# ОГЭ-9. МАТЕМАТИКА
# Задания повышенного и высокого уровней сложности

*Лариса Борисовна Крайнева, канд. пед. наук*

ОГЭ-9. МАТЕМАТИКА

Задания повышенного и высокого уровней сложности


*Москва*
*БИНОМ.*
*Лаборатория знаний*
*Редакция «Поколение V»,*
*2018*

Автор учебных пособий по подготовке к ГИА по математике, канд. пед. наук Лариса Борисовна Крайнева


# ПРЕДИСЛОВИЕ

Экзаменационная работа по математике за курс основной школы состоит из двух частей.

В части 1 представлены 20 заданий базового уровня, предполагающие написание краткого ответа в экзаменационном бланке (точнее, задания с выбором ответа, кратким ответом и установлением соответствия).

Вторая часть имеет вид традиционной контрольной работы и состоит из 6 заданий, в которых, в соответствии со спецификацией, представлены следующие разделы программного материала: выражения и их преобразования, уравнения и системы уравнений, текстовые задачи, неравенства, функции, координаты и графики, последовательности и прогрессии, геометрия. При выполнении второй части работы учащиеся должны продемонстрировать умение математически грамотно записывать решение (оно должно включать необходимые пояснения и обоснования, из которых должен быть понятен ход рассуждений).


В настоящее время существует достаточно много пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации по математике за курс основной школы, которые представляют собой сборники задач (тематические или наборы вариантов), зачастую сопровождаемые только ответами.


***Цель данного пособия*** — показать не только различные способы и приёмы решения задач по алгебре и геометрии повышенного и высокого уровней сложности, но и примеры оформления решений этих заданий


МАТЕМАТИКА
ОГЭ
К новой официальной демонстрационной версии ОГЭ
2018
Задания повышенного и высокого уровней сложности
9
класс

# Содержание


МАТЕМАТИКА
ОГЭ
К новой официальной демонстрационной версии ОГЭ
2018
Задания повышенного и высокого уровней сложности
9
класс

# Содержание


# Теоретические сведения и справочные материалы

## Алгебра

Таблицы квадратов и степеней

Формулы сокращённого умножения

Модуль числа и его свойства

Степень числа и его свойства

Арифметический квадратный корень и его свойства

Формулы корней квадратного уравнения

Графики некоторых элементарных функций (линейной, квадратичной, обратной пропорциональности)

Прогрессии


# Теоретические сведения и справочные материалы

## Геометрия

Углы

Признаки параллельности прямых

Треугольник

Параллелограмм

Трапеция

Окружность. Круг. Круговой сектор

Центральный угол. Вписанный угол

Касательная к окружности и секущие

Правильные *n*-угольники


# Теоретические сведения и справочные материалы

## Формулы сокращённого умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$


# Теоретические сведения и справочные материалы

## Модуль числа

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

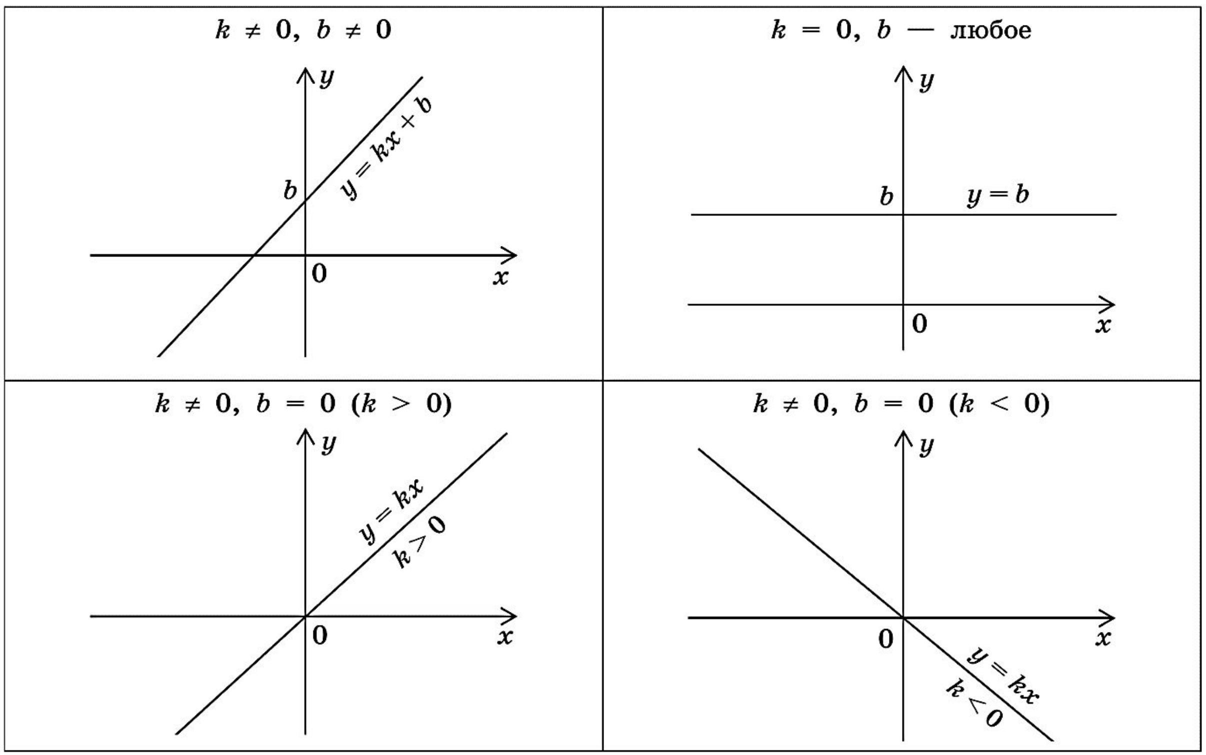
## Свойства модуля

1. $|a - b| = |b - a|$
2. $|a|^2 = a^2$
3. $|x| \leq a$ при $a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ при $a \geq 0$
4. $|x| \geq a$ при $a \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -a$ или $x \geq a$ при $a \geq 0$


# Теоретические сведения и справочные материалы

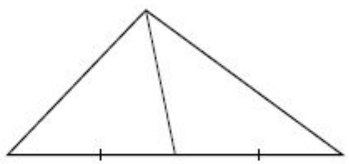
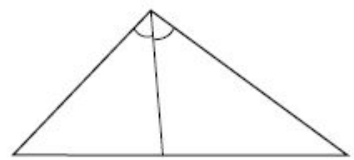
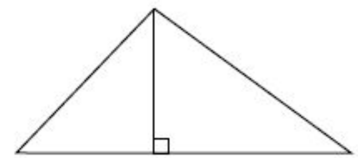
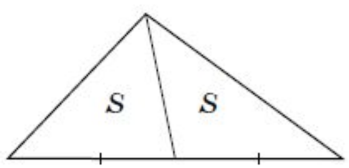
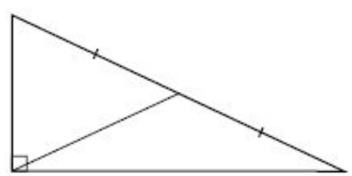
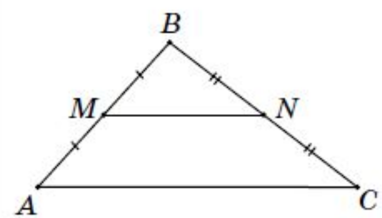
**Графики некоторых элементарных функций и их свойства**

**Линейная функция $y = kx + b$**




## Теоретические сведения и справочные материалы

### Треугольник

| Сумма углов треугольника равна 180° | | |
|---|---|---|
| **Медиана треугольника** — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны  | **Биссектриса треугольника** — это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противолежащей стороне  | **Высота треугольника** — это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противолежащую сторону  |
| **Свойство медианы**   Медиана разбивает треугольник на два равновеликих | **Теорема о медиане, проведённой к гипотенузе**  Медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы (как радиус описанной окружности) | **Средняя линия треугольника** — отрезок, соединяющий середины двух его сторон   1) $MN \parallel AC$,<br>2) $MN = \frac{1}{2}AC$. |


## Теоретические сведения и справочные материалы

$a$, $b$, $c$ — стороны, $h_a$ — высота, опущенная на сторону $a$,
$A$, $B$, $C$ — углы, противолежащие сторонам $a$, $b$, $c$ соответственно,
$P$ — периметр, $p$ — полупериметр, $S$ — площадь,
$R$ — радиус описанной окружности, $r$ — радиус вписанной окружности

| | |
|---|---|
| **Теорема косинусов** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ | **Теорема синусов** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ |
| **Периметр** $P = a + b + c$ | **Полупериметр** $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ |


## Теоретические сведения и справочные материалы

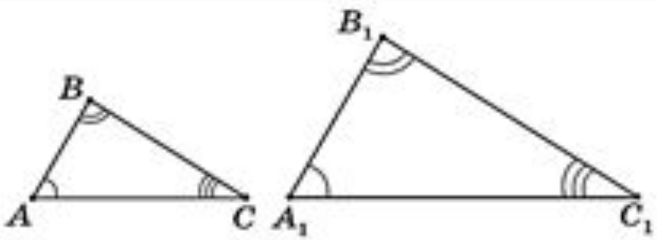
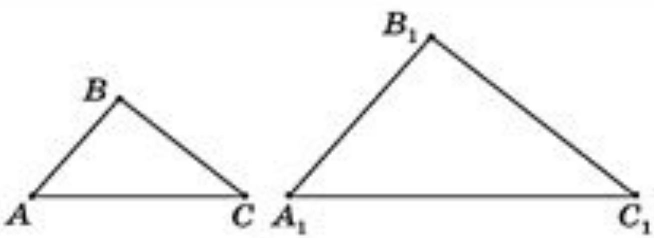
| | |
|---|---|
| **Площадь треугольника**<br>$S = \frac{1}{2}ah_a$ | **Площадь треугольника**<br>$S = \frac{1}{2}ab\sin C$ |
| **Площадь треугольника**<br>$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$<br>(формула Герона) | **Площадь треугольника**<br>$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr$ |
| **Высота**<br>$h_a = b\sin C$ | **Высота**<br>$h_a = \frac{2S}{a}$ |
| **Радиус описанной окружности**<br>$R = \frac{abc}{4S}, \quad R = \frac{a}{2\sin A}$ | **Радиус вписанной окружности**<br>$r = \frac{2S}{a+b+c}, \quad r = \frac{S}{p}$ |


## Теоретические сведения и справочные материалы

### Признаки равенства треугольников

| По двум сторонам и углу между ними | По стороне и двум прилежащим к ней углам | По трём сторонам |
|---|---|---|

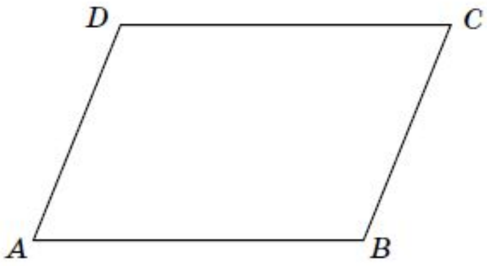
### Подобие треугольников

| | |
|---|---|
| <br>$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1$<br>$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$ | **Признаки подобия треугольников**<br>1) По двум равным углам<br>2) По двум пропорциональным сторонам и углу между ними<br>3) По трём пропорциональным сторонам |
| **Отношения в подобных треугольниках**<br>Отношение периметров (биссектрис, медиан, высот, радиусов вписанных и описанных окружностей) равно коэффициенту подобия | <br>$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2$<br>Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия |

Автор учебных пособий по подготовке к ГИА по математике, канд. пед. наук Лариса Борисовна Крайнева


## Теоретические сведения и справочные материалы

### Параллелограмм

| | |
|---|---|
|  | Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны |
| **Свойства**<br>1) Диагонали точкой пересечения делятся пополам<br>2) Противоположные стороны равны<br>3) Противоположные углы равны<br>4) Сумма прилежащих к одной стороне углов равна $180^\circ$ | **Признаки**<br>Если у четырёхугольника:<br>1) диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам,<br>2) противоположные стороны попарно равны,<br>3) две противоположные стороны параллельны и равны,<br>то четырёхугольник — параллелограмм |
| **Площадь параллелограмма**<br>$S = ah_a$<br>$S = ab\sin\gamma$<br>$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha,$<br>где $a$ и $b$ — стороны, $h_a$ — высота, проведённая к стороне $a$,<br>$\gamma$ — угол между сторонами $a$ и $b$,<br>$d_1$ и $d_2$ — диагонали, $\alpha$ — угол между диагоналями | **Следствие из теоремы косинусов**<br>$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ — сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон |

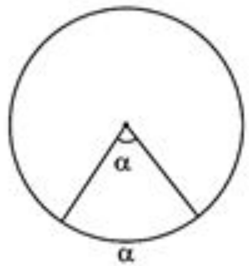
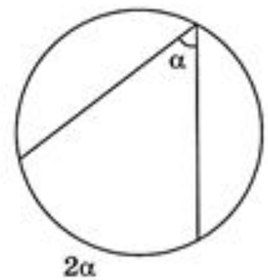
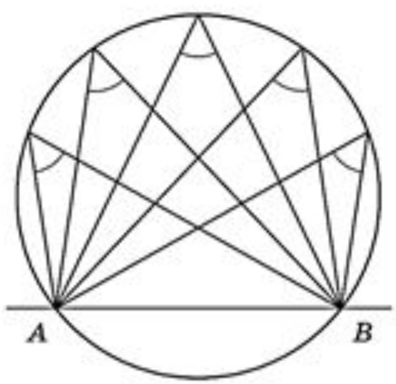
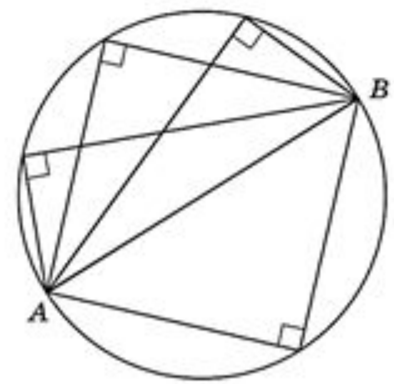

## Теоретические сведения и справочные материалы

### Окружность. Круг. Круговой сектор

| Длина окружности | Площадь круга |
|---|---|
| $C = 2\pi r$<br>$C = \pi d$ | $S = \pi r^2$<br>$S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ |
| **Длина дуги**<br>$l = \dfrac{\pi r}{180} \cdot \alpha$,<br>где $\alpha$ — угол в градусах | **Площадь кругового сектора**<br>$S = \dfrac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$,<br>где $\alpha$ — угол в градусах |


## Теоретические сведения и справочные материалы

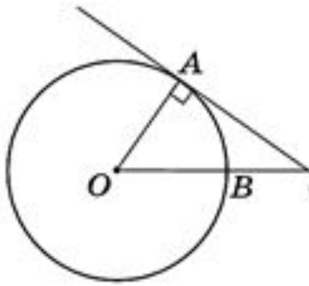
### Центральный угол. Вписанный угол

| Центральный угол | Вписанный угол |
|---|---|
|   Градусная мера дуги равна центральному углу, опирающемуся на эту дугу |   Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую опирается |
|   Вписанные углы, стороны которых проходят через точки $A$ и $B$ окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой $AB$, равны |   Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые |


# Теоретические сведения и справочные материалы

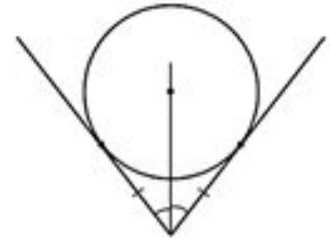
## Касательная к окружности и секущие

### Теорема о касательной



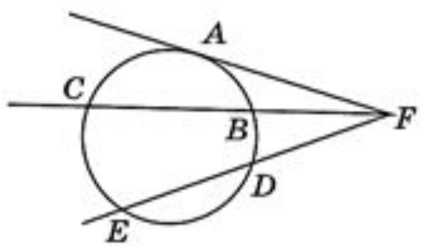

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

### Теорема об отрезках касательных



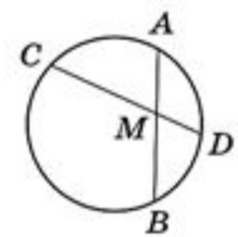
Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

### Пропорциональность отрезков касательной и секущих окружности




$FA^2 = FB \cdot FC = FD \cdot FE$

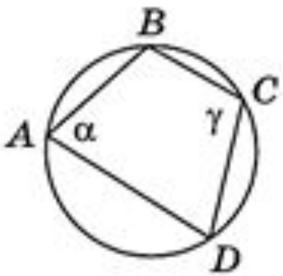
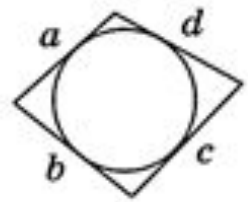
### Пропорциональные отрезки хорд окружности




$AM \cdot MB = CM \cdot MD$


## Теоретические сведения и справочные материалы

### Вписанные и описанные четырёхугольники

| | |
|---|---|
|   $\alpha + \gamma = 180°$ |   $a + c = b + d$ |
| В любом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° | В любом описанном около окружности четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны |


# Задача 21

**Пример 3** Решите уравнение $x^4 = (x - 12)^2$.

***Решение.*** *Первый способ.*

$$x^4 - (x - 12)^2 = 0,$$
$$(x^2)^2 - (x - 12)^2 = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения по формуле разности квадратов:

$$(x^2 - x + 12)(x^2 + x - 12) = 0.$$

Произведение двух множителей равно нулю в данном случае, если хотя бы один из множителей равен нулю:

$x^2 - x + 12 = 0$ или $x^2 + x - 12 = 0$.

Уравнение $x^2 - x + 12 = 0$ не имеет корней, так как его дискриминант $D = 1 - 4 \cdot 12 = -47 < 0$.

Уравнение $x^2 + x - 12 = 0$ имеет корни $x = -4$ и $x = 3$.

***Ответ:*** – 4; 3.


# Пример 3

*Второй способ.* $(x^2)^2 = (x - 12)^2$.

Известно, что $(A^2 = B^2) \Leftrightarrow (A = -B$ или $A = B)$.

Тогда

$x^2 = -(x - 12)$ или $x^2 = x - 12$

$x^2 + x - 12 = 0,$ $\quad$ $x^2 - x + 12 = 0,$

$x = -4$ или $x = 3$ $\quad$ корней нет.

***Ответ***: $-4$; $3$.

*Третий способ.*

$$x^4 = (x - 12)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = x - 12 \\ x^2 = -x + 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 12 = 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

***Ответ***: $-4$; $3$.


**Пример 13** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 9x^2 + 6y^2 = 45x. \end{cases}$$

***Решение.***

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 3(3x^2 + 2y^2) = 45x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 3 \cdot 45 = 45x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y^2 = \dfrac{45 - 3x^2}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y^2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 3, \\ y = 3. \end{cases}$$

***Ответ***: (3; –3); (3; 3).


**Пример 14** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(4x+1)^2 = 5y, & (1)\\ (x+4)^2 = 5y. & (2)\end{cases}$$

***Решение.***

***Первый способ.***

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2): $(4x+1)^2-(x+4)^2=0$.

Решим это уравнение, разложив левую часть на множители по формуле разности квадратов:

$(4x+1-x-4)(4x+1+x+4)=0$,

$(3x-3)(5x+5)=0$,

$3(x-1)\cdot 5(x+1)=0$,

$x=1$ или $x=-1$.

Из уравнения (2) выразим $y$ через $x$:

$y=\dfrac{(x+4)^2}{5}$.

Если $x=1$, то $y=5$.

Если $x=-1$, то $y=1{,}8$.

Значит, решениями системы являются пары чисел $(1;\ 5)$ и $(-1;\ 1{,}8)$.

***Ответ***: $(1;\ 5)$; $(-1;\ 1{,}8)$.


**Пример 14** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(4x+1)^2 = 5y,\\ (x+4)^2 = 5y.\end{cases}$$

*Второй способ.*

Правые части уравнений системы равны, значит, равны их левые части:

$(4x + 1)^2 = (x + 4)^2$,

$4x + 1 = x + 4$ или $4x + 1 = -(x + 4)$,

$3x = 3$, $\quad 5x = -5$,

$x = 1$; $\quad x = -1$.

Далее — см. решение первым способом.


**Пример 15** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 37, & (1)\\ xy = 6. & (2)\end{cases}$$

***Решение.***

*Первый способ.*

Умножим обе части уравнения (2) на 2 и сложим с уравнением (1):

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 49,\\ xy = 6;\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 49,\\ xy = 6;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -7,\\ xy = 6\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 7,\\ xy = 6;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6,\\ y = -1\end{cases} \text{или} \begin{cases} x = -1,\\ y = -6;\end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1,\\ y = 6\end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 6,\\ y = 1.\end{cases}$$

***Ответ***: (–6; –1); (–1; –6); (1; 6); (6; 1).


**Пример 15** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 37, & (1) \\ xy = 6. & (2) \end{cases}$$

*Второй способ.*

Выразим из уравнения (2), например, $y$ через $x$ и подставим в уравнение (1):

$$y = \frac{6}{x},$$

$$x^2 + \frac{36}{x^2} = 37,$$

$$\frac{x^4 - 37x^2 + 36}{x^2} = 0,$$

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 36)}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} (x^2 - 1)(x^2 - 36) = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$x = \pm 1$ или $x = \pm 6$.

Далее — см. решение системы первым способом.

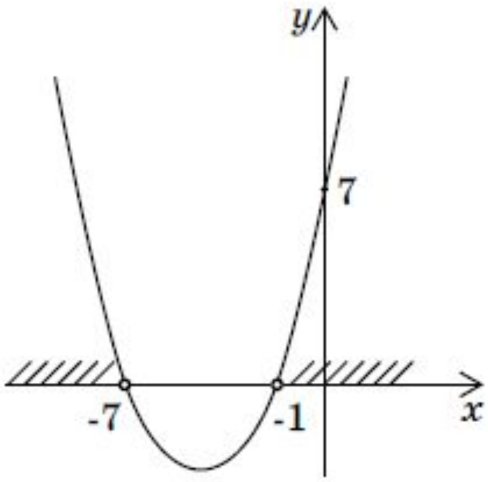

**Пример 17** Решите неравенство $\dfrac{-18}{x^2+8x+7} \le 0.$

***Решение. Первый способ.***
Исходное неравенство равносильно следующему неравенству:
$x^2 + 8x + 7 > 0,$
$(x + 1)(x + 7) > 0,$
$x < -7$ или $x > -1.$

***Ответ***: $(-\infty;-7) \cup (-1;+\infty).$

***Второй способ.***
График соответствующей квадратичной функции $y = x^2 + 8x + 7$ — парабола, ветви которой направлены вверх (см. рисунок).
Нули функции: $x_1 = -7,\ x_2 = -1.$
$y > 0$ при $x < -7$ и $x > -1.$

***Ответ***: $(-\infty;-7) \cup (-1;+\infty).$



# ОГЭ-9. МАТЕМАТИКА
## Задания повышенного и высокого уровней сложности


**Пример 18** Решите неравенство $\dfrac{-369}{(x-1)^2-2} \geq 0.$

***Решение. Первый способ.***
Данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$(x-1)^2-2<0,$

$(x-1)^2<2,$

$|x-1|<\sqrt{2},$

$-\sqrt{2}<x-1<\sqrt{2},$

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}.$

***Ответ***: $(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}).$

***Второй способ.*** Данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$(x-1)^2-(\sqrt{2})^2<0,$

$(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})<0,$

$(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))<0,$

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}.$

***Ответ***: $(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}).$


**Пример 25** Найдите значение выражения $(a^3 - a) \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right)$ при $a = -27$.

***Решение.*** *Первый способ.*
Упростим выражение, сложив дроби в скобках:

$$(a^3 - a) \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) = (a^3 - a) \cdot \frac{a + 1 - a + 1}{(a-1)(a+1)} = \frac{a(a^2 - 1) \cdot 2}{a^2 - 1} = 2a.$$

Если $a = -27$, то $2a = 2 \cdot (-27) = -54$.

***Ответ***: $-54$.

*Второй способ.* Раскроем скобки, умножив выражение $(a^3 - a)$ на каждую дробь:

$$(a^3 - a) \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) = \frac{a^3 - a}{a-1} - \frac{a^3 - a}{a+1} =$$

$$= \frac{a(a^2 - 1)}{a-1} - \frac{a(a^2 - 1)}{a+1} = \frac{a(a-1)(a+1)}{(a-1)} - \frac{a(a-1)(a+1)}{(a+1)} =$$

$$= a(a+1) - a(a-1) = a(a + 1 - a + 1) = 2a.$$

Далее — см. первый способ.


**Пример 26** Найдите значение выражения $\dfrac{25x - 36y}{5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \sqrt{y}$, если $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 13$.

***Решение.*** Упростим исходное выражение, заметив, что $25x - 36y$ можно считать разностью квадратов выражений $5\sqrt{x}$ и $6\sqrt{y}$:

$$\frac{25x - 36y}{5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \sqrt{y} = \frac{(5\sqrt{x})^2 - (6\sqrt{y})^2}{5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \sqrt{y} = \frac{(5\sqrt{x} - 6\sqrt{y})(5\sqrt{x} + 6\sqrt{y})}{5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \sqrt{y} =$$

$$= 5\sqrt{x} - 6\sqrt{y} + \sqrt{y} = 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 5(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Если $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 13$, то $5(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 5 \cdot 13 = 65$.

***Ответ***: 65.

# ОГЭ-9. МАТЕМАТИКА

## Задания повышенного и высокого уровней сложности


**Пример 28** Найдите значение выражения $\dfrac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если $p(b) = \left(b + \dfrac{3}{b}\right)\left(3b + \dfrac{1}{b}\right)$.

***Решение.*** $p(a) = \left(a + \dfrac{3}{a}\right)\left(3a + \dfrac{1}{a}\right)$,

$p\left(\dfrac{1}{a}\right) = \left(\dfrac{1}{a} + 3a\right)\left(\dfrac{3}{a} + a\right)$.

Заметим, что $p(a) = p\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

Значит, $\dfrac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)} = 1$.

***Ответ***: 1.


# Задача 21

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1** Решите уравнение $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3 = 0$.

**2** Решите уравнение $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2 - 5 = 0$.

**3** Решите уравнение $x^4 = (x - 20)^2$.

**4** Решите уравнение $x^6 = (x - 5)^3$.

**5** Решите уравнение $\frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} = 1$.

**6** Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

**7** Решите уравнение $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$.

# Задача 22

**Пример 3** Два велосипедиста одновременно отправляются в 60-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

***Решение.*** Заполним таблицу по условию задачи:

| | Путь (км) | Скорость (км/ч) | Время (ч) |
|---|---|---|---|
| Первый велосипедист | 60 | $x + 10$ | $\frac{60}{x+10}$ |
| Второй велосипедист | 60 | $x$ | $\frac{60}{x}$ |

Так как на весь путь второй велосипедист потратил на 3 ч больше, чем первый, то

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3 \quad \Big| \cdot x(x+10) \neq 0,$$

$60x + 600 - 60x = 3x^2 + 30x,$

$x^2 + 10x - 200 = 0,$

$x_1 = -50$ – не удовлетворяет условию $x > 0$,

$x_2 = 40.$

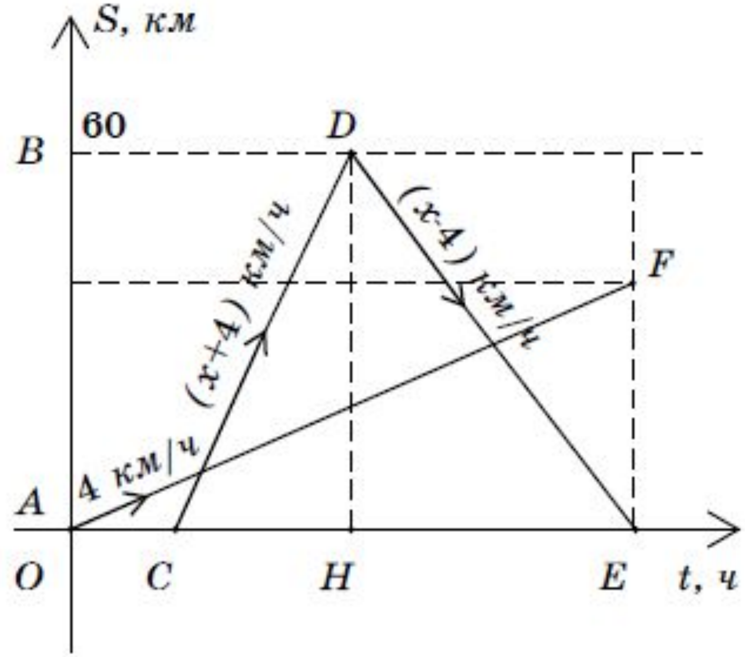
Если $x = 40$, то $x(x + 10) \neq 0.$

Итак, второй велосипедист приехал к финишу вторым со скоростью 40 км/ч.

***Ответ***: 40 км/ч.

**Пример 5** Расстояние между пристанями $A$ и $B$ равно 60 км. Из $A$ в $B$ по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт $B$, тотчас повернула обратно и возвратилась в $A$. К этому времени плот прошёл 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

***Решение.*** Построим графическую модель по условию задачи в системе координат $tOS$. Отрезок $AF$ — график движения плота. Ломаная $CDE$ — график движения моторной лодки. Время движения плота $t = \frac{36}{4} = 9$ (ч). Значит, время движения моторной лодки $9 - 1 = 8$ (ч). С другой стороны, время движения лодки $CH + HE = \frac{60}{x+4} + \frac{60}{x-4}$.




Значит,

$$\frac{60}{x+4} + \frac{60}{x-4} = 8 \;\Big|\; \cdot \frac{(x+4)(x-4)}{4} \neq 0,$$

$15x - 60 + 15x + 60 = 2(x^2 - 16),$

$x^2 - 15x - 16 = 0,$

$x_1 = -1$ — не удовлетворяет условию $x > 0$,

$x_2 = 16.$

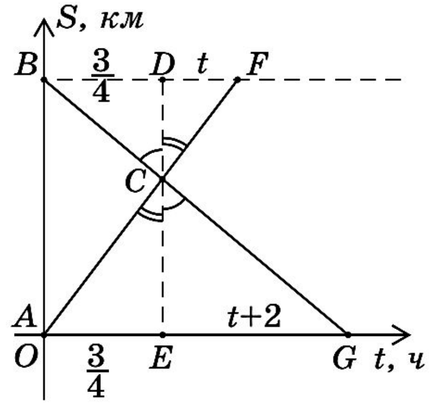
Если $x = 16$, то $(x + 4)(x - 1) \neq 0$.

Значит, собственная скорость лодки 16 км/ч.

***Ответ***: 16 км/ч.

**Пример 6** Из городов $A$ и $B$ навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в $B$ на 2 часа раньше, чем велосипедист приехал в $A$, а встретились они через 45 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из $B$ в $A$ велосипедист?

***Решение.*** Построим графическую модель по условию задачи в системе координат $tOS$. 45 мин $= \frac{3}{4}$ ч. Отрезок $AF$ — график движения мотоциклиста. Отрезок $BG$ — график движения велосипедиста. $AF$ пересекается с $BG$ в точке $C$. По условию, $AE = BD = \frac{3}{4}$ (ч).




Пусть $DF = t$ (ч), тогда $EG = (t + 2)$ ч. Рассмотрим подобные треугольники:

1) $\triangle BCD \backsim \triangle GCE$ (прямоугольные, с равными острыми углами при вершине $C$), поэтому $\frac{BD}{GE} = \frac{CD}{CE}$;

2) аналогично $\triangle FCD \backsim \triangle ACE$, поэтому $\frac{FD}{AE} = \frac{CD}{CE}$.

Значит, $\frac{BD}{GE} = \frac{FD}{AE}$. Откуда $\frac{\frac{3}{4}}{t+2} = \frac{t}{\frac{3}{4}}$,

$t(t+2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$,

$t^2 + 2t - \frac{9}{16} = 0$,

$\frac{D}{4} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$,

$t_{1,2} = -1 \pm \frac{5}{4}$;

$t_1 = -\frac{9}{4}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$, $t_2 = \frac{1}{4}$.

Время движения велосипедиста

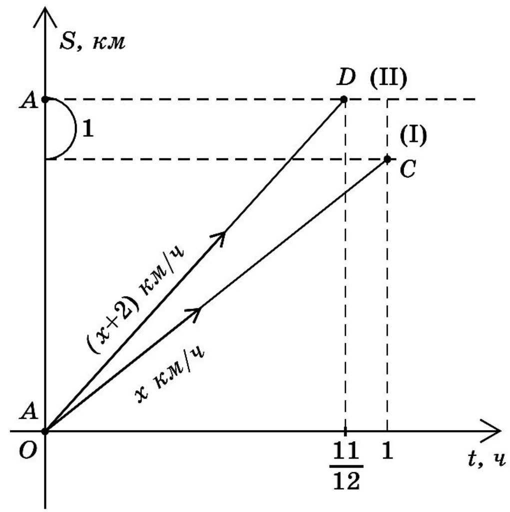
$AG = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 2 = 3$ (ч).

***Ответ:*** 3 ч.


**Пример 9** Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 5 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 2 км/ч меньше скорости второго.


**Пример 9** Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 5 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 2 км/ч меньше скорости второго.

***Решение.*** Построим графическую модель по условию задачи в системе координат $tOS$.




5 мин $= \frac{1}{12}$ ч, $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (ч).

Отрезок $AC$ — график движения первого бегуна. Отрезок $AD$ — график движения второго бегуна.

Пусть $x$ км/ч — скорость первого бегуна, $(x + 2)$ км/ч — скорость второго бегуна.

Тогда за 1 ч первый бегун пробежал $x$ км, что на 1 км меньше пути второго бегуна, который за $\frac{11}{12}$ ч пробежал $\frac{11}{12}(x + 2)$ км, поэтому

$\frac{11}{12}(x + 2) - x = 1 \quad \Big| \cdot 12,$

$11(x + 2) - 12x = 12,$

$x = 10.$

Значит, скорость первого бегуна 10 км/ч.

***Ответ***: 10 км/ч.

Автор учебных пособий по подготовке к ГИА по математике, канд. пед. наук Лариса Борисовна Крайнева


**Пример 10** Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 56 км/ч, а вторую — со скоростью 84 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

***Решение.*** Пусть половина трассы составляет $S$ км. Тогда время движения автомобиля по первой половине трассы $t_1 = \frac{S}{56}$ (ч), время движения по второй половине трассы — $t_2 = \frac{S}{84}$ (ч).

Средняя скорость движения автомобиля

$$\upsilon_{cp} = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{56} + \frac{S}{84}} = \frac{2S \cdot 28 \cdot 2 \cdot 3}{3S + 2S} = \frac{12 \cdot 28S}{5S} = 67{,}2 \ \text{(км/ч)}.$$

***Ответ***: 67,2 км/ч.


**Пример 12** Первая труба пропускает на 10 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 60 литров она заполняет на 3 минуты раньше, чем первая труба?

***Решение.*** Заполним таблицу по условию задачи:

| | Работа (л) | Производительность (л/мин) | Время (мин) |
|---|---|---|---|
| Первая труба | 60 | $x$ | $\frac{60}{x}$ |
| Вторая труба | 60 | $x+10$ | $\frac{60}{x+10}$ |

По условию, время работы второй трубы на 3 минуты меньше, поэтому

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3 \quad \Big| \cdot \frac{x(x+10)}{3} \neq 0,$$

$20x + 200 - 20x = x^2 + 10x,$

$x^2 + 10x - 200 = 0,$

$x_1 = -50$ — не удовлетворяет условию $x > 0$,

$x_2 = 40.$

Если $x = 40$, то $x(x+10) \neq 0$.

Если $x = 40$, то $x + 10 = 50$.

Значит, вторая труба пропускает 50 л в минуту.

***Ответ:*** 50 л.


**Пример 13** Игорь и Паша красят забор за 3 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 6 часов, а Володя и Игорь — за 4 часа. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроём?

***Решение.*** Заполним следующую таблицу по условию задачи:

| | Работа | Время работы (ч) | Производительность (ед/ч) |
|---|---|---|---|
| Игорь | 1 | $x$ | $\frac{1}{x}$ |
| Паша | 1 | $y$ | $\frac{1}{y}$ |
| Володя | 1 | z | $\frac{1}{z}$ |


Из условия задачи следует, что за 1 ч Игорь и Паша красят $\frac{1}{3}$ забора, Паша и Володя — $\frac{1}{6}$ забора, Володя и Игорь — $\frac{1}{4}$ забора.

Поэтому $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Сложим эти уравнения:

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4},$$

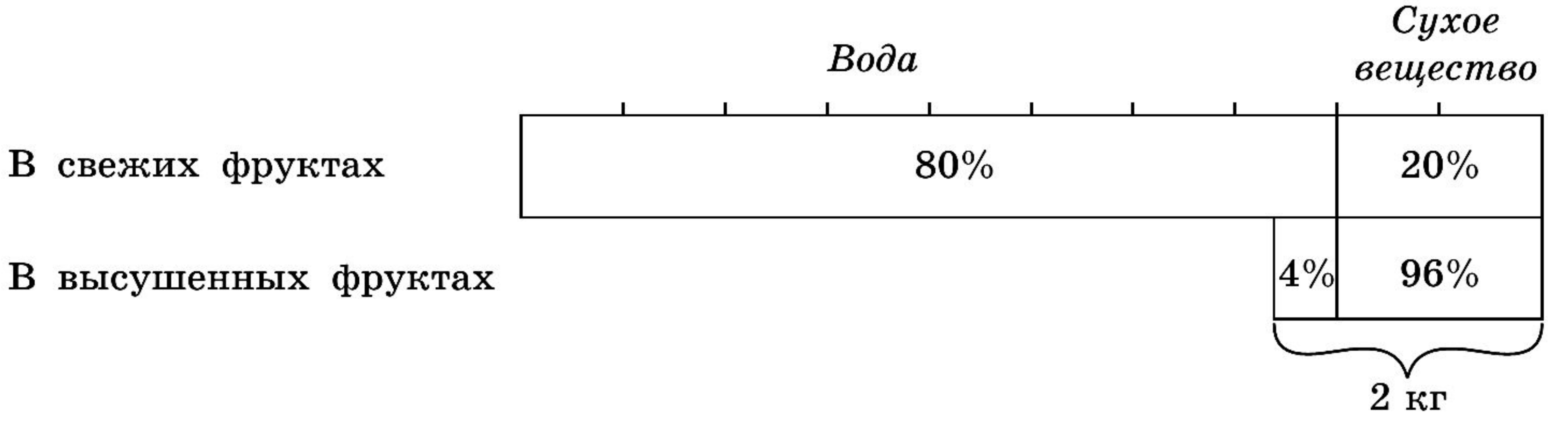
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{8}.$$

Тогда время совместной работы трёх мальчиков $\frac{8}{3}$ ч $= 2\frac{2}{3}$ ч $=$ 2 ч 40 мин.

***Ответ***: за 2 ч 40 мин.


**Пример 14** Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные — 4%. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 2 кг высушенных фруктов?

***Решение.*** Рассмотрим такую модель предложенной ситуации:




Значит, в высушенных фруктах $2 \cdot 0{,}96 = 1{,}92$ (кг) сухого вещества. Ровно столько же сухого вещества в свежих фруктах, что составляет 20% или $\frac{1}{5}$ часть свежих фруктов, значит, всего свежих фруктов понадобится $1{,}92 \cdot 5 = 9{,}6$ (кг).

***Ответ***: 9,6 кг.


**Пример 14** Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные — 4%. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 2 кг высушенных фруктов?

Аналогичное решение можно записать без предложенной модели, но с пояснениями:

1) $100 - 4 = 96\%$ — составляет сухое вещество в высушенных фруктах;
2) $2 \cdot 0{,}96 = 1{,}92$ (кг) — сухого вещества содержится в высушенных фруктах;
3) $100 - 80 = 20$ (%) или $\frac{1}{5}$ часть сухого вещества содержится в свежих фруктах;
4) $1{,}92 \cdot 5 = 9{,}6$ (кг) — необходимо свежих фруктов для приготовления 2 кг высушенных.

***Ответ***: 9,6 кг.

# ОГЭ-9. МАТЕМАТИКА
## Задания повышенного и высокого уровней сложности


**Пример 15** Смешали некоторое количество 11%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 21%-го раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

***Решение.*** Заполним следующую таблицу по условию задачи:

| | Всего раствора (кг) | Концентрация раствора | Чистого вещества |
|---|---|---|---|
| Первый раствор | $x$ | 0,11 | $0{,}11x$ |
| Второй раствор | $x$ | 0,21 | $0{,}21x$ |
| Третий раствор | $2x$ | $c = ?$ | $0{,}32x$ |

Тогда концентрация получившегося раствора $c = \dfrac{0{,}32x}{2x} = 0{,}16$. Значит, процентное содержание получившегося раствора 16%.

***Ответ***: 16%.


**Пример 16** Имеются два сосуда, содержащие 20 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 41% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 43% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

***Решение.*** Заполним таблицу по условию задачи:

| | 1-е условие | | | 2-е условие | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Всего раствора (кг) | Концентрация | Чистой кислоты (кг) | Всего раствора (кг) | Концентрация | Чистой кислоты (кг) |
| Первый раствор | 20 | $x$ | $20x$ | 1 | $x$ | $x$ |
| Второй раствор | 16 | $y$ | $16y$ | 1 | $y$ | $y$ |
| Третий раствор | 36 | 0,41 | $36 \cdot 0{,}41 = 14{,}76$ | 2 | 0,43 | $2 \cdot 0{,}43 = 0{,}86$ |

По этим условиям составим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 20x + 16y = 14{,}76, \\ x + y = 0{,}86. \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на $(-16)$ и сложим с первым уравнением:

$4x = 14{,}76 - 13{,}76,$

$x = 0{,}25.$

Следовательно, концентрация первого раствора равна 0,25, и $20 \cdot 0{,}25 = 5$ (кг) кислоты содержится в первом растворе.

***Ответ***: 5 кг.


# Задача 22

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1** Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 6 км от места отправления. Первый идёт со скоростью 4,5 км/ч, а второй — со скоростью 5,5 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. Найдите расстояние от опушки до места их встречи.

**2** Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 19 км. Турист прошёл путь из А в В за 5 часов, из которых спуск занял 4 часа. С какой скоростью турист шёл на спуске, если его скорость на подъёме меньше его скорости на спуске на 1 км/ч?

**3** Два автомобиля отправляются в 340-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 17 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

**4** Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч.


# *Задача 23*

**Пример 1** Найдите все значения $k$, при каждом из которых $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

***Решение.*** Условие задачи означает, что система уравнений $\begin{cases} y = kx, \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$ имеет единственное решение. Значит, уравнение $x^2 + 4 = kx$ имеет единственное решение. Найдём все значения $k$, при которых это выполняется:

$$x^2 - kx + 4 = 0,$$
$$D = k^2 - 16.$$

Квадратное уравнение имеет одно решение, если его дискриминант равен нулю:

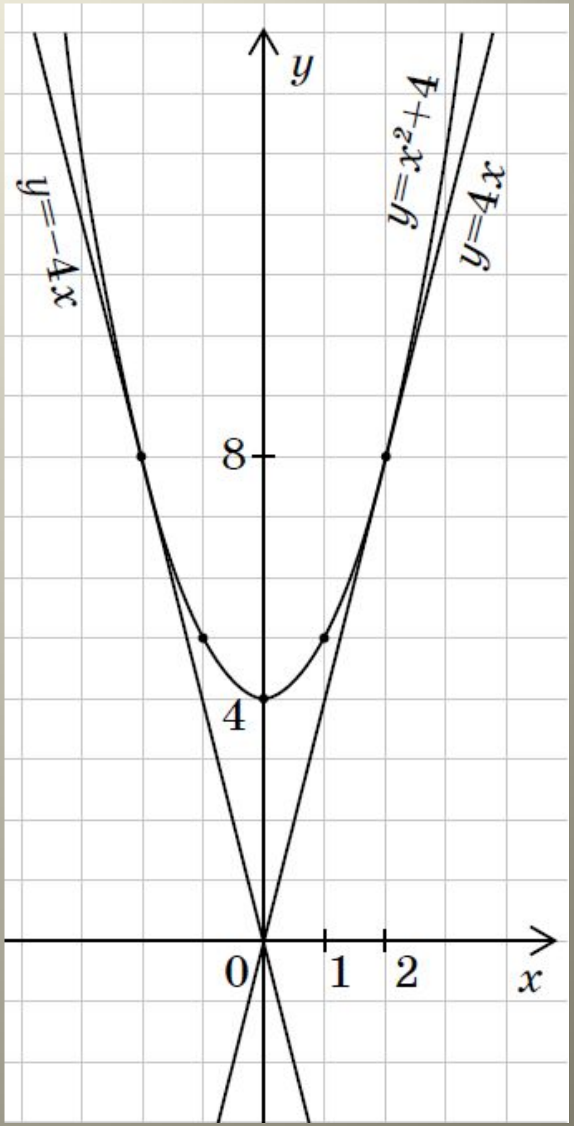
$$k^2 - 16 = 0,$$
$$k = \pm 4.$$

Следовательно, прямые $y = 4x$ и $y = -4x$ имеют с параболой $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку.


# Пример 1

Построим графики этих функций. Парабола $y = x^2 + 4$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси $Oy$ на 4 единицы вверх. Прямые $y = 4x$ и $y = -4x$ проходят через начало координат и, соответственно, точки (1; 4) и (–1; 4). Общие точки этих прямых с параболой (2; 8) и (–2; 8) соответственно (рис. 1).

***Ответ***: –4; 4.




# Пример 1

*Замечание.* Построим график функции $y = x^2 + 4$ другим способом.

Графиком функции $y = x^2 + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 1$, $a > 0$). Найдём координаты $m$ и $n$ вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0,$$

$n = y(0) = 4$. Значит, вершина параболы — точка (0; 4). Составим таблицу значений функции:

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 13 | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 | 13 |

Построив точки и соединив их плавной линией, получим график функции

$$y = x^2 + 4.$$

Прямые $y = 4x$ и $y = -4x$ построим по двум точкам, принадлежащим этим прямым, координаты которых запишем в соответствующих таблицах.

$y = 4x$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | 4 |

$y = -4x$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | −4 |

# ОГЭ-9. МАТЕМАТИКА

## Задания повышенного и высокого уровней сложности


**Пример 3** Постройте график функции $y = \dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

*Решение.* Преобразуем выражение: $\dfrac{2x+1}{2x^2+x} = \dfrac{2x+1}{x(2x+1)} = \dfrac{1}{x}$ при условии, что $2x+1 \neq 0$, то есть $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Значит, графиком данной функции является гипербола $y = \dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$ (рис. 3).

Прямая $y = kx$ имеет с построенным графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$.

В этом случае $k = \dfrac{y}{x} = 4$.

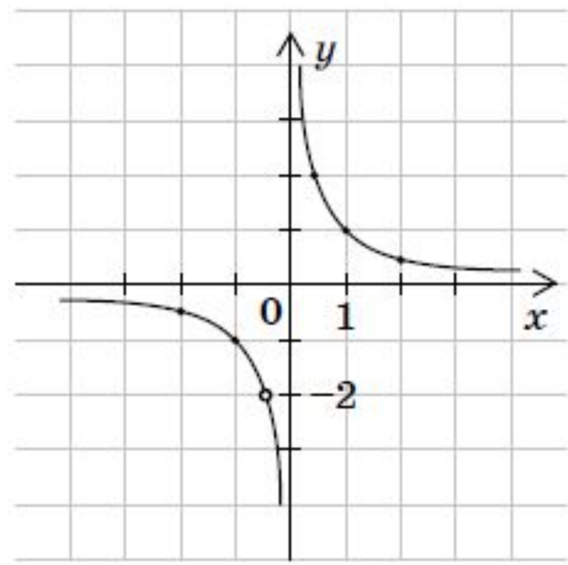



Рис. 3

*Ответ*: 4.


**Пример 17** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $9x^2 + 6xy + y^2 = 1$.

***Решение.*** Преобразуем левую часть уравнения: $(3x + y)^2 = 1$. Тогда

$3x + y = 1$ или $3x + y = -1$
$y = -3x + 1$ $\quad$ $y = -3x - 1$.

Следовательно, данное множество точек — две параллельные прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x - 1$ (их угловые коэффициенты $k_1 = k_2 = -3$).

Построим их (рис. 17).

$y = -3x + 1$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | –2 |

$y = -3x - 1$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | –1 | –4 |

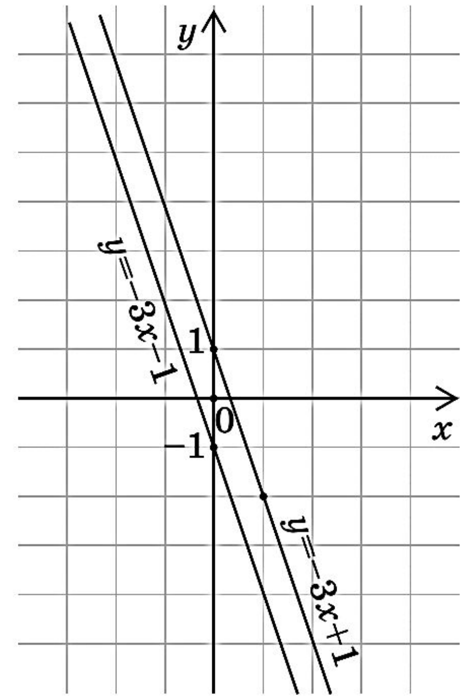



Рис. 17

***Ответ***: две прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x - 1$.


**Пример 19** Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2} = 0$.

***Решение.*** Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Поэтому

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^2 - y^2 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 \neq x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \neq \pm x. \end{cases}$$

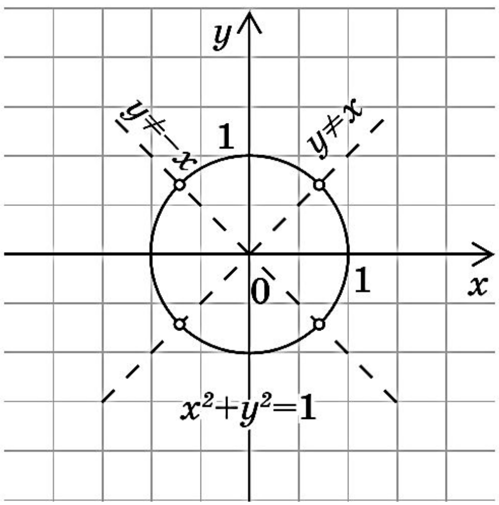



Рис. 19

$x^2 + y^2 = 1$ — уравнение окружности с центром в начале координат (0; 0) и радиусом $R = 1$;
$y = x$ и $y = -x$ — прямые (изображены на рис. 19 пунктирными линиями), пересекающие окружность $x^2 + y^2 = 1$ в четырёх точках.

Следовательно, данное множество точек — окружность с четырьмя выколотыми точками (рис. 19).

*Замечание.* Можно не указывать координаты выколотых точек, так как задача состоит в построении множества точек плоскости, удовлетворяющих данному уравнению.


# Задача 23

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1** Найдите все значения $k$, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 1$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

**2** Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 + 1)(x + 2)}{-2 - x}$ и определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**3** Постройте график функции $y = \dfrac{6x + 7}{6x^2 + 7x}$ и определите, при каких $k$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

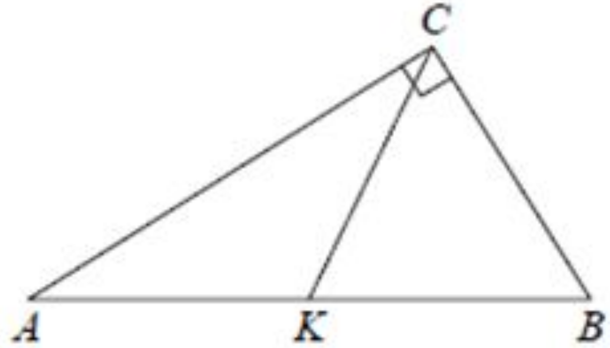
**4** Постройте график функции $y = 1 - \dfrac{x + 5}{x^2 + 5x}$ и определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

# Задача 24

**24** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ известны катеты: $AC=6$, $BC=8$. Найдите медиану $CK$ этого треугольника.

Решение.

$$CK=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+BC^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{36+64}=5.$$

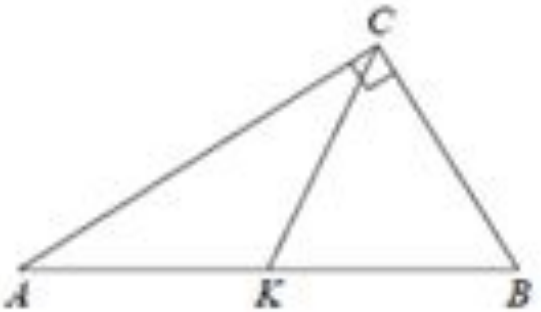



Ответ: 5.

| Баллы | Содержание критерия |
|---|---|
| 2 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ |
| 1 | Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | *Максимальный балл* |


# Задача 24

В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ известны катеты: $AC=6$, $BC=8$. Найдите медиану $CK$ этого треугольника.




Дано: $\Delta ABC$: $\angle ACB=90°$, $AC=6$, $BC=8$.
$CK$ – медиана.

Найти: длину $CK$.

Решение:

1. Треугольник $ABC$ – прямоугольный.

По теореме Пифагора, $AB^2=AC^2+CB^2$,
$AB^2=6^2+8^2=100$, $AB=10$.

2. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

$CK=\frac{1}{2}AB$, $CK=\frac{1}{2}\cdot 10=5$.

Ответ: $CK=5$.


# Работа эксперта по оцениванию заданий с развернутым ответом

**Этапы проверки** (*чего нет ни в одним рекомендациях*)

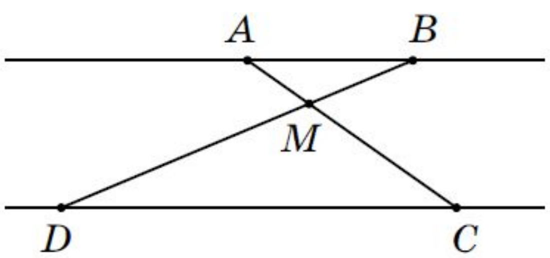
**Прокурор** – видит все, пересчитывает все, следит за логической последовательностью решения.

**Адвокат** – просчеты в решении пытается оправдать в пользу участника экзамена.

**Эксперт** – принимает решение – задача решена или не решена;
сколько баллов «стоит» решение в соответствии с критериями оценивания заданий с развернутым ответом.


# Задача 24

**Пример 1** Отрезки $AB$ и $DC$ лежат на параллельных прямых, а отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $M$. Найдите $MC$, если $AB = 14$, $DC = 42$, $AC = 52$.




***Решение.***

1) $\angle DCM = \angle BAM$ — накрест лежащие при параллельных прямых $AB$ и $DC$ и секущей $AC$;

2) $\angle DMC = \angle BMA$ — вертикальные.
Поэтому $\triangle DMC \backsim \triangle BMA$ (по двум углам).

2) Значит, $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{14}{42} = \dfrac{1}{3}$.

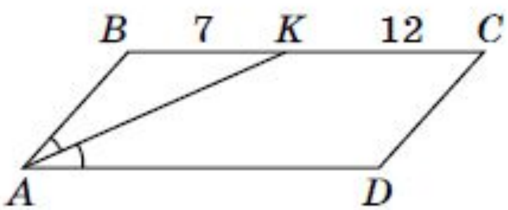
3) Следовательно, $AC = AM + MC = \dfrac{1}{3}MC + MC = \dfrac{4}{3}MC$.

Откуда $MC = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3 \cdot 52}{4} = 39$.

***Ответ***: 39.


**Пример 8** Биссектриса угла $A$ параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 12$.

*Решение.* Так как $AK$ — биссектриса $\angle BAD$, то $\angle BAK = \angle DAK$.




Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle BKA = \angle DAK$ — накрест лежащие при параллельных прямых $AD$ и $BC$ и секущей $AK$.

Значит, $\angle BAK = \angle DAK = \angle BKA$.

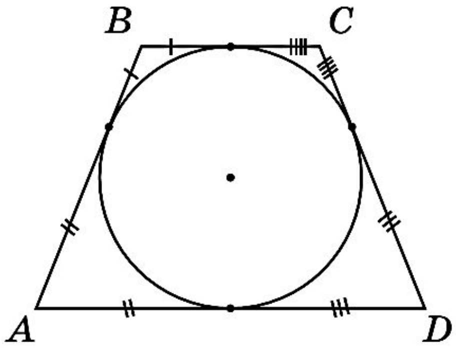
Значит, $\triangle BKA$ — равнобедренный и $AB = BK = 7$.

Периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(7 + 19) = 52$.

*Ответ*: 52.


**Пример 14** В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 16, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

***Решение.*** Пусть в трапецию $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ вписана окружность с центром в точке $O$. По свойству противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, $AD + BC = AB + CD = 16$. Значит, длина средней линии трапеции равна $\frac{AD + BC}{2} = \frac{16}{2} = 8$.




***Ответ***: 8.

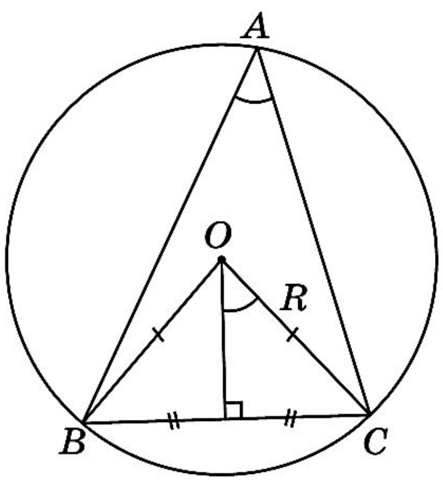
**Пример 16** Углы $B$ и $C$ треугольника $ABC$ равны соответственно $71^\circ$ и $79^\circ$. Найдите $BC$, если радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен 8.

***Решение.*** Пусть $R$ — радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности, тогда $R = \dfrac{BC}{2\sin A}$.

Откуда

$BC = 2R\sin A = 2 \cdot 8 \cdot \sin\left(180^\circ - (71^\circ + 79^\circ)\right) =$

$= 16 \cdot \sin 30^\circ = 8.$




***Ответ***: 8.

# Задача 24

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1** Отрезки $AB$ и $DC$ лежат на параллельных прямых, а отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $M$. Найдите $MC$, если $AB = 18$, $DC = 54$, $AC = 48$.

**2** Прямая, параллельная стороне $AC$ треугольника $ABC$, пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Найдите $AC$, если $BK : KA = 3 : 7$, $KM = 12$.

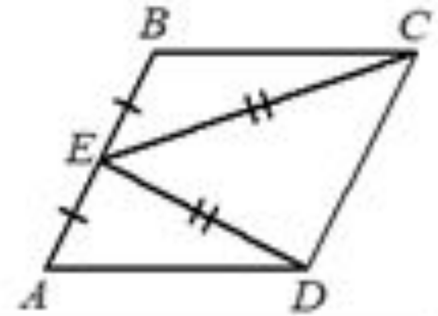
**3** Прямая, параллельная стороне $AC$ треугольника $ABC$, пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Найдите $BN$, если $MN = 16$, $AC = 20$, $NC = 15$.

**4** Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны $AB$ и $CD$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Найдите длину отрезка $EF$, если $AD = 50$, $BC = 30$, $CF : DF = 7 : 3$.

**5** Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.


# Задача 25

**25** В параллелограмме $ABCD$ точка $E$ — середина стороны $AB$. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.



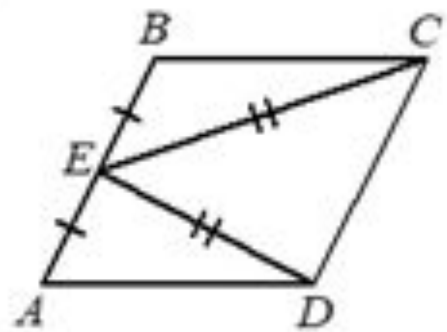

Доказательство.
Треугольники $BEC$ и $AED$ равны по трём сторонам. Значит, углы $CBE$ и $DAE$ равны. Так как их сумма равна $180°$, то углы равны $90°$. Такой параллелограмм — прямоугольник.

| Баллы | Содержание критерия |
|---|---|
| 2 | Доказательство верное, все шаги обоснованы |
| 1 | Доказательство в целом верное, но содержит неточности |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | *Максимальный балл* |


# Задача 25

В параллелограмме $ABCD$ точка $E$ — середина стороны $AB$. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $E$ – середина $AB$, $EC = ED$.
Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.




Доказательство.

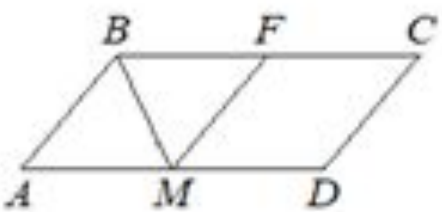
1. В треугольниках $BEC$ и $AED$:
$AD = BC$ по свойству параллелограмма;
$AE = BE$ по условию, $E$ – середина $AB$;
$CE = DE$ по условию.
Треугольники $AED$ и $BEC$ равны по трем сторонам, следовательно, $\angle EAD = \angle CBE$.
2. В параллелограмме $ABCD$ прямые $AD$ и $BC$ параллельны, $AB$ секущая, углы $BAD$ и $ABC$ односторонние, углы $\angle BAD + \angle ABC = 180°$.
3. Получили: $\angle BAD + \angle ABC = 180°$ и $\angle BAD = \angle ABC$, следовательно, $\angle BAD = 90°$.
4. В параллелограмме $ABCD$ с прямым углом все углы прямые, $ABCD$ – прямоугольник.


# Задача 25

## Пример 2

Сторона $AD$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $AB$. Точка $M$ — середина стороны $AD$. Докажите, что $BM$ — биссектриса угла $ABC$.

Доказательство.




Проведём прямую $MF$ параллельно стороне $AB$ (см. рисунок). Поскольку $AM = MD = AB$, параллелограмм $ABFM$ является ромбом, поэтому диагональ $BM$ ромба $ABFM$ делит угол $ABF$ пополам. Значит, $BM$ — биссектриса угла $ABC$.

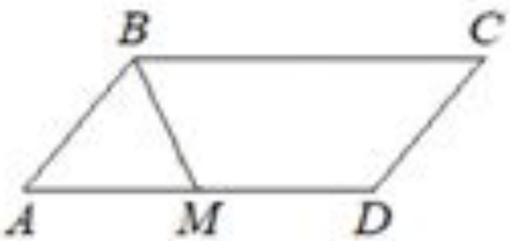
| Баллы | Содержание критерия |
|---|---|
| 2 | Доказательство верное, все шаги обоснованы |
| 1 | Доказательство в целом верное, но содержит неточности |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | *Максимальный балл* |


# Задача 25

## Пример 2

Сторона $AD$ параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $AB$. Точка $M$ — середина стороны $AD$. Докажите, что $BM$ — биссектриса угла $ABC$.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 2AB$, точка $M$ – середина $AD$.
Доказать: $BM$ — биссектриса угла $ABC$.



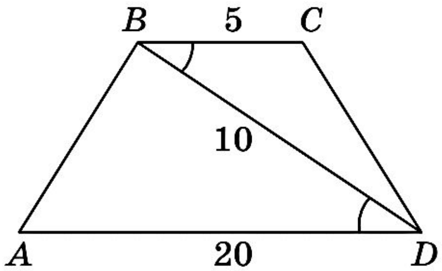

Доказательство.

1. Точка $M$ – середина $AD$: $AM = MD$;
$AD = 2AB$, следовательно, $AB = AM$.
2. В треугольнике $ABM$ стороны $AB$ и $AM$ равны – треугольник $ABM$ равнобедренный с основанием $BM$, следовательно, $\angle AMB = \angle ABM$.
3. В параллелограмме $ABCD$ прямые $AD$ и $BC$ параллельны, $BM$ секущая, $\angle ABM = \angle CBM$ как накрест лежащие.
4. Получили: $\angle AMB = \angle ABM$ и $\angle AMB = \angle CBM$, следовательно, $\angle AMB = \angle CBM$ и луч $BM$ – биссектриса угла $ABC$.


## ЗАДАЧА 25

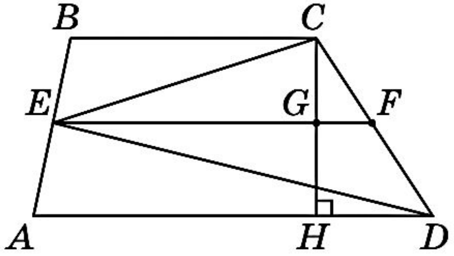
**Пример 1** Основания $BC$ и $AD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 20, $BD = 10$. Докажите, что треугольники $CBD$ и $BDA$ подобны.

***Решение.*** В треугольниках $CBD$ и $BDA$: $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{DA} = \frac{1}{2}$, $\angle CBD = \angle BDA$ (накрест лежащие при параллельных прямых $AD$ и $BC$ и секущей $BD$). Следовательно, треугольники $CBD$ и $BDA$ подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
Что и требовалось доказать.




**Пример 6** Точка $E$ — середина боковой стороны $AB$ трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника $ECD$ равна половине площади трапеции.

***Решение.*** Проведем среднюю линию $EF$ и высоту $CH$ трапеции $ABCD$, $EF$ и $CH$ пересекаются в точке $G$. По свойству средней линии трапеции $EF \parallel AD$, $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$.




Тогда

$S_{\triangle ECD} = S_{\triangle ECF} + S_{\triangle EDF} =$

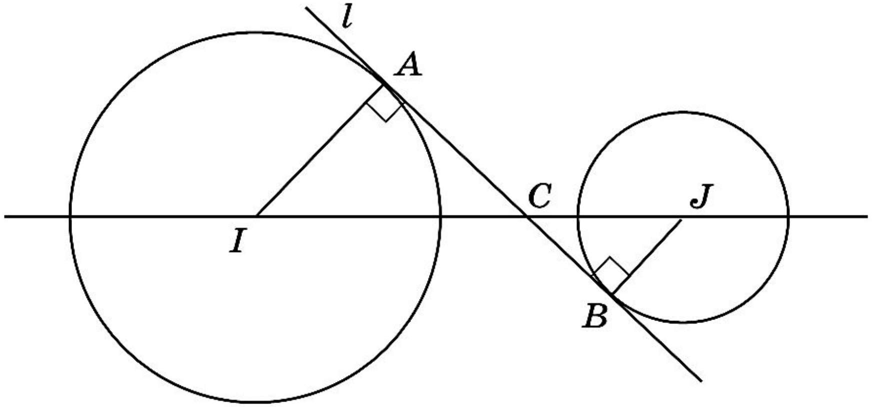
$= \dfrac{1}{2}EF \cdot CG + \dfrac{1}{2}EF \cdot GH = \dfrac{1}{2}EF(CG + GH) =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CH = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}.$

Что и требовалось доказать.


**Пример 14** Окружности с центрами в точках $I$ и $J$ не имеют общих точек, и окружности не лежат одна внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.

***Решение.*** Пусть прямая $l$ касается внутренним образом данных окружностей в точках $A$ и $B$ и пересекает отрезок $IJ$ в точке $C$. По условию $IC : JC = m : n$.




Прямоугольные треугольники $AIC$ и $BJC$ подобны по острому углу (при вершине $C$ $\angle ACI = \angle BCJ$ — вертикальные), следовательно, $\frac{IA}{JB} = \frac{IC}{JC} = \frac{m}{n}$.
Следовательно, диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.
Что и требовалось доказать.


# Задача 25

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1** Основания $BC$ и $AD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 4,5 и 18, $BD = 9$. Докажите, что треугольники $CBD$ и $BDA$ подобны.

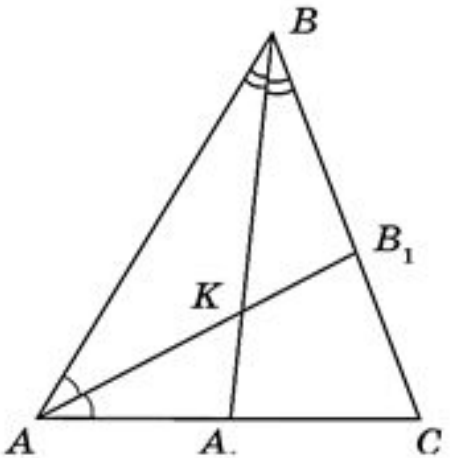
**2** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы $ABD$ и $ACD$ равны. Докажите, что углы $DAC$ и $DBC$ также равны.

**3** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ выбрали произвольную точку $K$. Докажите, что сумма площадей треугольников $BKC$ и $AKD$ равна половине площади трапеции.

**4** Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон $AD$ и $BC$ четырёхугольника пересекаются в точке $K$. Докажите, что треугольники $KAB$ и $KCD$ подобны.


# Задача 26

**Пример 3** Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 8 : 5, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 20.




***Решение.*** *Первый способ.* Пусть биссектрисы $AA_1$ и $BB_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $K$. По условию $AK : KA_1 = 8 : 5$, $BC = 20$. По свойству биссектрисы в $\triangle ABA_1$ $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AK}{KA_1} = \frac{8}{5}$, поэтому существует коэффициент пропорциональности $k$ отрезков $AB$ и $BA_1$, такой, что $AB = 8k$, $BA_1 = 5k$.

Тогда $A_1C = BC - BA_1 = 20 - 5k$.

$AA_1$ — биссектриса $\triangle ABC$, поэтому

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{20-5k}{5k} = \frac{4-k}{k}.$$

Значит, $AC = 8k \cdot \frac{4-k}{k} = 32 - 8k$.

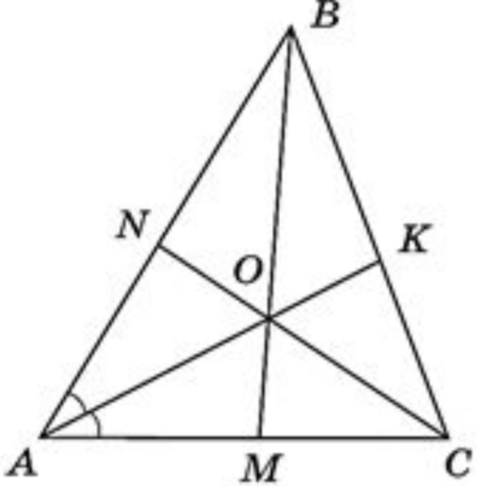
Тогда периметр треугольника $ABC$

$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 8k + 32 - 8k + 20 = 52$.

***Ответ:*** 52.

**Пример 3** Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 8 : 5, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 20.

***Ответ***: 52.




*Второй способ*. Пусть в треугольнике $ABC$ биссектриссы $AK$, $BM$, $CN$ пересекаются в точке $O$. Точка $O$ делит биссектриссу $AK$ в отношении $\frac{AO}{OK} = \frac{8}{5}$, а $BC = 20$.

Применяя к треугольнику $AKC$ теорему о биссектрисе, получим, что $\frac{AC}{CK} = \frac{AO}{OK} = \frac{8}{5}$.

Следовательно, $AC = \frac{8}{5}CK$.

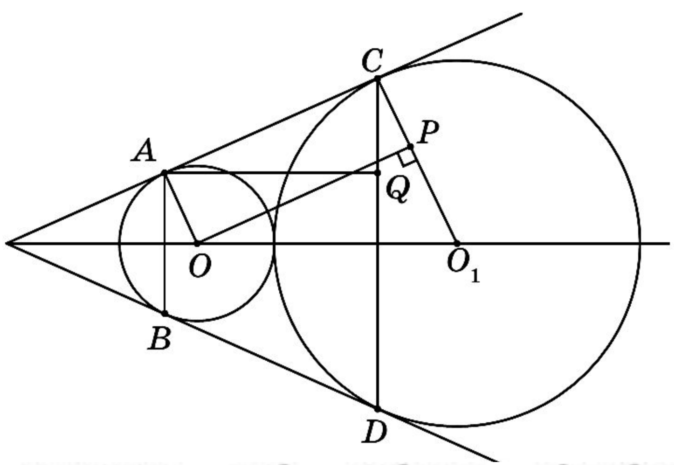
Тогда $AC + AB + BC = \frac{8}{5}CK + \frac{8}{5}BK + BC = \frac{8}{5}(CK + BK) + BC = \frac{13}{5}BC$,

$P_{\triangle ABC} = \frac{13}{5}BC = \frac{13 \cdot 20}{5} = 52$.

***Ответ***: 52.

**Пример 18** Окружности радиусов 27 и 54 касаются внешним образом. Точки $A$ и $B$ лежат на первой окружности, точки $C$ и $D$ — на второй. При этом $AC$ и $BD$ — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми $AB$ и $CD$.

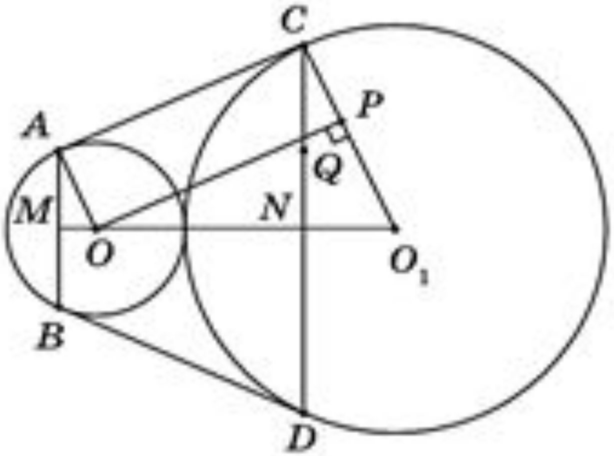
***Решение.*** *Первый способ.* Пусть $O$ и $O_1$ — центры данных окружностей, $r = 27$, $R = 54$ — их радиусы. Тогда $OO_1 = r + R = 27 + 54 = 81$.
Опустим перпендикуляр $OP$ из центра $O$ меньшей окружности на радиус $O_1C$ второй окружности. Тогда $O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 54 - 27 = 27$.
Из $\triangle OPO_1$: $\angle P = 90°$, $OP^2 = OO_1^2 - O_1P^2 = 81^2 - 27^2 = 27^2(9 - 1) = 27^2 \cdot 8$.
Так как $AOPC$ — прямоугольник, то $AC = OP$.
Опустим перпендикуляр $AQ$ из точки $A$ на прямую $CD$. Прямоугольные треугольники $AQC$ и $OPO_1$ подобны по двум углам, поэтому $\frac{AQ}{AC} = \frac{OP}{OO_1}$.




Следовательно, $AQ = \frac{OP \cdot AC}{OO_1} = \frac{OP^2}{OO_1} = \frac{27^2 \cdot 8}{81} = \frac{9^2 \cdot 3^2 \cdot 8}{9^2} = 72$.

***Ответ***: 72.

**Пример 18** Окружности радиусов 27 и 54 касаются внешним образом. Точки $A$ и $B$ лежат на первой окружности, точки $C$ и $D$ — на второй. При этом $AC$ и $BD$ — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми $AB$ и $CD$.

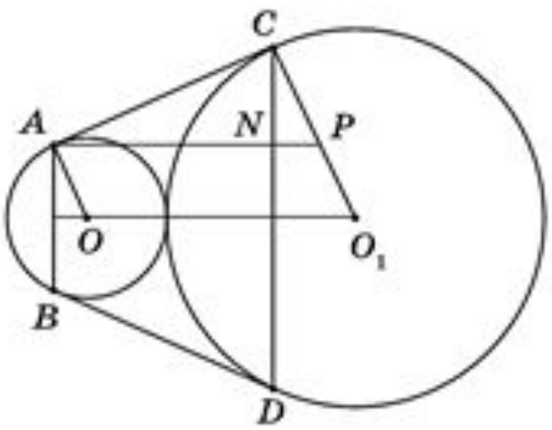



*Второй способ.* Прямая, проходящая через линию центров, является осью симметрии геометрической конфигурации, поэтому прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны прямой $OO_1$, следовательно, прямые $AB$ и $CD$ параллельны.
Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 81.
Опустим перпендикуляр $OP$ из центра меньшей окружности на радиус $O_1C$ второй окружности.
Тогда $O_1P = O_1C - PC = O_1P - OA = 54 - 27 = 27$.
Четырёхугольник $AOPC$ — прямоугольник. Из прямоугольного треугольника $OPO_1$ находим, что $\cos\angle PO_1O = \frac{1}{3}$.
В прямоугольных треугольниках $AMO$ и $CNO_1$ углы $MOA$ и $NO_1C$ равны углу $PO_1O$.
Следовательно,
$$MN = MO + OO_1 - NO_1 = AO \cdot \cos\angle MAO + OO_1 - CO_1 \cdot \cos\angle NCO_1 = 72.$$

*Ответ*: 72.


**Пример 18** Окружности радиусов 27 и 54 касаются внешним образом. Точки $A$ и $B$ лежат на первой окружности, точки $C$ и $D$ — на второй. При этом $AC$ и $BD$ — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми $AB$ и $CD$.

*Третий способ.* Прямая, проходящая через линию центров, является осью симметрии геометрической конфигурации, поэтому прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны прямой $OO_1$, следовательно, прямые $AB$ и $CD$ параллельны.




Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 81.

Поведём $AP$ параллельно $OO_1$. Треугольник $ACP$ прямоугольный, четырёхугольник $AOO_1P$ — параллелограмм.

Прямоугольный треугольник $ACP$ подобен прямоугольному треугольнику $ANC$ по двум углам, поэтому $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AC}{AP}$.

Следовательно,

$$AN = \frac{AC^2}{AP} = \frac{(CO_1 + AO)^2 - (CO_1 - AO)^2}{CO_1 + AO} = \frac{4CO_1 \cdot AO}{CO_1 + AO}.$$

Следовательно, $AN = \dfrac{4 \cdot 54 \cdot 27}{81} = 72.$

*Ответ*: 72.


# Задача 26

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1** Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

**2** Из вершины прямого угла $C$ треугольника $ABC$ проведена высота $CP$. Радиус окружности, вписанной в треугольник $BCP$, равен 39, тангенс угла $BAC$ равен $\frac{3}{4}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**3** Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 17 : 10, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 30.

**4** В треугольнике $ABC$ на его медиане $BM$ отмечена точка $K$ так, что $BK : KM = 7 : 3$. Прямая $AK$ пересекает сторону $BC$ в точке $P$. Найдите отношение площади треугольника $ABK$ к площади треугольника $ABC$.

**5** Медиана $BM$ и биссектриса $AP$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $K$, длина стороны $AC$ относится к длине стороны $AB$ как 9 : 4. Найдите отношение площади треугольника $AKM$ к площади четырёхугольника $KPCM$.


## ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

### ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

**Часть 2**

**Модуль «Алгебра»**

**21** Решите неравенство $(x - 7)^2 < \sqrt{11}(x - 7)$.

**22** Смешали некоторое количество 17-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 81-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

**23** Постройте график функции $y = -5 - \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x}$ и определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

**Модуль «Геометрия»**

**24** Отрезки $AB$ и $DC$ лежат на параллельных прямых, а отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $M$. Найдите $MC$, если $AB = 11$, $DC = 22$, $AC = 27$.

**25** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы $DAC$ и $DBC$ равны. Докажите, что углы $CDB$ и $CAB$ также равны.

**26** Две касающиеся внешним образом в точке $K$ окружности, радиусы которых равны 22 и 33, касаются сторон угла с вершиной $A$. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку $K$, пересекает стороны угла в точках $B$ и $C$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.


# ОТВЕТЫ

21.1. $-\frac{1}{3}$; 1.

21.2. $-1-\sqrt{5}$; $-1+\sqrt{5}$.

21.3. −5; 4.

21.4. −2; 3.

21.5. −4.

21.6. −3; −1; 1.

21.7. −2; −1; 1.

21.8. −14; −7; 0.

21.9. 0; 1,5; 3.

21.10. −5.

21.11. −1.

21.12. (−1; 1); (1; 1).

21.13. (2; −1); (2; 1).

21.14. (0; 0); $\left(\frac{1}{7};\ \frac{1}{7}\right)$.

21.15. (−4; −2); (−2; −4); (2; 4); (4; 2).


# Ответы

## Диагностическая работа №1

21. $(7;\ 7+\sqrt{11})$.
22. 49%.
23. $-5;\ -5{,}5$.
24. 18.
26. $\dfrac{99\sqrt{3}}{4}$.

## Диагностическая работа №2

21. $(0;\ 0)$, $(0{,}1;\ 0{,}1)$.
22. 400 м.
23. 4.
24. 20.
26. 32.

# ОГЭ-9. МАТЕМАТИКА
## Задания повышенного и высокого уровней сложности


ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

ФИПИ

ОГЭ

**Пособие разработано:**

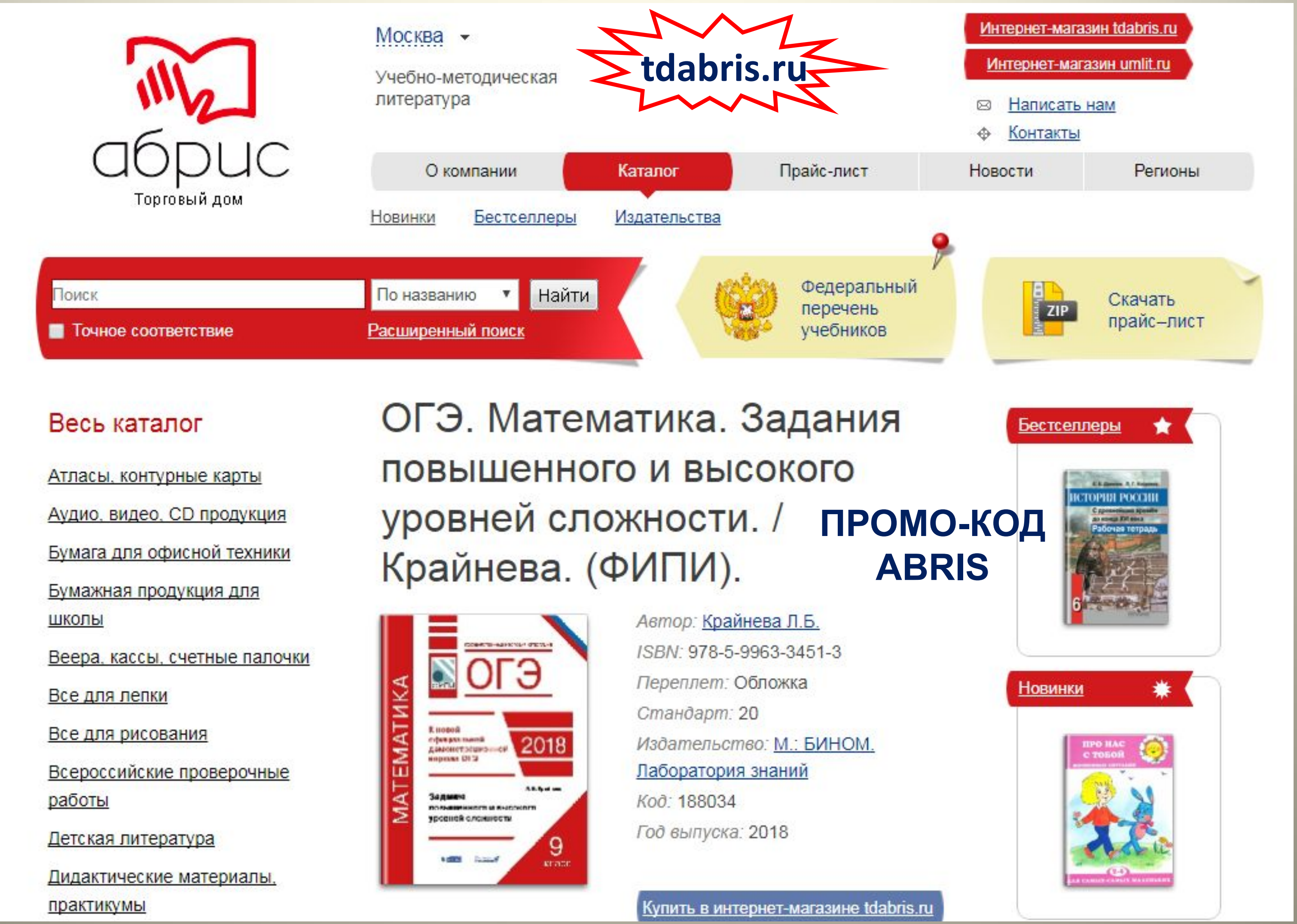
- для обучающихся общеобразовательных организаций с целью подготовки к написанию II части ГИА по математике в 9 классе за курс основной школы (ОГЭ),
- для учителей математики с целью организации учебного процесса.


**Материал заданий пособия:**

- охватывает все разделы курса математики основной школы,
- максимально приближен к возможному реальному варианту ОГЭ,
- составлен в соответствии со структурой и тематикой заданий второй части экзаменационной работы (№№ 21–26); представлены образцы решений этих задач (одним или несколькими способами);
- содержит тренировочные задания для самостоятельного решения,
- содержит 10 вариантов диагностических работ, составленных только из заданий 21–26,
- содержит справочные материалы, а также ответы ко всем задачам для самостоятельного решения.


Пособие получило положительную научно-методическую оценку ФГБНУ «Федерального института педагогических измерений» (ФГБНУ ФИПИ).

# КОНТАКТЫ для ПОКУПАТЕЛЕЙ




**МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА:**

**http://generationV.lbz.ru**
**http://metodist.lbz.ru**

**e-mail: generationV@lbz.ru**

Автор учебных пособий по подготовке к ГИА по математике, канд. пед. наук Лариса Борисовна Крайнева

# *Спасибо за внимание!!!*

# *Успехов! Здоровья!!!*

Автор учебных пособий по подготовке к ГИА по математике, канд. пед. наук Лариса Борисовна Крайнева