# Аналитическое решение дифференциальных уравнений

**Общее решение** неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$de := diff(y(x), x\$2) + y(x) = x^2 \cdot \exp(-x);$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + y(x) = x^2 e^{-x}$$

$$dsolve(de, y(x));$$

Общее решение соответствующее ОДУ

Частное решение НЛДУ

$$y(x) = \sin(x)\ \_C2 + \cos(x)\ \_C1 + \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-x}$$

# Фундаментальная (базисная) система решений

$$dsolve(de, y(x), output = basis);$$

$$\left[ [\cos(x), \sin(x)], \frac{1}{2} (x+1)^2 e^{-x} \right]$$

# Решение задачи Коши

$$y(0)=-2, y'(0)=1, y''(0)=0, \ y'''(0)=0.$$

$$cond := y(0) = -2, \mathrm{D}(y)(0) = 1, (\mathrm{D@@2})(y)(0) = 0, (\mathrm{D@@3})(y)(0) = 0;$$

Равенство производной **n**-ого порядка в точке ***a*** величине ***b***

$$(D@@n)(y)(a) = b;$$

## Системы дифференциальных уравнений

**dsolve({sys},{x(t),y(t),…})**, где **sys** – система дифференциальных уравнений, **x(t),y(t),…** – набор неизвестных функций.

## Приближенное решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

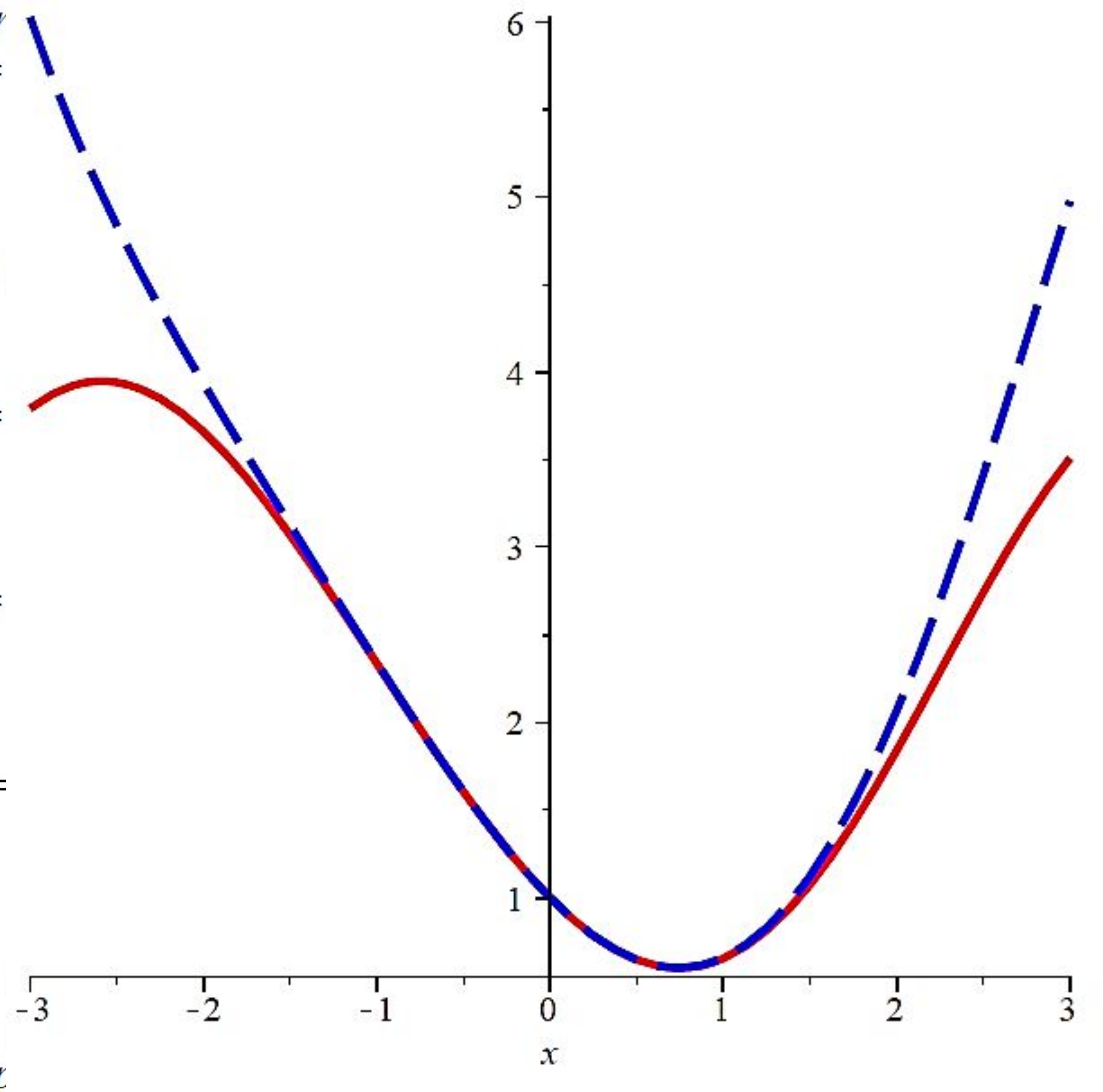
*restar*
*de* := $(x)$

*cond* $) = 1$

*y1* := $+ \frac{9}{4}$

*y2* := $O(x^6)$

*W2* := 5




*p1* := :
*p2* := 3) :
*with*( *p*

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДУ

- Для того, чтобы найти численное решение дифференциального уравнения (задачи Коши или краевой задачи) в команде **dsolve** следует указать параметр **type=numeric** (или просто **numeric**).
- Тогда команда решения дифференциального уравнения будет иметь вид **dsolve(eq, vars, type=numeric, options)**, где
  **eq** –уравнения,
  **vars** – список неизвестных функций,
  **options** – параметры, позволяющие указать метод численного интегрирования дифференциального уравнения.
- В Maple реализованы такие методы: **method=rkf45** − метод Рунге-Кутта-Фельберга 4-5-ого порядка (установлен по умолчанию); **method=dverk78** – метод Рунге-Кутта 7-8 порядка; **method=classical** – классический метод Рунге-Кутта 3-его порядка; **method=gear** и **method=mgear** – одношаговый

График численного решения дифференциального уравнения можно построить с помощью команды

odeplot(dd, [x,y(x)], x=x1..x2),

где в качестве функции используется команда dd:=dsolve({eq,cond}, y(x), numeric) численного решения, после нее в квадратных скобках указывают переменную и неизвестную функцию [x,y(x)], и интервал x=x1..x2 для построения графика.

# Найти частные решения ДУ

$$y'' + y = 2x\cos x + \sin x$$

$$y'' + 9y = \frac{11}{12}\sin 3x - x\cos 3x$$

$$5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\sin\frac{4}{5}x$$

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$$

$$xy'' + y' = 0$$

# Решить задачу Коши

$$y'' + 9y = 6\cos 3x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

$$4y'' + y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2},\ y(\pi) = 3,\ y'(\pi) = \frac{1}{2}.$$

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}.$$

$$y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x),\ y(\pi) = \pi,\ y'(\pi) = 2\pi.$$

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x,\ y(\pi) = \pi e^\pi,\ y'(\pi) = e^\pi.$$

# Решить краевые задачи с построением графиков решения

$$y^{IV} - y = 8e^x,$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0,$$

$$y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0.$$

$y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}.$

$y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x),\ y(\pi) = \pi,\ y'(\pi) = 2\pi.$

$y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x,\ y(\pi) = \pi e^\pi,\ y'(\pi) = e^\pi.$

$y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3{,}2.$

$4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = -5{,}5.$

$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

Решить систему $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$

при данных начальных условиях

$$t_0 = 0,\ x_0 = -\frac{3}{17},\ y_0 = \frac{4}{17}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 2z - t + 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z - t + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z-1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}, \end{cases} \qquad y(0) = -1,\ z(0) = 1.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$$

Для численного решения задачи Коши, построения графиков решения и фазовых портретов в Maple имеется специальный пакет DEtools. Команда DEplot из пакета DEtools строит численными методами графики решения или фазовые портреты. Эта команда аналогична команде odeplot, но более функциональна. Она, в отличие от odeplot, сама производит численное решение дифференциального уравнения.

with(DEtools)

Основные параметры DEplot похожи на параметры odeplot:

**DEplot(de, vars, range, x=x1..x2, y=y1..y2, cond, options)**, где

**de** – дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений;

**vars** – список неизвестных функций;

**range** – диапазон измерения независимой переменной;

**cond** – начальные условия;

x=x1..x2 и y=y1..y2 – диапазоны изменения функций;

**options** – дополнительные параметры.