Глава 5. Теория двойственности

5.1. Симметричные двойственные задачи

1

Двойственные задачи

Прямая задача

$$\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

$$\begin{array}{lllll} L(\vec{X}) = & c_1x_1 + & \ldots & +c_nx_n & \to \max \\ & a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n & \leqslant b_1, \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & a_{m1}x_1 + & \cdots & +a_{mn}x_n & \leqslant b_m, \\ & x_1, \ldots, x_n \geqslant 0. & & & \end{array}$$

Двойственная задача

$$\vec{Y} = (y_1, \ldots, y_m)^T$$

$$\begin{array}{lllll} M(\vec{Y}) = & b_1y_1 + & \ldots & +b_my_m & \to \min, \\ & a_{11}y_1 + & \cdots & +a_{m1}y_m & \geqslant c_1, \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & a_{1n}y_1 + & \cdots & +a_{mn}y_m & \geqslant c_n, \\ & y_1, \ldots, y_m \geqslant 0. & & & \end{array}$$

1

Двойственные задачи

<u>Четыре зеркальности:</u>

1. Число переменных прямой задачи равно числу ограничений двойственной и наоборот, матрица условий транспонирована.

2. Вектор стоимостей прямой задачи равен вектору ограничений двойственной и наоборот.

3. Направления оптимизации противоположны.

4. Знаки неравенств ограничений противоположны..

Прямая задача:	**Двойственная задача:**
$L(\vec{X}) = \vec{c}^T\vec{X} \to \max,$	$M(\vec{Y}) = \vec{b}^T\vec{Y} \to \min,$
$A\vec{X} \leqslant \vec{b},$	$A^T\vec{Y} \geqslant \vec{c},$
$\vec{X} \geqslant \vec{0}.$	$\vec{Y} \geqslant \vec{0}.$

5.2. Несимметричные двойственные задачи

$$\begin{aligned} L(\vec{X}) = \quad & \vec{c}^T \vec{X} \to \min, \\ & A\vec{X} = \vec{b}, \\ & \vec{X} \geqslant \vec{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\vec{Y}) = \quad & \vec{b}^T \vec{Y} \to \max, \\ & A^T \vec{Y} \; ? \; \vec{c}, \\ & \vec{Y} \; ? \; 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\vec{X} \quad & \geqslant \vec{b}, \\ -A\vec{X} \quad & \geqslant -\vec{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \vec{X} \geqslant \begin{pmatrix} \vec{b} \\ -\vec{b} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \vec{Y}_1 \\ \vec{Y}_2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ -\vec{b} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{Y}_1 \\ \vec{Y}_2 \end{pmatrix} = \vec{b}^T \vec{Y}_1 - \vec{b}^T \vec{Y}_2 = \vec{b}^T (\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2) \to \max;$$

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{Y}_1 \\ \vec{Y}_2 \end{pmatrix} = A^T \vec{Y}_1 - A^T \vec{Y}_2 = A^T (\vec{Y}_1 - \vec{Y}_2) \leqslant \vec{c},$$

$$\vec{Y}_1, \vec{Y}_2 \geqslant \vec{0}. \quad \vec{Y} = \vec{Y}_1 - \vec{Y}_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} M(\vec{Y}) = \quad & \vec{b}^T \vec{Y} \to \max, \\ & A^T \vec{Y} \leqslant \vec{c}, \\ & \vec{Y} \text{ – любое}, \end{aligned}}$$

5.3. Первая теорема двойственности

Прямая задача:

$L(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{c}^T \overrightarrow{X} \to \min$

$A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{b}$,

$\overrightarrow{X} \geqslant 0$.

Двойственная задача:

$M(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{b}^T \overrightarrow{Y} \to \max$

$A^T\overrightarrow{Y} \leqslant \overrightarrow{c}$,

$\overrightarrow{Y}$ - любое.

Т е о р е м а.

I. Если одна из задач двойственной пары имеет решение, то и вторая имеет решение, при этом экстремальные значения целевых функций равны:

$$L(\overrightarrow{X}^\star) = M(\overrightarrow{Y}^\star).$$

II. Если одна не имеет решения по причине неограниченности целевой функции, то вторая также не имеет решения по причине противоречивости условий, и наоборот.

Доказательство (конструктивное)

1

Пусть первая задача имеет решение, и мы нашли это решение симплексным методом. Пусть заключительный базис, соответствующий оптимальному плану, есть $B = (\overrightarrow{P}_1, \ldots, \overrightarrow{P}_m)$ Заключительная симплексная таблица имеет следующую структуру.

План	$\overrightarrow{P}_1$	$\overrightarrow{P}_2$	$\cdots$	$\overrightarrow{P}_n$
$\overrightarrow{X}^*$	$\overrightarrow{P}'_1$	$\overrightarrow{P}'_2$	$\cdots$	$\overrightarrow{P}'_n$
L*	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{X}^* &\text{ – урезанный до } m \text{ компонент оптимальный план;}\\
\overrightarrow{c}_0 &\text{ – соответственно урезанный вектор стоимостей;}\\
L^* = \overrightarrow{c}_0^T \overrightarrow{X}^* &\text{ – оптимальное значение целевой функции;} \qquad (1)\\
\overrightarrow{P}'_j &\text{ – преобразованный вектор } \overrightarrow{P}_j
\end{aligned}
$$

1

Доказательство

С алгебраической точки зрения симплексный метод эквивалентен переходу от начального единичного базиса $I = (\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_m)$ к заключительному оптимальному базису $B = (\overrightarrow{P}_1, \ldots, \overrightarrow{P}_m)$.

При этом по формулам преобразования базиса

$$\overrightarrow{X}^* = B^{-1}\overrightarrow{b}, \tag{2}$$

$$\overrightarrow{P}'_j = B^{-1}\overrightarrow{P}_j. \tag{3}$$

Тогда эквивалентная стоимость вектора $\overrightarrow{P}_j$ в оптимальном базисе z_j равна

$$z_j = \overrightarrow{c}_0^T \overrightarrow{P}'_j = \overrightarrow{c}_0^T B^{-1}\overrightarrow{P}_j$$

Так как матрица условий $A = (\overrightarrow{P}_1, \ldots, \overrightarrow{P}_n)$, то, собирая z_j в вектор-строку $\overrightarrow{Z}^T$, получаем

$$\overrightarrow{Z}^T = (z_1, \ldots, z_n) = \overrightarrow{c}_0^T B^{-1}(\overrightarrow{P}_1, \ldots, \overrightarrow{P}_n) = \overrightarrow{c}_0^T B^{-1} A \tag{4}$$

1

Доказательство

Поскольку заключительный план оптимальный, то элементы управляющей строки $z_j - c_j \leqslant 0$, т. е. $\overrightarrow{Z}^T \leqslant \overrightarrow{c}^T$.

Подставляя $\overrightarrow{Z}^T$ из (4), получаем:

$$\overrightarrow{c}_0^T B^{-1} A \leqslant \overrightarrow{c}^T. \tag{5}$$

Главная и конструктивная часть доказательства состоит в том, что мы предполагаем, что оптимальный план двойственной задачи $\overrightarrow{Y}^*$ нам известен:

$$\boxed{\overrightarrow{Y}^* = (B^{-1})^T \overrightarrow{c}_0.} \tag{6}$$

Докажем, что это действительно так и что теорема справедлива, т. е.

а) $\overrightarrow{Y}^*$ – план,

б) $\overrightarrow{Y}^*$ – оптимальный план, т. е. для любого плана $\overrightarrow{Y}$ $M(\overrightarrow{Y}^*) \geqslant M(\overrightarrow{Y})$,

в) $M(\overrightarrow{Y}^*) = L(\overrightarrow{X}^*)$.

1

Доказательство

Для доказательства а) подставляем план (6) в двойственные условия:

$$\underline{A^T\overrightarrow{Y}^*} = A^T(B^{-1})^T\overrightarrow{c}_0 = [[A^T(B^{-1})^T\overrightarrow{c}_0]^T]^T =$$
$$= [\overrightarrow{c}_0^T B^{-1}A]^T = [\text{учитывая } (5)] \underline{\leqslant} [\overrightarrow{c}^T]^T = \underline{\overrightarrow{c}}. \qquad (7)$$

Для доказательства б) и в) рассмотрим скалярное выражение $\overrightarrow{Y}^T A\overrightarrow{X}$. С одной стороны, если $\overrightarrow{X}$ – план и для него $A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{b}$, то

$$\underline{\overrightarrow{Y}^T A\overrightarrow{X}} = \overrightarrow{Y}^T\overrightarrow{b} = \underline{M(\overrightarrow{Y})}.$$

С другой стороны, если $\overrightarrow{Y}$ – план и для него $A^T\overrightarrow{Y} \leqslant \overrightarrow{c}$, то

$$\underline{\overrightarrow{Y}^T A\overrightarrow{X}} = [\text{это скаляр}] = \overrightarrow{X}^T A^T\overrightarrow{Y} \underline{\leqslant} X^T\overrightarrow{c} = \underline{L(\overrightarrow{X})}.$$

То есть для любых планов $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{Y}$ $\quad L(\overrightarrow{X}) \geqslant M(\overrightarrow{Y})$.

1

Доказательство

Но

$$M(\overrightarrow{Y}^*) = \overrightarrow{b}^T \overrightarrow{Y}^* = [\text{подставляем из } (6)] = \overrightarrow{b}^T (B^{-1})^T \overrightarrow{c}_0 =$$

$$= [\text{транспонируем скаляр}] = \overrightarrow{c}_0^T B^{-1} \overrightarrow{b} = [\text{с учетом } (2)] =$$

$$= \overrightarrow{c}_0^T \overrightarrow{X}^* = L(\overrightarrow{X}^*).$$

Таким образом, первая часть теоремы полностью доказана.

Для доказательства второй части предположим, что прямая задача двойственной пары не имеет решения из-за неограниченности целевой функции, т. е. Ł$(\overrightarrow{X}^*) = -\infty$.

Тогда для всех планов двойственной задачи $M(\overrightarrow{Y}) \leqslant -\infty$, что невозможно.

2

Обращение первой теоремы двойственности

Если для некоторых планов прямой и двойственной задачи

$$L(\overrightarrow{X}) = M(\overrightarrow{Y}),$$

то эти планы – оптимальные.

Доказательство. Ранее было показано, что для любых планов $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{Y}$ $\quad L(\overrightarrow{X}) \geqslant M(\overrightarrow{Y})$.

3 Автоматическое решение двойственной задачи

Теорема дает возможность найти оптимальный план двойственной задачи, не решая ее. Этот план спрятан в заключительной симплексной таблице.

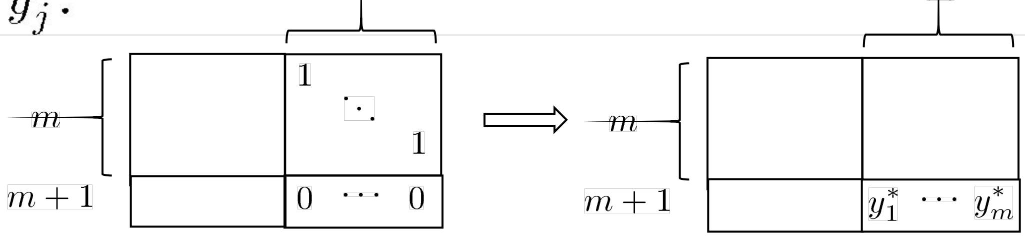
Пусть исходная симплексная таблица содержала единичную подматрицу:

$$A = (\dots|I).$$

Тогда, возвращаясь к формуле (4), получаем:

$$\vec{Z}^T = \vec{c}_0^{\,T} B^{-1} A = \vec{c}_0^{\,T} B^{-1}(\dots|I) = (\dots|\vec{c}_0^{\,T} B^{-1}) = (\dots|\vec{Y}^{*T}).$$

Таким образом, часть вектора эквивалентных стоимостей $\vec{Z}$, соответствующая единичным векторам исходного базиса, равна оптимальным значениям двойственных переменных. Этот вектор (в виде разностей $z_j - c_j$) содержится в $m+1$-й (управляющей) строке заключительной симплексной таблицы. Если стоимости z_j, соответствующие единичному исходному базису, равны 0, то соответствующие элементы управляющей строки $z_j - c_j = y_j^*$.



4

Пример

Прямая задача:

$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$10x_1 + 5x_2 \leqslant 50$$

$$6x_1 + 9x_2 \leqslant 54$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

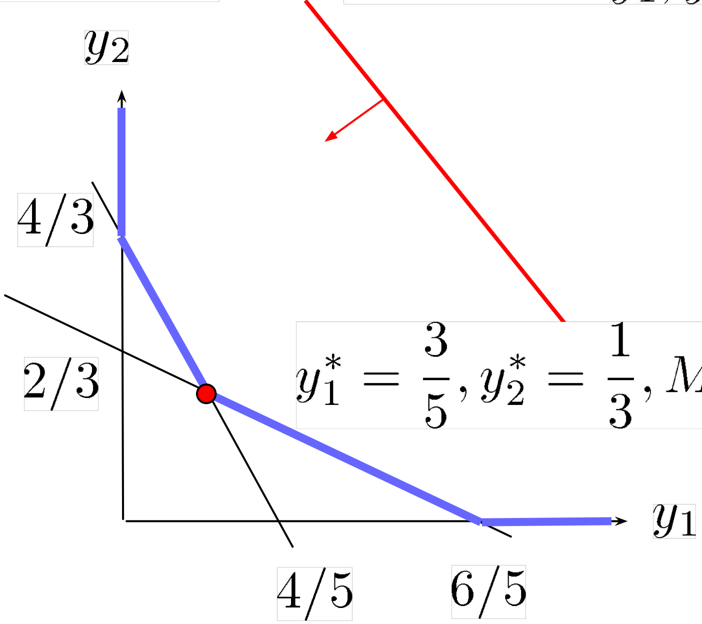
Двойственная задача:

$$M(y_1, y_2) = 50y_1 + 54y_2 \to \min$$

$$10y_1 + 6y_2 \geqslant 8$$

$$5y_1 + 9y_2 \geqslant 6$$

$$y_1, y_2 \geqslant 0$$



$$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{1}{3}, M(y_1^*, y_2^*) = 48$$

Пример (продолжение)

$$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{1}{3}, M(y_1^*, y_2^*) = 48$$

Исходная таблица

i	Базис	c_i	План $\vec{X}$	-8	-6	0	0
				$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$
1	$\vec{P}_3$	0	50	$\boxed{10}$	5	1	0
2	$\vec{P}_4$	0	54	6	9	0	1
3			0	8	6	0	0

Заключительная таблица

	$\vec{X}$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$
$\vec{P}_1$	3	1	0	$0,15$	$-0,083$
$\vec{P}_2$	4	0	1	$-0,1$	$0,167$
	-48	0	0	$-0,6$	$-0,333$

5.4. Вторая теорема двойственности

1

Двойственные условия

Каждому условию прямой задачи соответствует условие двойственной задачи.

Симметричная пара задач

Прямая задача:

$A\overrightarrow{X} \leqslant \overrightarrow{b}$,

$\overrightarrow{X} \geqslant 0.$

Двойственная задача:

$A^T\overrightarrow{Y} \geqslant \overrightarrow{c}$,

$\overrightarrow{Y} \geqslant 0$.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$\ldots$$
$$x_n \geqslant 0$$

$$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geqslant c_1$$
$$\ldots$$
$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geqslant c_n$$
$$y_1 \geqslant 0$$
$$\ldots$$
$$y_m \geqslant 0$$

Всего имеется $m + n$ пар двойственных условий

1

Двойственные условия

Пример

$$
\begin{array}{lrrl}
L(x_1, x_2) = & 8x_1 & +6x_2 & \to \max, \\
& 10x_1 & +5x_2 & \leqslant 50, \\
& 6x_1 & +9x_2 & \leqslant 54, \\
& x_1 & & \geqslant 0, \\
& & x_2 & \geqslant 0.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrl}
M(y_1, y_2) = & 50y_1 & +54y_2 & \to \min, \\
& 10y_1 & +6y_2 & \geqslant 8, \\
& 5y_1 & +9y_2 & \geqslant 6, \\
& y_1 & & \geqslant 0, \\
& & y_2 & \geqslant 0.
\end{array}
$$

4 пары

$$
\begin{array}{rcl}
10x_1 + 5x_2 \leqslant 50 & \leftrightarrow & y_1 \geqslant 0, \\
6x_1 + 9x_2 \leqslant 54 & \leftrightarrow & y_2 \geqslant 0, \\
x_1 \geqslant 0 & \leftrightarrow & 10y_1 + 6y_2 \geqslant 8, \\
x_2 \geqslant 0 & \leftrightarrow & 5y_1 + 9y_2 \geqslant 6.
\end{array}
$$

1

Двойственные условия

Несимметричная пара задач

Прямая задача:

$A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{b}$,

$\overrightarrow{X} \geqslant 0$.

Двойственная задача:

$A^T\overrightarrow{Y} \leqslant \overrightarrow{c}$,

$\overrightarrow{Y}$ - любое.

Всего имеется n пар двойственных условий

$$x_1 \geqslant 0 \longleftrightarrow a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leqslant c_1$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$x_n \geqslant 0 \longleftrightarrow a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leqslant c_n$$

1

Двойственные условия

Пример

$$
\begin{array}{lcccccl}
L = & -8x_1 & -6x_2 & +0x_3 & +0x_4 & \to \min, \\
\\
 & 10x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 50, \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & = 54, \\
\\
 & & & & x_1 & \geqslant 0, \\
 & & & & x_2 & \geqslant 0, \\
 & & & & x_3 & \geqslant 0, \\
 & & & & x_4 & \geqslant 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccl}
M = & 50y_1 & +54y_2 & \to \max, \\
\\
 & 10y_1 & +6y_2 & \leqslant -8, \\
 & 5y_1 & +9y_2 & \leqslant -6, \\
 & y_1 & & \leqslant 0, \\
 & & y_2 & \leqslant 0, \\
\\
 & & & y_1, y_2 \text{ – любые.}
\end{array}
$$

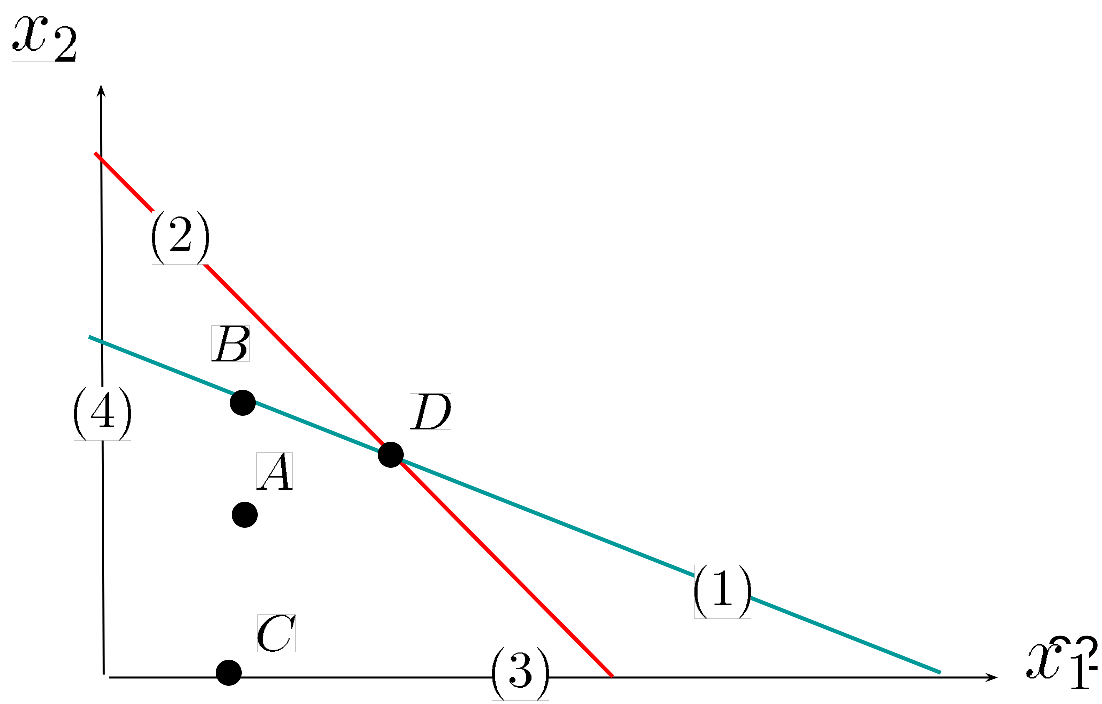
$$
\begin{array}{lcccl}
x_1 \geqslant 0 & \leftrightarrow & 10y_1 & +6y_2 & \leqslant -8, \\
x_2 \geqslant 0 & \leftrightarrow & 5y_1 & +9y_2 & \leqslant -6, \\
x_3 \geqslant 0 & \leftrightarrow & y_1 & & \leqslant 0, \\
x_4 \geqslant 0 & \leftrightarrow & & y_2 & \leqslant 0.
\end{array}
$$

2

Жесткие и нежесткие ограничения

Определение

Если взять *конкретный* план задачи линейного программирования и подставить его в некоторое ограничение, имеющее вид нестрогого неравенства, то это условие будет выполняться либо как равенство, либо как строгое неравенство. В первом случае данное ограничение для этого плана будет *жестким* (связанным, активным), во втором – *нежестким* (свободным, неактивным).



3

Вторая теорема двойственности

Для канонической формы двойственные условия в сокращенной матричной записи имеют вид:

$$\overrightarrow{X} \geqslant 0, \quad A^T\overrightarrow{Y} \leqslant \overrightarrow{c},$$

Если расписать покомпонентно двойственные пары:

$$x_j^* \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \leqslant c_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Т е о р е м а (принцип дополняющей нежесткости)

Для *оптимальных* планов прямой и двойственной задачи в каждой паре двойственных условий только одно условие может быть свободным (нежестким, неактивным).

3

Вторая теорема двойственности

Доказательство

Пусть $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{Y}$ – оптимальные плны. Составим выражение:

$$\overrightarrow{X}^T[\overrightarrow{c} - A^T\overrightarrow{Y}] = \overrightarrow{X}^T\overrightarrow{c} - \overrightarrow{X}^T A^T \overrightarrow{Y} = [\text{транспонируем скаляр}] =$$

$$= \overrightarrow{X}^T\overrightarrow{c} - \overrightarrow{Y}^T A\overrightarrow{X} = [\text{т.к } \overrightarrow{X} - \text{план}] = \overrightarrow{X}^T\overrightarrow{c} - \overrightarrow{Y}^T\overrightarrow{b} =$$

$$= L(\overrightarrow{X}) - M(\overrightarrow{Y}) = [\text{по I теореме двойственности}] = 0.$$

Расписываем покомпонентно скалярное произведение:

$$\overrightarrow{X}^T[\overrightarrow{c} - A^T\overrightarrow{Y}] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j}_{\geqslant 0} \underbrace{[c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i]}_{\geqslant 0} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что в каждой j-й паре двойственных условий

$$\text{либо } x_j = 0, \quad \text{либо } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$$

3

Пример

Прямая задача:

$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$10x_1 + 5x_2 \leqslant 50$$

$$6x_1 + 9x_2 \leqslant 54$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

$$x_1^* = 3, x_2^* = 4$$

Двойственная задача:

$$M(y_1, y_2) = 50y_1 + 54y_2 \to \min$$

$$10y_1 + 6y_2 \geqslant 8$$

$$5y_1 + 9y_2 \geqslant 6$$

$$y_1, y_2 \geqslant 0$$

$$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{1}{3}$$

1) $x_1^* > 0$ $\quad$ $10y_1^* + 6y_2^* = 8$

2) $x_2^* > 0$ $\quad$ $5y_1^* + 9y_2^* = 6$

3) $10x_1^* + 5x_2^* = 50$ $\quad$ $y_1^* > 0$

4) $6x_1^* + 9x_2^* = 54$ $\quad$ $y_2^* > 0$

4 Обращение второй теоремы двойственности

Пусть имеется опорный план

$$\overrightarrow{X} = (x_1, \ldots, x_m, 0 \ldots, 0)^T,$$

и мы хотим проверить его на оптимальность.

Предположим, что он невырожден, т. е. $x_1, > 0, \ldots, x_m > 0$

Тогда для каждого $j = 1, \ldots, m$ можно записать равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j.$$

Получилась система m уравнений с m неизвестными. Решая ее, находим значения двойственных переменных $y_1, \ldots, y_m$.

Тогда, если для всех остальных $x_j = 0, j = m + 1, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j,$$

то данный план является оптимальным.

4 Обращение второй теоремы двойственности

З а м е ч а н и е. Легко убедиться, что полученный таким образом критерий оптимальности совпадает с критерием $z_j - c_j \leqslant 0$, который мы использовали в симплексном методе, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = z_j.$$

Действительно, в обозначениях раздела 4.3

$z_j = \overrightarrow{c}_0^T \overrightarrow{P}'_j = \overrightarrow{c}_0^T B^{-1} \overrightarrow{P}_j =$[транспонируем скаляр]$=$

$= \overrightarrow{P}_j^T (B^{-1})^T \overrightarrow{c}_0 = \overrightarrow{P}_j^T \overrightarrow{Y}^* =$ [расписываем покомпонентно]$=$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*.$

4 Обращение второй теоремы двойственности

П р и м е р. Имеется задача ЛП в канонической форме:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
L(x_1,x_2) = & -8x_1 & -6x_2 & +0x_3 & +0x_4 & \to \min \\
 & 10x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 50 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & = 54
\end{array}
$$

$$x_1,\ldots,x_4 \geqslant 0$$

Проверить, является ли план $\overrightarrow{X} = (5,0,0,24)^T$ оптимальным.

Р е ш е н и е. Двойственная задача имеет две переменных: y_1, y_2, двойственные ограничения имеют вид:

$$
\begin{array}{rrr}
10y_1 & +6y_2 & \leqslant -8 \\
5y_1 & +9y_2 & \leqslant -6 \\
y_1 & & \leqslant 0 \\
 & y_2 & \leqslant 0.
\end{array}
$$

4 Обращение второй теоремы двойственности

Записываем двойственные связанные условия для ненулевых x_j:

$$\begin{array}{llllll} x_1 > 0 & \longrightarrow & 10y_1 & +6y_2 & = -8 \\ x_4 > 0 & \longrightarrow & & y_2 & = 0 \end{array}$$

Отсюда $y_1 = -\frac{4}{5}, y_2 = 0$. Подставляем их в оставшиеся двойственные условия:

$$\begin{array}{llllll} x_2 = 0 & \longrightarrow & 5y_1 & +9y_2 & \cancel{\leqslant} -6 & ? \\ x_3 = 0 & \longrightarrow & y_1 & & \leqslant 0 & ? \end{array}$$

Первое условие не выполняется. следовательно проверяемый план неоптимальный.

5.5. Экономическая интерпретация двойственности

1 Экономический смысл двойственных переменных

<u>Прямая задача</u>

$$L(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left[\text{Цена } j\text{-го изделия, } \textit{руб/шт}\right] x_j \left[\text{Количество } j\text{-х изделий, } \textit{шт}\right] = \text{Доход, } \textit{руб} \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\text{Количество ресурсов } i\text{-го вида на } j\text{-е изделие } \textit{ед/шт}\right] x_j \left[\text{Количество } j\text{-х изделий, } \textit{шт}\right] \leqslant b_i \left[\text{Запас ресурсов, } i\text{-го вида, } \textit{ед}\right]$$

<u>Двойственная задача</u>

$$M(\vec{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i \left[\text{Запас ресурсов, } i\text{-го вида, } \textit{ед}\right] y_i \left[\,?\,\right] = \,? \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left[\text{Количество ресурсов } i\text{-го вида на } j\text{-е изделие } \textit{ед/шт}\right] y_i \left[\,?\,\right] \geqslant c_j \left[\text{Цена } j\text{-го изделия, } \textit{руб/шт}\right]$$

$$y_i \left[\frac{\textit{руб}}{\textit{шт}} : \frac{\textit{ед}}{\textit{шт}} = \frac{\textit{руб}}{\textit{ед}}\right]$$ - цена единицы ресурса i-го вида

2

Смысл двойственных условий

А

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\text{Количество ресурсов } i\text{-го вида на } j\text{-е изделие } \textit{ед/шт}\right] x_j \left[\text{Количество } j\text{-х изделий, } \textit{шт}\right]}_{\text{Общие затраты ресурса } i\text{-го вида } R_i} \leqslant b_i \left[\text{Запас ресурсов, } i\text{-го вида, } \textit{ед}\right]$$

$$R_i \leqslant b_i \longleftrightarrow y_i \geqslant 0$$

Оптимальные цены обладают тем свойством, что если $R_i < b_i$ то $y_i^* = 0$.

2

Смысл двойственных условий

Б

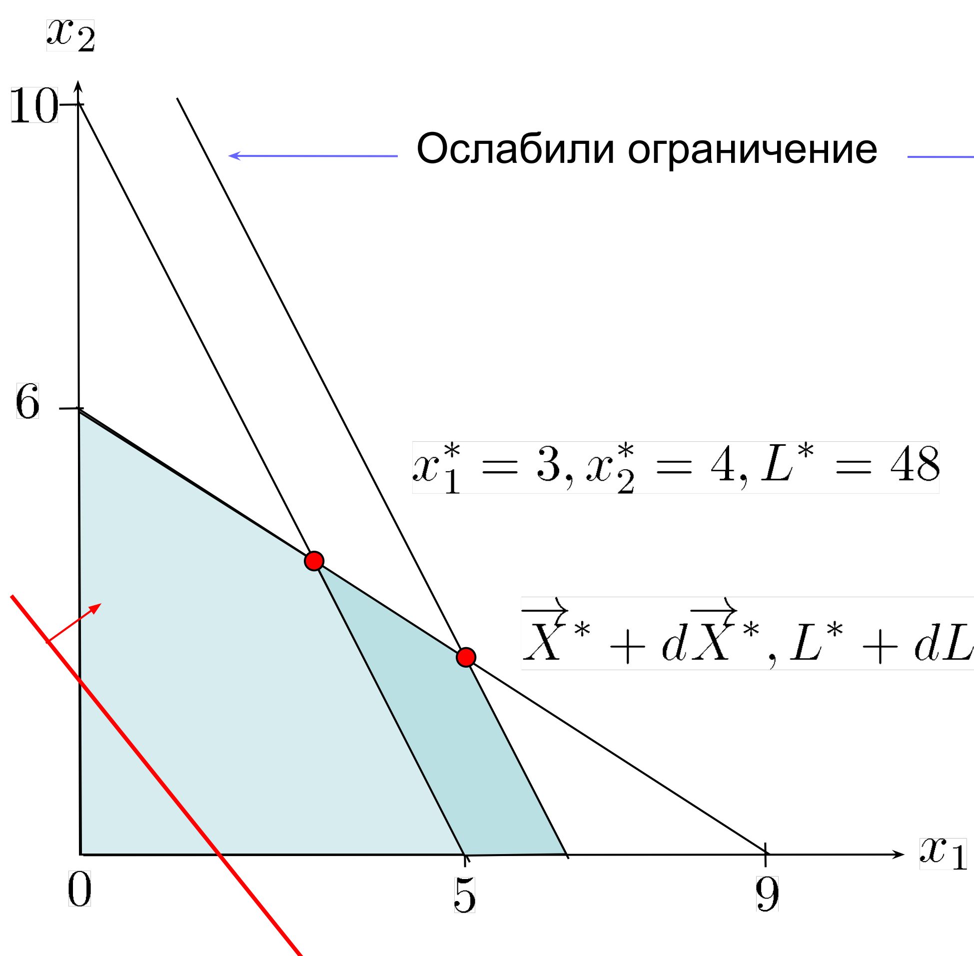
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left[\begin{array}{l}\text{Количество} \\ \text{ресурсов } i\text{-} \\ \text{го вида на} \\ j\text{-е изделие} \\ ед/шт\end{array}\right] y_i \left[\begin{array}{l}\text{Цена едини-} \\ \text{цы ресурса} \\ i\text{-го вида,} \\ руб/ед\end{array}\right]}_{\text{Себестоимость } j\text{-го изделия } S_j} \geqslant c_j \left[\begin{array}{l}\text{Цена } j\text{-го} \\ \text{изделия,} \\ руб/шт\end{array}\right]$$

$$S_j \geqslant c_j \longleftrightarrow x_j \geqslant 0$$

Оптимальный план производства обладает тем свойством, что если $S_j > C_j$, то $x_j^* = 0$.

3

Двойственные переменные как показатели чувствительности целевой функции к ограничениям



Ослабили ограничение

$$L(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$10x_1 + 5x_2 \leqslant 50 + db_1$$

$$6x_1 + 9x_2 \leqslant 54$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

$$x_1^* = 3, x_2^* = 4, L^* = 48$$

$$\overrightarrow{X}^* + d\overrightarrow{X}^*, L^* + dL^* = ?$$

Пример

Докупили 1 ед. дерева, расширили производство, получили дополнительный доход

$$dL^* = y_1^* = \frac{3}{5} \text{ руб.}$$

$$\frac{\partial L(\overrightarrow{X}^*)}{\partial b_i} = [\text{по I теореме двойственности}] = \frac{\partial M(\overrightarrow{Y}^*)}{\partial b_i} = \frac{\partial \sum b_i y_i^*}{\partial b_i} = y_i^*$$