторая окрестность точки a и $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists U_a \subset V_a$, что $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ при $x \in U_a$. Отсюда имеем

$|f(x) \cdot \alpha(x)| + |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, если $x \in U_a$. Таким образом, $f(x) \cdot \alpha(x) \to 0$ при $x \to a$

Теорема 3

Произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство

1) Рассмотрим сначала две функции $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0$ при $x \to a$. Полагая $0 < \varepsilon < 1$ и рассуждая также как в теореме 1, можно сказать, что $\exists U_a$, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$ и $|\beta(x)| < \varepsilon$ при $x \in U_a$. Отсюда $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon \cdot \varepsilon < \varepsilon$, если $x \in U_a$. Следовательно, $\alpha(x) \cdot \beta(x) \to 0$ при $x \to a$.

2) Если имеем три функции $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0, \gamma(x) \to 0$ при $x \to a$, то, используя первую часть доказательства, имеем $\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot \gamma(x) = [\alpha(x) \cdot \beta(x)] \cdot \gamma(x) \to 0$ при $x \to a$

Следствие

Целая положительная степень $[\alpha(x)]^n$ бесконечно малой функции $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ есть бесконечно малая функция.

Замечание

Отношение двух бесконечно малых функций $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0$ при $x \to a$ может быть функцией произвольного поведения.

Пример

$$\alpha(x) = x; \beta(x) = 2x + x^2; \gamma(x) = x^2$$

$\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0, \gamma(x) \to 0$ при $x \to 0$

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2 + x \to 2\ ; \quad \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = x \to 0\ ; \quad \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \frac{1}{x} \to \infty\ .$$

С помощью действия деления можно сравнивать между собой бесконечно малые.

Определение 1

Две бесконечно малые функции $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0$ при $x \to a$ имеют одинаковый порядок при $x \to a$, если их отношение имеет конечный предел, отличный от нуля, то есть

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0$$

Определение 2

При $x \to a$ порядок бесконечно малой функции $\beta(x)$ выше порядка бесконечно малой функции $\alpha(x)$, если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$, то есть $\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. В этом случае пишут $\beta(x) = O[\alpha(x)]$ при $x \to a$

Определение 3

При $x \to a$ бесконечно малая функция $\beta(x)$ имеет порядок *n* (*n* – натуральное число) относительно бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha^n(x)} = k \neq 0$$