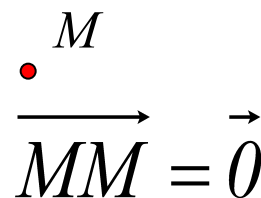
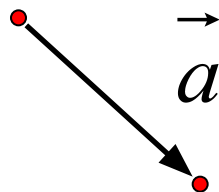
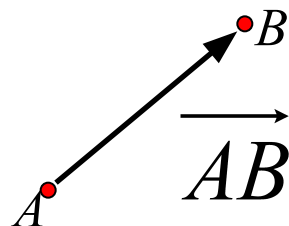


Векторы в пространстве

Понятие вектора в пространстве

Вектор(направленный отрезок) –

отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.



Длина вектора \overrightarrow{AB} – длина отрезка AB.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \quad |\vec{0}| = 0$$

Коллинеарные векторы

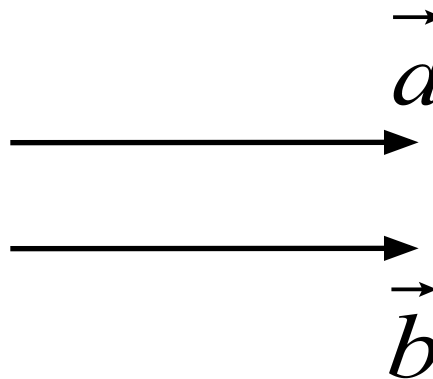
Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

Среди коллинеарных различают:

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы

Равные векторы

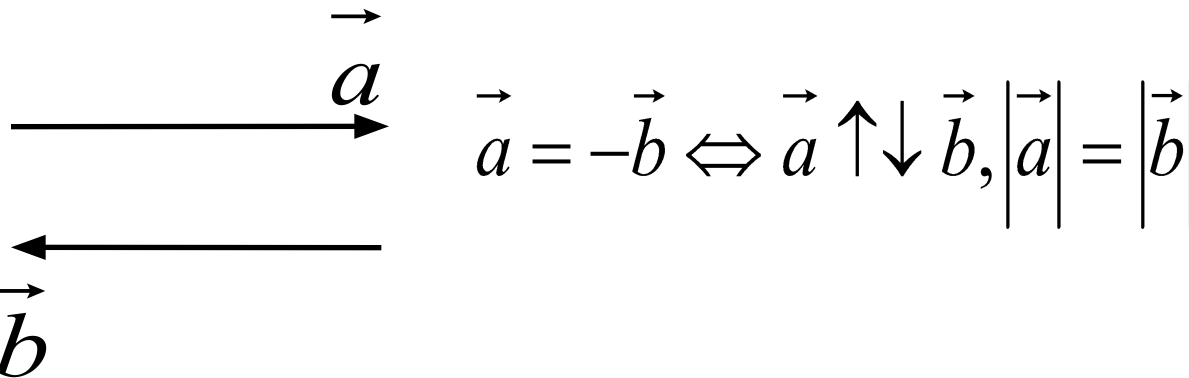
Равные векторы - сонаправленные векторы, длины которых равны.


$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Противоположные векторы

Противоположные векторы – противоположно направленные векторы, длины которых равны.



Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.

Признак коллинеарности

Если существует такое число k при котором выполняется равенство $\vec{a} = k\vec{b}$ и при том вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

вектор $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$

вектор $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$

Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число

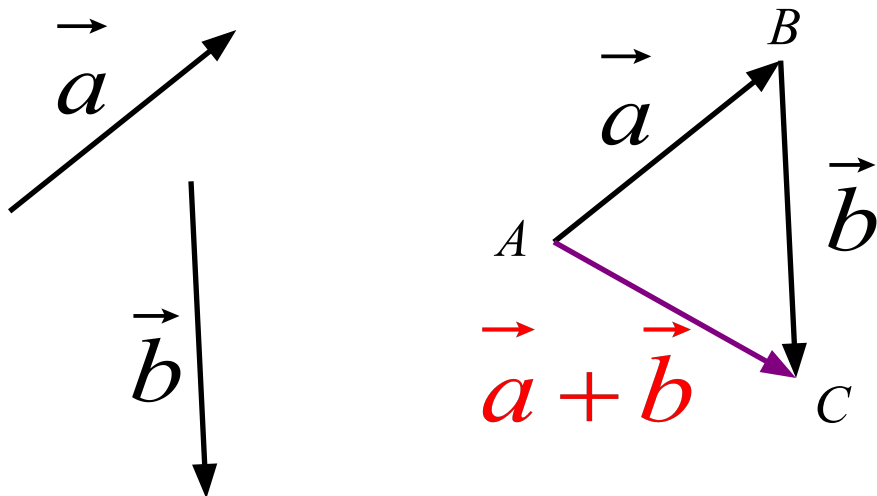
Сложение векторов

- [Правило треугольника](#)
- [Правило параллелограмма](#)
- [Правило многоугольника](#)
- [Правило параллелепипеда](#)

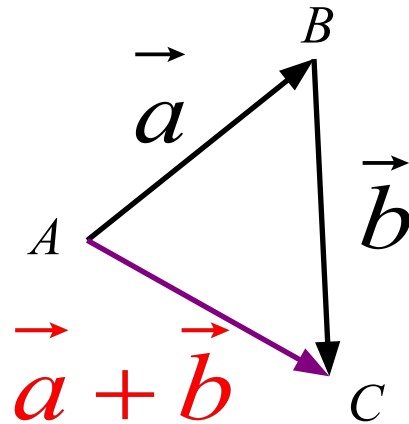
Правило треугольника

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор \overrightarrow{AB} , равный \vec{a}
2. от точки B отложить вектор \overrightarrow{BC} , равный \vec{b}
3. вектор \overrightarrow{AC} называется суммой векторов \vec{a} и \vec{b}



Правило треугольника



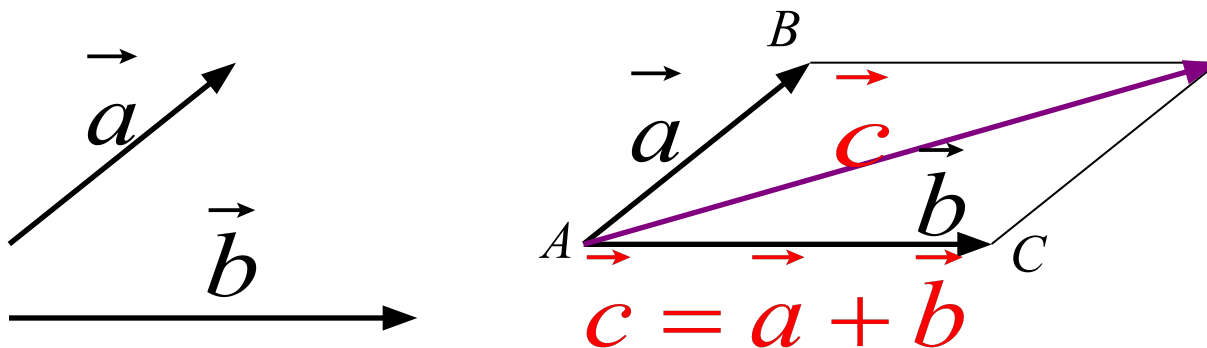
Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \underline{\vec{AC}}$$

Правило параллелограмма

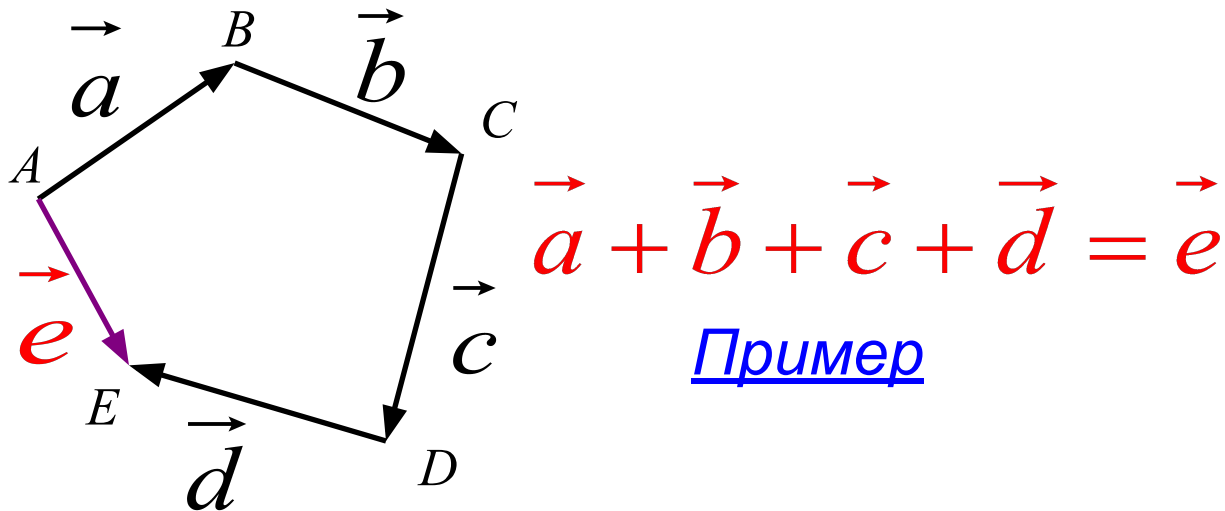
Для сложения двух векторов необходимо :

- 1. отложить от какой – нибудь точки A вектор \overrightarrow{AB} , равный \vec{a}*
- 2. от точки A отложить вектор \overrightarrow{AC} , равный \vec{b}*
- 3. достроить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам*
- 4. диагональ параллелограмма – сумма векторов*



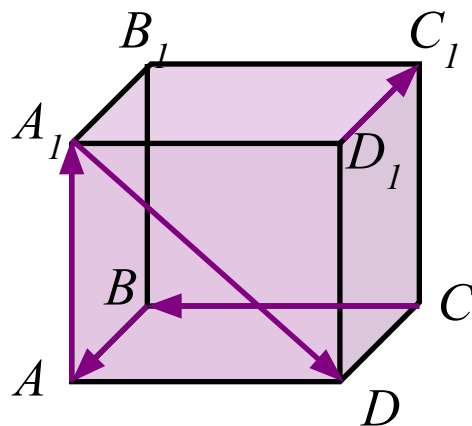
Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего (при последовательном откладывании).



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{\overrightarrow{AE}}$$

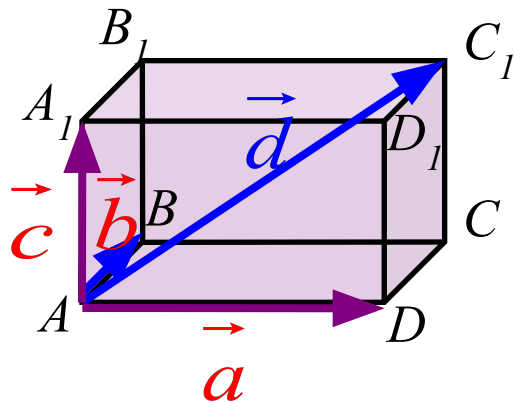
Пример



$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Правило параллелепипеда

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

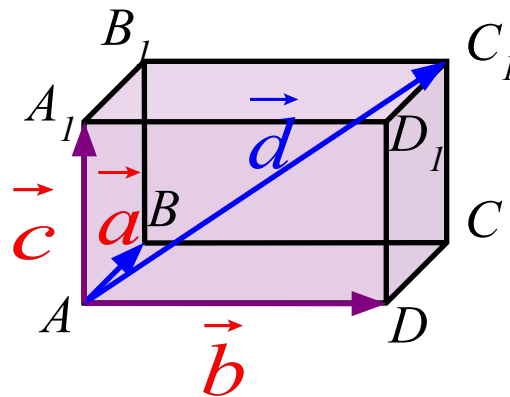
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$

Свойства



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ для любого параллелепипеда
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ для прямоугольного
параллелепипеда

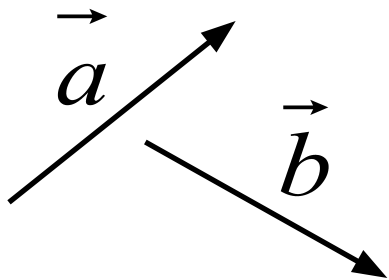
Вычитание

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} .

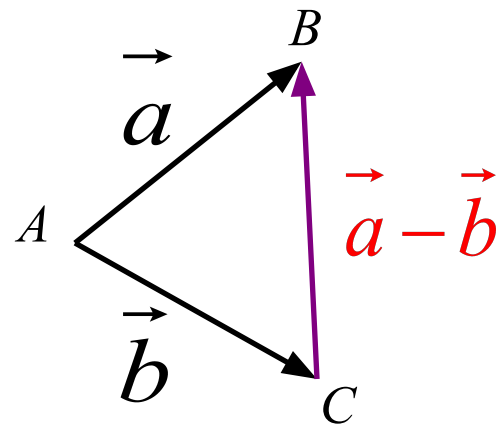
Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор \overrightarrow{AB} , равный \vec{a}
2. от этой же точки A отложить вектор \overrightarrow{AC} , равный \vec{b}
3. вектор \overrightarrow{CB} называется разностью векторов \vec{a} и \vec{b}

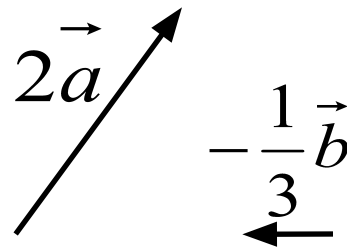
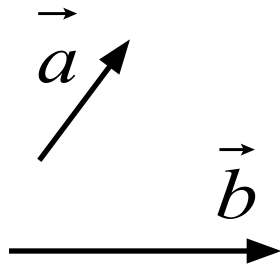


Правило трех точек



Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, при чем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.



Свойства

Для любых векторов \vec{a} и \vec{b} и любых чисел k, l справедливы равенства :

$$(\vec{k}l)\vec{a} = \vec{k}(\vec{l}a) \quad \text{сочетательный закон}$$

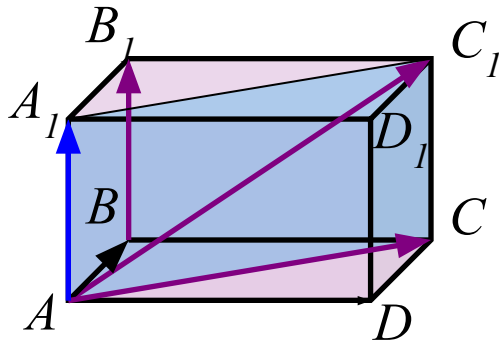
$$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}a + \vec{k}b \quad \text{1-ый распределительный закон}$$

$$(\vec{k} + \vec{l})\vec{a} = \vec{k}a + \vec{l}a \quad \text{2-ой распределительный закон}$$

Определение компланарных векторов

Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.

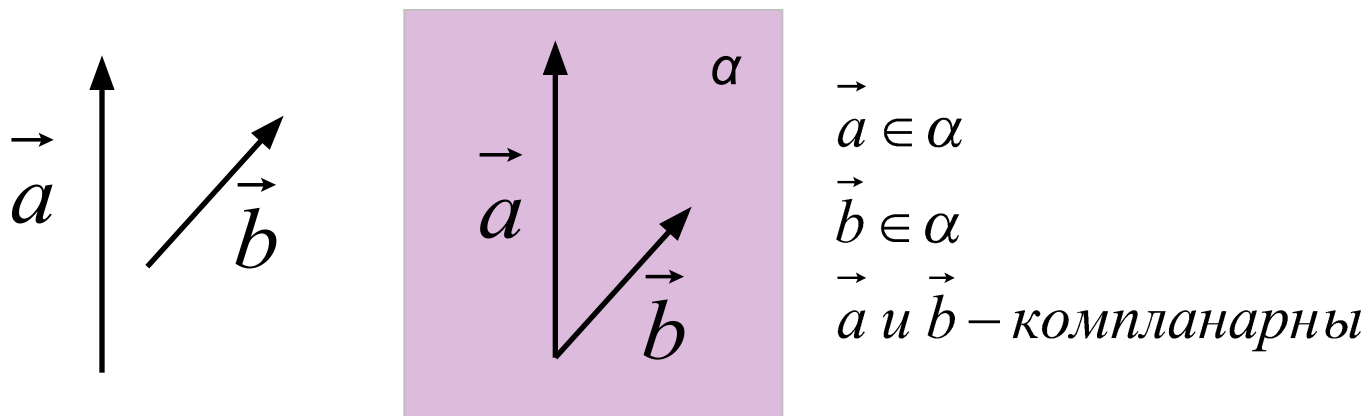
Пример:



$\vec{BB_1}, \vec{AC}, \vec{A_1C_1}$ – компланарны, т.к.
 $\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$, а векторы $\vec{AA_1}, \vec{AC}, \vec{A_1C_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)

О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.



Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

\vec{a}, \vec{b} и \vec{c} –

компланарны

если

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = k\vec{b}$

Признак компланарности

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

a) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$?

2.) *Известно, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.*

Компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

a)

б) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$;

$\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}, 2\vec{b} - 3\vec{c}$?

Решение

а) векторы \vec{a} и $2\vec{a}$ коллинеарны,
векторы \vec{b} и $3\vec{b}$ коллинеарны,
значит векторы \vec{a} , \vec{b} , $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ компланарны

б) векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} + \vec{b}$ компланарны,
векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны,
значит векторы \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны

Решение

а) если векторы \vec{a} , $2\vec{b}$, $3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n , что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом, значит векторы компланарны

Решение

б) если векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + 2\vec{c}) + y(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x\vec{a} + 2x\vec{c} + 2y\vec{b} - 3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1-x) + \vec{b}(1-2y) + \vec{c}(-2x+3y) = 0$$

$$\begin{cases} 1-x=0 \\ 1-2y=0 \\ 3y-2x=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,
значит векторы компланарны

Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Разложение вектора по трем некопланарным векторам

Если вектор \vec{p} представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y, z – некоторые числа, то говорят, что вектор

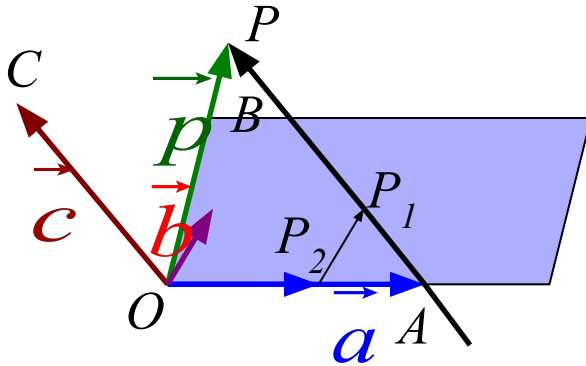
\vec{p} разложен по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство теоремы



Дано :

\vec{a} \vec{b} \vec{c} –

некомпланрные
векторы

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Доказательство :

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OC} = \vec{c} \quad \vec{OP} = \vec{p}$$

$$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2P_1 + \vec{P}_1P$$

\vec{OP}_2 , и \vec{OA} , \vec{P}_2P_1 и \vec{OB} , \vec{P}_1P , \vec{OC} – коллинеарны

$$\vec{OP}_2 = x \cdot \vec{OA}, \quad \vec{P}_2P_1 = y \cdot \vec{OB}, \quad \vec{P}_1P = z \cdot \vec{OC}$$

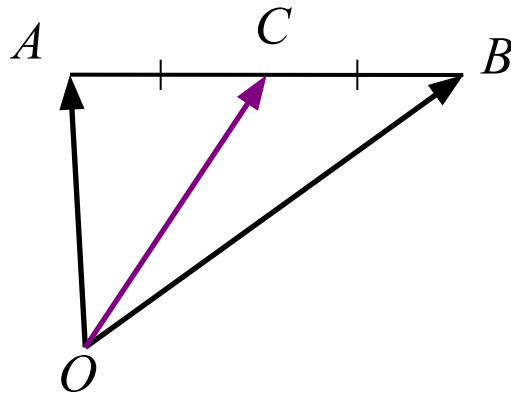
$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ ч.т.д.}$$

Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка,

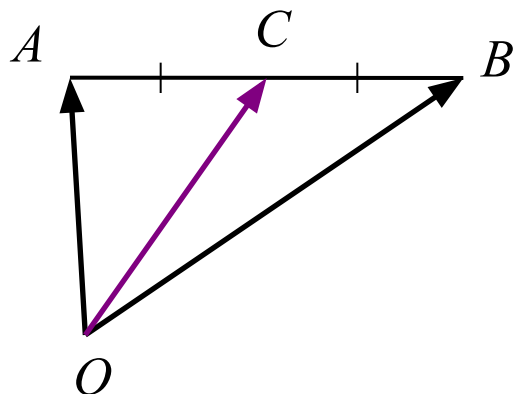
равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

[Доказательство](#)

Доказательство



Дано :

AB – отрезок

$AC = CB$

Доказать :

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} \\ \vec{OC} &= \vec{OB} + \vec{BC} \end{aligned} \right| +$$

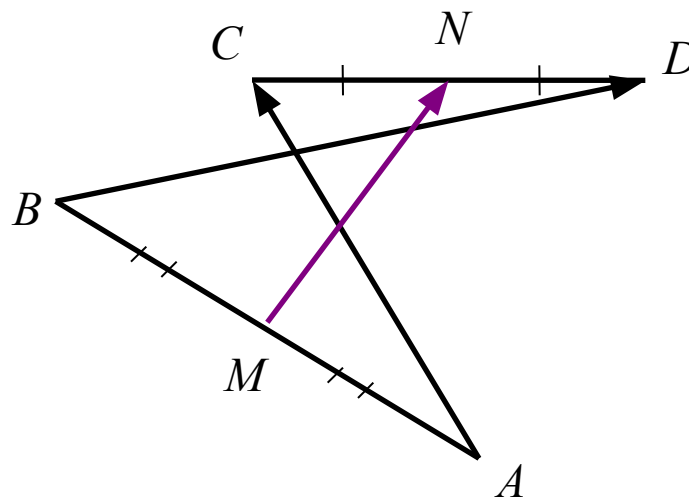
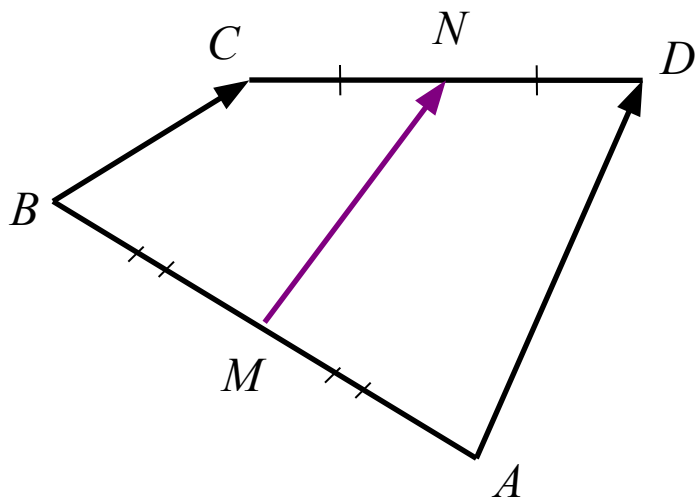
$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AC} + \vec{BC})$$

$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad | \div 2$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \quad | \text{ч.т.д.}$$

Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

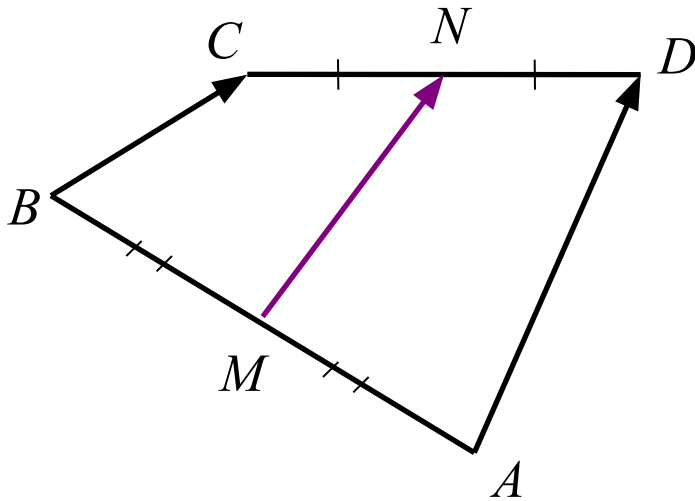
равен полусумме векторов, соединяющих их концы.



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

[Доказательство](#)

Доказательство



Дано :

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство :

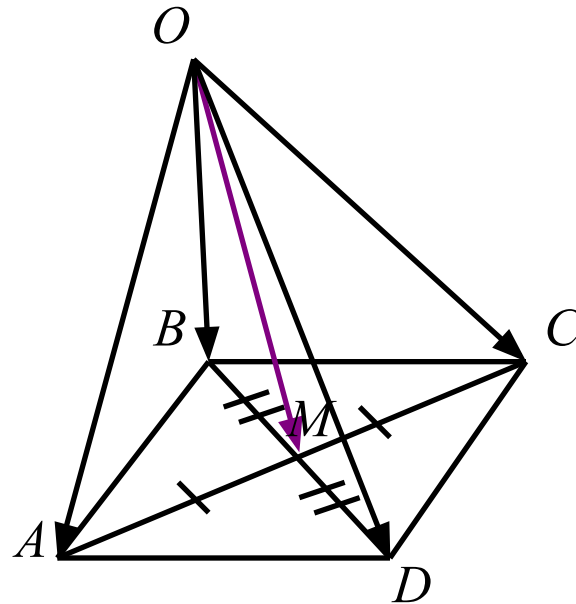
$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{aligned} \right\} +$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, проведенный в точку пересечения
диагоналей параллелограмма,

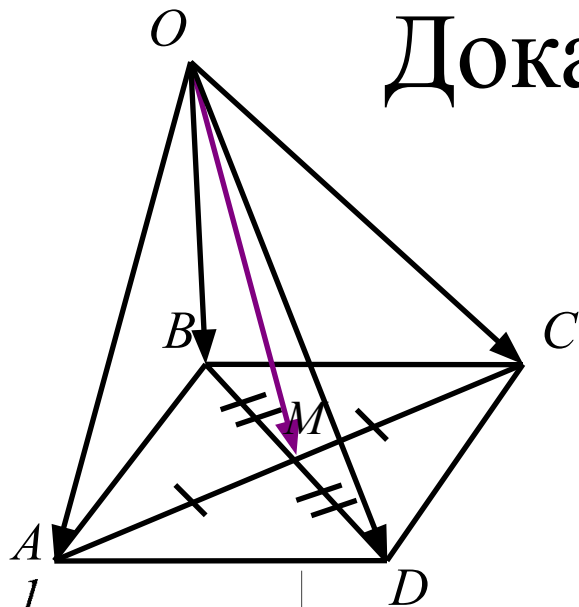
*равен одной четверти суммы векторов, проведенных
из этой точки в вершины параллелограмма.*



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

[Доказательство](#)

Доказательство



Дано :

$ABCD$ – пар – м

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned} \quad \Bigg| \quad +$$

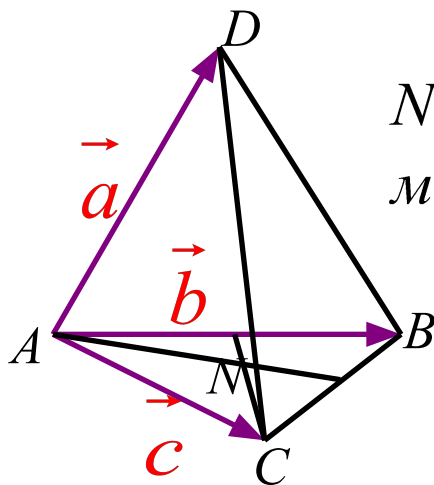
$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \quad \div. \dot{o}. \ddot{a}.$$

Задача 1. Разложение векторов

Разложите вектор по \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} :



N – точка пересечения
медиан $\triangle ABC$

a) \vec{AD}

б) \vec{DB}

в) \vec{CB}

г) \vec{DC}

Решение
 \vec{DN}

Решение

$$a) \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$b) \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$в) \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$г) \overrightarrow{DN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \right) =$$
$$= -\vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c}$$

Задача 2. Сложение и вычитание

Упростите выражения:

a) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK}$

б) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

в) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST}$

г) $\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK}$

д) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$

е) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$

Решение

Решение

$$a) \quad \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CK}$$

$$б) \quad \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA}$$

$$в) \quad \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TD}$$

$$г) \quad \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KL}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} &= \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} = \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} &= \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} = \\ &= \overrightarrow{AK} \end{aligned}$$