

# ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

## ЛЕКЦИЯ 11

### 3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ.



# 3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. Определение выпуклой функции. Примеры.



3.2. Действия с выпуклыми функциями.



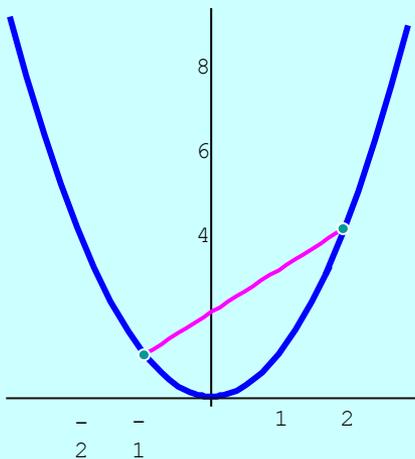
### 3.1. Определение выпуклой функции. Примеры.

**Определение 1.** Функция  $I:U \rightarrow R^1$ , где  $U \subset R^n$  выпуклое множество, называется выпуклой на этом множестве, если

$$I(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v), \quad \forall u, v \in U, \alpha \in [0,1]. \quad (1)$$

В случае, когда при  $u \neq v$  равенство в (1) возможно только для  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ , функцию  $I$  называют строго выпуклой.

**Определение 2.** Функцию  $I$  называют вогнутой (строго вогнутой) на выпуклом множестве  $U$ , если функция  $-I$  выпукла (строго выпукла) на множестве  $U$ .



По определению полагается, что если множество  $U$  одноточечное или пустое, то функция  $I$  выпукла на этом множестве. Если не оговорено противное, то рассматриваемые функции всюду принимают конечные значения. Геометрический смысл данного определения

состоит в том, что секущая, соединяющая любые две точки графика выпуклой функции, располагается не ниже графика этой функции.

**Пример 1.** Функция  $I : R^n \rightarrow R^1$ , определенная формулой  $I(u) = \|u\|$ , выпукла.

Действительно, при всех  $u, v \in R^n, \alpha \in [0,1]$  имеем

$$I(\alpha u + (1-\alpha)v) = \|\alpha u + (1-\alpha)v\| \leq \alpha \|u\| + (1-\alpha)\|v\| = \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v).$$

**Пример 2.** Функция  $I : R^n \rightarrow R^1$ , определенная формулой  $I(u) = \langle c, u \rangle, c \in R^n$ , выпукла. Действительно, при всех  $u, v \in R^n, \alpha \in [0,1]$  имеем

$$\begin{aligned} I(\alpha u + (1-\alpha)v) &= \langle c, \alpha u + (1-\alpha)v \rangle = \alpha \langle c, u \rangle + (1-\alpha)\langle c, v \rangle = \\ &= \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется выпуклость функции  $-I$ . Таким образом, в данном примере функция  $I$  выпукла и вогнута одновременно.

**Пример 3.** Функция  $I : R^n \rightarrow R^1$ , определенная формулой  $I(u) = \langle u, u \rangle$ , строго выпукла. Действительно, при всех  $u, v \in R^n, u \neq v$  справедливо неравенство

$$2\langle u, v \rangle < \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Отсюда для любого  $\alpha \in [0,1]$  выводим

$$\begin{aligned} I(\alpha u + (1-\alpha)v) &= \langle \alpha u + (1-\alpha)v, \alpha u + (1-\alpha)v \rangle = \\ &= \alpha^2 \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle \cdot \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 \cdot \langle v, v \rangle < \\ &< \alpha^2 \langle u, u \rangle + [\langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle] \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 \langle v, v \rangle = \\ &= \alpha^2 \langle u, u \rangle + \alpha \langle u, u \rangle - \alpha^2 \langle u, u \rangle + \alpha \langle v, v \rangle - \\ &- \alpha^2 \langle v, v \rangle + \langle v, v \rangle - 2\alpha \langle v, v \rangle + \alpha^2 \langle v, v \rangle = \\ &= \alpha \langle u, u \rangle + \alpha \langle v, v \rangle + \langle v, v \rangle - 2\alpha \langle v, v \rangle = \\ &= \alpha \langle u, u \rangle + (1-\alpha) \langle v, v \rangle = \alpha I(u) + (1-\alpha) I(v), \quad \forall u, v \in R^n, \quad u \neq v, \end{aligned}$$

что и означает строгую выпуклость функции  $I$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $I : U \rightarrow R^1$ , где  $U \subset R^n$  выпуклое множество, выпукла. Тогда для любых

$$u_i \in U, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

имеет место неравенство (Иенсена)

$$I\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i I(u_i). \quad (2)$$

**Доказательство.** Проведем индукцию по числу  $m$ . При  $m = 2$  справедливость неравенства (2) есть следствие определения выпуклости функции. Допустим, что неравенство Иенсена имеет место для всех  $k \leq m - 1, m > 2$ . Примем для определенности, что  $\alpha_m \neq 1$ . Тогда  $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1 - \alpha_m > 0$  и

$$\begin{aligned} I\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) &= I\left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i u_i + \alpha_m u_m\right) = \\ &= I\left(\underbrace{(1 - \alpha_m)}_{>0} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} u_i\right) + \alpha_m u_m\right) = I\left(\underbrace{(1 - \alpha_m)}_{>0} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i u_i\right) + \alpha_m u_m\right) = \\ &= I\left(\underbrace{(1 - \alpha_m)}_{>0} u_* + \alpha_m u_m\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) = I\left((1 - \alpha_m)u_* + \alpha_m u_m\right), \quad u_* = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i u_i, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m}.$$

Заметим, что  $\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, m-1$  и

$$\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i}{1 - \alpha_m} = \frac{1 - \alpha_m}{1 - \alpha_m} = 1.$$

Тогда  $u_* = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i u_i \in U$  и в силу выпуклости функции  $I$  имеет место неравенство

$$I\left(\left(1 - \alpha_m\right)^{\geq 0} u_* + \alpha_m^{\geq 0} u_m\right) \leq (1 - \alpha_m) I\left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i u_i\right) + \alpha_m I(u_m) =$$

*предположение индукции*

$$\leq \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i I(u_i)$$

$$= (1 - \alpha_m) I\left(\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i u_i\right) + \alpha_m I(u_m) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \alpha_m) \left( \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i I(u_i) \right) + \alpha_m I(u_m) = \\
&= (1 - \alpha_m) \left( \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} I(u_i) \right) + \alpha_m I(u_m) = \left( \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i I(u_i) \right) + \alpha_m I(u_m) = \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha_i I(u_i).
\end{aligned}$$

Возвращаясь на начало цепочки, получим

$$I \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i I(u_i).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет свести исследование выпуклости функции многих переменных к исследованию выпуклости функций одной переменной.

**Теорема 2.** Функция  $I:U \rightarrow R^1$ , где  $U \subset R^n$  выпуклое множество,

выпукла тогда и только тогда, когда для любых  $v, w \in U$  функция  $\varphi:[0,1] \rightarrow R^1$ ,

определенная формулой,  $\varphi(\varepsilon) = I(\varepsilon v + (1-\varepsilon)w)$ ,  $\varepsilon \in [0,1]$  выпукла.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть функция  $I$  выпукла на выпуклом множестве  $U$  и  $v, w \in U$ . Для любых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha \in [0,1]$  полагаем

$\varepsilon_\alpha = \alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2$ . Вычисляем

$$\varphi(\varepsilon_\alpha) = I \left( \begin{array}{cc} \alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2 & (1 - (\alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2)) \\ \varepsilon_\alpha & v + (1-\varepsilon_\alpha)w \end{array} \right) =$$

$$= I \left( (\alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2)v + (1 - \alpha\varepsilon_1 - (1-\alpha)\varepsilon_2)w \pm \alpha w \right) =$$

$$= I \left( \alpha\varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v - \alpha\varepsilon_2 v + w - \alpha\varepsilon_1 w - \varepsilon_2 w + \alpha\varepsilon_2 w + \alpha w - \alpha w \right) =$$

$$= I \left( \alpha\varepsilon_1 v - \alpha\varepsilon_1 w + \alpha w + \varepsilon_2 v (1-\alpha) + (1-\alpha)w + \varepsilon_2 w (\alpha-1) \right) =$$

$$= I \left( \alpha (\varepsilon_1 v + w - \varepsilon_1 w) + (1-\alpha) (\varepsilon_2 v - \varepsilon_2 w + w) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= I\left(\alpha(\varepsilon_1 v + w - \varepsilon_1 w) + (1-\alpha)(\varepsilon_2 v - \varepsilon_2 w + w)\right) = \\
&= I\left(\alpha \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{U} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} \\ \varepsilon_1 v + (1-\varepsilon_1)w \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{U} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} \\ \varepsilon_2 v + (1-\varepsilon_2)w \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{выпуклая}}{\leq} \\
&\stackrel{\text{выпуклая}}{\leq} \alpha I(\varepsilon_1 v + (1-\varepsilon_1)w) + (1-\alpha)I(\varepsilon_2 v + (1-\varepsilon_2)w) = \\
&= \alpha\varphi(\varepsilon_1) + (1-\alpha)\varphi(\varepsilon_2) \Rightarrow \\
&\varphi(\alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2) \leq \alpha\varphi(\varepsilon_1) + (1-\alpha)\varphi(\varepsilon_2).
\end{aligned}$$

Необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть для любой пары точек  $u_1, u_2 \in U$  функция  $\varphi$  выпукла.

Тогда для всех  $\alpha \in [0, 1]$  имеем

$$\begin{aligned}
\boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\varphi(\alpha)} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} \\
I(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) &= \varphi\left(\begin{matrix} \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 0 \\ \alpha \end{matrix}\right) = \varphi(\alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 0) \stackrel{\text{неравенство Иенсена}}{\leq} \\
&\stackrel{\text{неравенство Иенсена}}{\leq} \alpha \varphi(\overset{I(u_1)}{1}) + (1-\alpha)\varphi(\overset{I(u_2)}{0}) = \alpha I(u_1) + (1-\alpha)I(u_2).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Упражнение 1.** Доказать выпуклость функции

$$I(u) = (x + y)^2 \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Пусть

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in [0, 1] \Rightarrow$$

Полагаем

$$\varepsilon u + (1 - \varepsilon)v = \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1 - \varepsilon) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon x_1 + (1 - \varepsilon)x_2 \\ \varepsilon y_1 + (1 - \varepsilon)y_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= I(\varepsilon u + (1 - \varepsilon)v) = (\varepsilon x_1 + (1 - \varepsilon)x_2 + \varepsilon y_1 + (1 - \varepsilon)y_2)^2 = \\ &= [\varepsilon x_1 + x_2 - \varepsilon x_2 + \varepsilon y_1 + y_2 - \varepsilon y_2]^2 = \\ &= [(\varepsilon(x_1 - x_2 + y_1 - y_2) + x_2 + y_2)]^2 = \end{aligned}$$

$$= \left[ \begin{array}{c} \boxed{x_1 - x_2 + y_1 - y_2} \boxed{a} \boxed{\varepsilon} + \boxed{x_2 + y_2} \boxed{b} \boxed{\varepsilon} \\ \end{array} \right]^2 = \overset{\geq 0}{a^2 \cdot \varepsilon^2 + 2ab \cdot \varepsilon + b^2} = \varphi(\varepsilon).$$

Функция  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$  представляет собой параболу ветвями вверх и поэтому она выпукла. По **теореме 2** будет выпуклой и исходная функция

$$I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$



**3.2. Действия с выпуклыми функциями.** Рассмотрим некоторые операции над выпуклыми функциями, сохраняющие их выпуклость.

**Теорема 3.** Пусть функции  $I_i : U \rightarrow R^1$ , где  $U \subset R^n$  выпуклое множество, выпуклы и  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ . Тогда функция  $I : U \rightarrow R^1$ , определенная формулой

$$I(u) = \sum_{i=1}^m \lambda_i I_i(u), u \in U,$$

выпукла.

**Доказательство.** Для любых  $u, v \in U, \alpha \in [0, 1]$  имеем

$$\begin{aligned} & I(\alpha u + (1-\alpha)v) = \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i I_i(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i [\alpha I_i(u) + (1-\alpha)I_i(v)] = \\ &= \alpha \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i I_i(u) \right) + (1-\alpha) \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i I_i(v) \right) = \alpha I(u) + (1-\alpha) I(v). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Пусть функции  $I_i : U \rightarrow R^1, i = 1, \dots, m$ , где  $U \subset R^n$

выпуклое множество, выпуклы. Тогда функция  $I : U \rightarrow R^1$ , определенная формулой

$$I(u) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{I_i(u)\}, u \in U,$$

выпукла.

**Доказательство.** Для любых  $u, v \in U, \alpha \in [0, 1]$  имеем

$$I(\alpha u + (1 - \alpha)v) = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \alpha I_i(u) + (1 - \alpha) I_i(v) \right\} \leq$$

$$\leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{ \alpha I_i(u) + (1 - \alpha) I_i(v) \} \leq$$

$$\leq \alpha \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{I_i(u)\} + (1 - \alpha) \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{I_i(v)\} = \alpha I(u) + (1 - \alpha) I(v).$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности следует, что функция  $g^+ : U \rightarrow R^1$ , определенная на выпуклом множестве  $U \subset R^n$  равенством

$$g^+(u) = \max \{g(u), 0\}, u \in U,$$

где  $g : U \rightarrow R^1$ , выпукла на множестве  $U$ , если на этом же множестве выпукла функция  $g$ .

**Теорема 5.** Пусть функция  $\varphi : [a, b] \rightarrow R^1$  выпуклая и неубывающая, а функция  $g : U \rightarrow [a, b]$ , где множество  $U \subset R^n$  выпуклое, выпуклая на этом множестве. Тогда функция  $I : U \rightarrow R^1$ , определенная равенством  $I(u) = \varphi(g(u))$ ,  $u \in U$ , выпукла на множестве  $U$ .

**Доказательство.** Для любых  $u, v \in U$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  имеем

$$I(\alpha u + (1-\alpha)v) = \varphi \left( \begin{array}{c} \text{выпуклость } g \\ \alpha g(u) + (1-\alpha)g(v) \\ \boxed{\alpha g(u) + (1-\alpha)g(v)} \\ g(\alpha u + (1-\alpha)v) \end{array} \right) \stackrel{\text{монотонность } \varphi}{\leq} \varphi(\alpha g(u) + (1-\alpha)g(v)) \leq$$

$$\stackrel{\text{выпуклость } \varphi}{\leq} \alpha \varphi(g(u)) + (1-\alpha)\varphi(g(v)) = \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v).$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть функция  $g : U \rightarrow [a, b]$  выпукла и неотрицательна на выпуклом множестве  $U \subset R^n$ . Тогда функция  $I : U \rightarrow R^1$ , определенная равенством

$$I(u) = g^p(u), u \in U, p \geq 1$$

выпукла на множестве  $U$ .

**Доказательство.** Функция  $\varphi(g) = g^p, g \geq 0, p \geq 1$  – является выпуклой и монотонной.

**Следствие 2.** Пусть функция  $g : U \rightarrow [a, b]$  выпукла на выпуклом множестве  $U \subset R^n$ . Тогда функция  $I : U \rightarrow R^1$ , определенная равенством

$$I(u) = \left( \max \{0, g(u)\} \right)^p = \left( g^+(u) \right)^p, u \in U, p \geq 1$$

выпукла на множестве  $U$ .

**Доказательство.** Функция  $g^+(u) = \max \{0, g(u)\}$  является выпуклой и положительной на множестве  $U$ , если функция  $g$  – выпуклая. Справедливость доказываемого утверждения следует теперь из предыдущего следствия.

