Интегральные характеристики светового поля. Средние освещенности по поверхности.

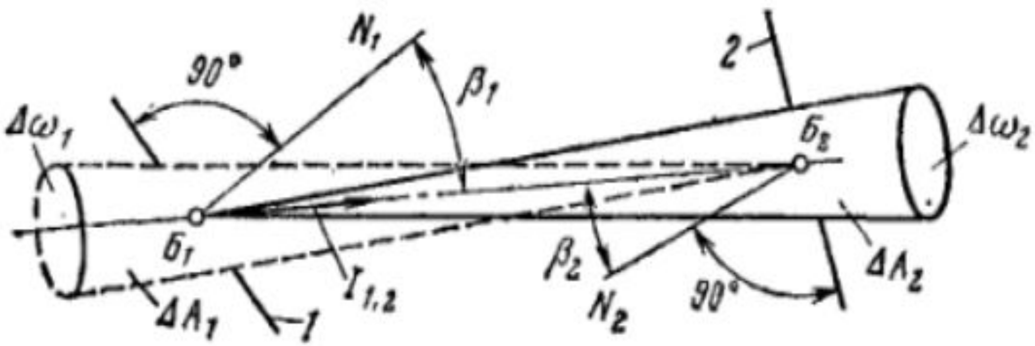
Выполнили студенты группы ЭР-04-14:

Панин Вячеслав

Петрова Кристина

Москва-2016

Яркость пучка лучей как характеристика светового поля



1) Световой поток лучей: $\Delta\Phi_2 = \Delta I_{12} \cdot \Delta\omega_2$

2) Телесный угол:

$$\Delta\omega_2 = \frac{\Delta A_2 \cdot \cos\beta_2}{{b_{12}}^2}$$

Тогда $\Delta\Phi_2 = \Delta I_{12} \cdot \Delta\omega_2 = \dfrac{L_{12} \cdot \Delta A_1 \cdot \Delta A_2 \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2}{{b_{12}}^2}$,где $\Delta I_{12} = L_{12} \cdot \Delta A_1 \cdot \cos\beta_1$

Тогда $L_{12} = \dfrac{\Delta\Phi_2 \cdot {b_{12}}^2}{\Delta A_1 \cdot \Delta A_2 \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2} = \dfrac{\Delta\Phi_2}{\Delta G}$,где ΔG– мера множества пучков

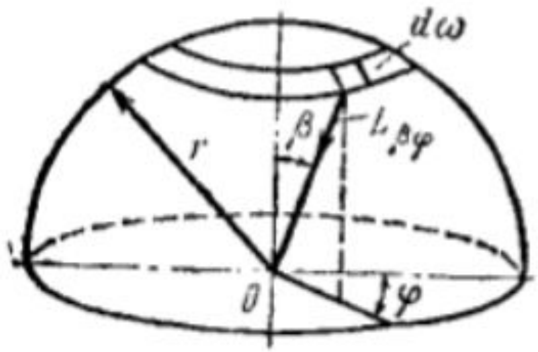
3) Яркость в направлении элементарного пучка лучей:

$$L_{12} = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta\omega_1 \cdot \Delta A_2 \cdot \cos\beta_2} = \frac{\Delta E_{н}}{\Delta\omega}$$

4) При малых площадях:

$$L_{12} \cdot d\omega = dE_{н}$$

Интегральная характеристика светового поля



Общий вид интегральной характеристики светового поля:

$$C = \int_{\omega} L_{\beta\varphi} \cdot f(\beta) d\omega$$

Где $L_{\beta\varphi}$ – *яркость пространства в направлении, определяемом углами* β *и* φ

$f(\beta)$ – *функция, определяющая ценность излучения, поступающего с данного направления на выбранную поверхность, расположенную в данной точке светового поля;*

$$f(\beta) = \frac{\sigma}{A}$$

$d\omega$ — *элементарный телесный угол, в пределах которого из данной точки пространства виден участок поверхности с яркостью* $L_{\beta\varphi}$

Если излучающие поверхности равнояркие, то: $C = L \int_{\omega} \cdot f(\beta) d\omega$

Интегральные характеристики светового поля

1. Освещенность плоскости *E*

Функция ценности: $f(\beta) = \dfrac{\Delta A \cdot \cos\beta}{\Delta A}$

Подставляем функцию ценности в формулу для общей интегральной характеристике светового поля

$$\mathrm{C} = \int_{\omega} L_{\beta\varphi} \cdot f(\beta) d\omega$$

т. к. $L_{\beta\varphi} \cdot d\omega = dE_{н}$

Получаем освещенность: $E = \int_{\omega} L_{\beta\varphi} \cdot cos\beta d\omega = \int_{\omega} dE_{н} cos\beta$

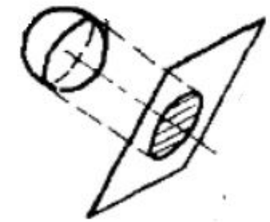
2. Пространственная освещенность E_0 (Вебер, 1916 г)

Функция ценности: $f(\beta) = 1$

$$E_0 = \int_{\omega} L_{\beta\varphi} d\omega = \int_{\omega} dE_{н}$$

3) Средняя сферическая освещенность $E_{4\pi}$ (Гершун)

Функция ценности:



$$f(\beta) = \frac{\sigma}{A} = \frac{\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

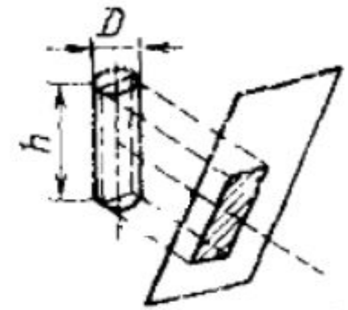
$$E_{4\pi} = \frac{1}{4}\int_{\omega} L_{\beta\varphi} d\omega = \frac{1}{4}\int_{\omega} dE_{н} = \frac{1}{4}\cdot E_0$$

$$S_{шара} = 4\pi r^2$$

$$S_{круга} = \pi r^2$$

4) Средняя цилиндрическая освещенность $E_{ц}$

Функция ценности:



$$f(\beta) = \frac{h \cdot d \cdot \cos\beta}{\pi \cdot h \cdot d} = \frac{\cos\beta}{\pi}$$

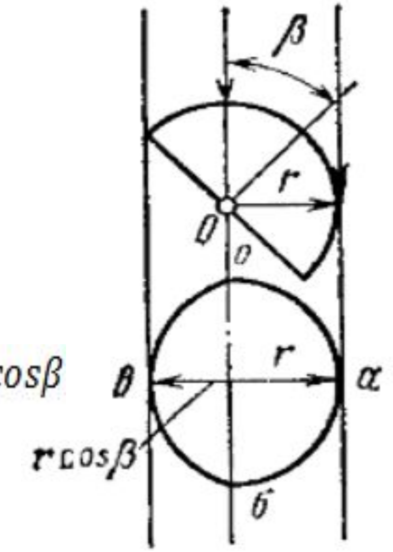
$$E_{ц} = \int_{\omega} L_{\beta\varphi} \frac{\cos\beta}{\pi} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{\omega} dE_{н} cos\beta$$

$$S_{бок} = 2\pi r h = \pi d h$$

$$S_{бокпр} = hdcos\beta$$

5) Средняя полусферическая освещенность $E_{2\pi}$

Функция ценности:



$$\sigma = \frac{1}{2}\pi r^2 cos\beta + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2(1 + cos\beta)$$

$$A = 2\pi r^2$$

$$S_{\text{эллипса}} = \pi r R = \pi r^2 cos\beta$$

$$S_{\text{полукруга}} = \frac{1}{2}\pi r^2$$

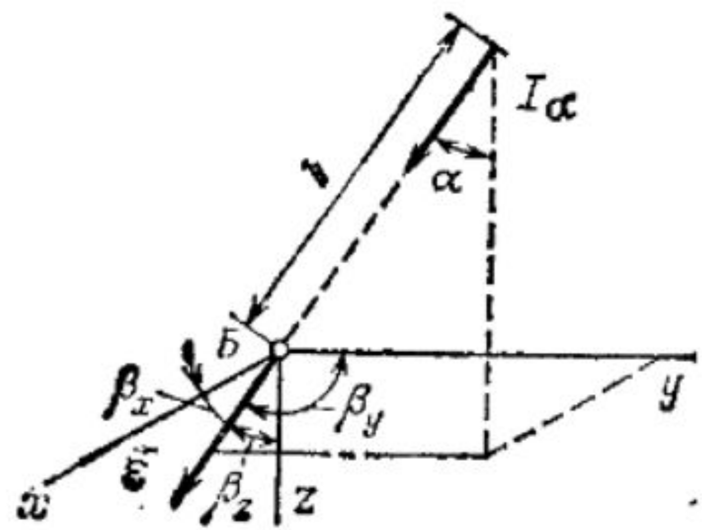
$$f(\beta) = \frac{\sigma}{A} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2(1 + cos\beta)}{2\pi r^2} = \frac{\pi r^2}{4\pi r^2}(1 + cos\beta) = \frac{1}{4}(1 + cos\beta)$$

$$E_{2\pi} = \frac{1}{4}\int_\omega L_{\beta\varphi} \cdot (1 + \cos\beta)\, d\omega = \frac{1}{4}\left[\int_\omega L_{\beta\varphi} d\omega + \int_\omega L_{\beta\varphi} cos\beta d\omega\right] = \frac{1}{4}\left[\int_\omega dE_н + \int_\omega dE_н cos\beta\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot E_0 + \frac{1}{4}\int_\omega dE_н cos\beta = E_{4\pi} + \frac{1}{4}\int_\omega dE_н cos\beta$$

где $\frac{1}{4}\int_\omega dE_н \cos\beta$ — *освещенность плоскости основания полусферы*

Интегральные характеристики в поле точечного источника света



1. Пространственная освещенность:

$$E_0 = \frac{I_\alpha}{b^2}$$,где $I_\alpha = I_0 \cdot \cos\alpha$

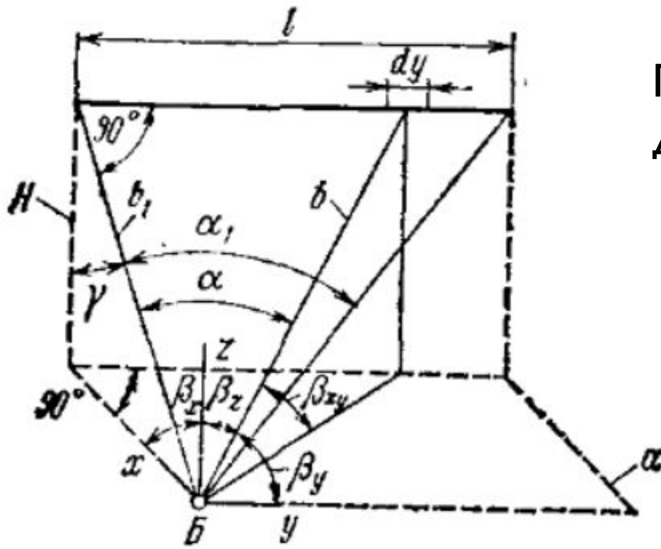
2. Средняя сферическая освещенность:

$$E_{4\pi} = \frac{I_\alpha}{4b^2} = \frac{E_н}{4}$$

3. Средняя полусферическая освещенность : $E_{2\pi} = E_{4\pi} + \frac{1}{4} E_н \cos\beta$

4. Средняя цилиндрическая освещенность: $E_ц = \frac{E_н}{\pi} \cos\beta$

Интегральные характеристики в поле линейного источника света с произвольным светораспределением



Продольная кривая силы света участка длиной $d\gamma$ линейного источника света:

$$dI_{\gamma\alpha} = I_{\gamma} \cdot (\cos\alpha)^{N} d\gamma$$

Нормальная освещенность в точке Б:

$$dE_{н} = \frac{dI_{\gamma\alpha}}{b^2} = \frac{I_{\gamma} \cdot (\cos\alpha)^{N} d\gamma}{b^2}$$

Из геометрии: $b = \dfrac{b_1}{\cos\alpha}$; $\quad y = b_1 \cdot tg\alpha$; $\quad dy = b_1 \cdot \dfrac{d\alpha}{\cos\alpha^2}$;

$\cos\beta_x = \dfrac{a}{b} = \sin\gamma \cdot \cos\alpha$; $\quad \cos\beta_y = \sin\alpha$; $\quad \cos\beta_z = \dfrac{H}{b} = \cos\gamma \cdot \cos\alpha$;

В итоге: $$dE_{н} = \frac{dI_{\gamma\alpha}}{b_1} (\cos\alpha)^{N} d\alpha$$

1. Пространственная освещенность:

$$E_0 = \frac{I_\gamma}{b_1}\int_0^{\alpha_1}(\cos\alpha)^N d\alpha$$

2. Средняя сферическая освещенность:

$$E_{4\pi} = \frac{E_0}{4}$$

3. Средняя полусферическая освещенность:

Используем выражения:

$$\left.\begin{aligned} E_{2\pi} &= E_{4\pi} + \frac{1}{4}E_н \cos\beta \\ dE_н &= \frac{dI_{\gamma\alpha}}{b_1}\cos\alpha^N d\alpha \end{aligned}\right\}$$

$$E_{2\pi} = E_{4\pi} + \frac{1}{4}\frac{I_{\gamma\alpha}}{b_1}\int_0^{\alpha_1}(\cos\alpha)^N \cos\beta_z\, d\alpha = E_{4\pi} + \frac{I_{\gamma\alpha}}{4b_1}\cos\gamma\int_0^{\alpha_1}(\cos\alpha)^{N+1}\alpha d\alpha$$

4. Средняя цилиндрическая освещенность:

Используем выражения:

$$\left.\begin{aligned} E_ц &= \frac{E_н}{\pi}\cos\beta \\ dE_н &= \frac{dI_{\gamma\alpha}}{b_1}(\cos\alpha)^N d\alpha \end{aligned}\right\}$$

$$E_ц = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_1} dE_н \cos\beta_{xy} = \frac{I_\gamma}{\pi b_1}\int_0^{\alpha_1}\cos^N\alpha\cos\beta_{xy}\, d\alpha =$$

$$= \frac{I_\gamma}{\pi b_1}\int_0^{\alpha_1}\cos^N\alpha\sqrt{1-\cos^2\gamma\cos^2\alpha}\, d\alpha,$$

учитываем при этом, что $\cos\beta_{xy} = \sin\beta_z = \sqrt{1-\cos^2\gamma\cos^2\alpha}$

Интегральные характеристики в поле равнояркого линейного источника света.

N=1, если линейный источник равнояркий

$$dE_н = \frac{dI_{\gamma\alpha}}{b^2} = \frac{I_\gamma \cdot (\cos\alpha)^N d\gamma}{b^2}$$

$$\cos\beta_z = \frac{H}{b} = \cos\gamma \cdot \cos\alpha$$

$$E_{4\pi} = \frac{E_0}{4}$$

$$E_{2\pi} = E_{4\pi} + \frac{1}{4}\frac{I_{\gamma\alpha}}{b_1}\int_0^{\alpha_1}(\cos\alpha)^N \cos\beta_z \, d\alpha = E_{4\pi} + \frac{I_{\gamma\alpha}}{4b_1}\cos\gamma \int_0^{\alpha_1}(\cos\alpha)^{N+1}\alpha d\alpha$$

Получаем:

Пространственная и средняя сферическая освещенности:

$$E_0 = \frac{I_\gamma}{b_1} \int_0^{\alpha_1} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{I_\gamma}{b_1} \sin\alpha_1;$$

$$E_{4\pi} = E_0/4.$$

Средняя полусферическая освещенность с горизонтальной ориентацией:

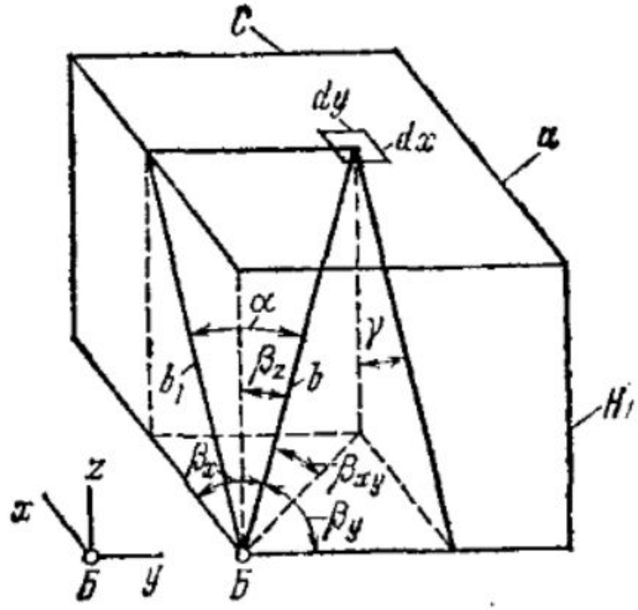
$$E_{2\pi} = E_{4\pi} + \frac{I_\gamma \cos\gamma}{4b_1} \int_0^{\alpha_1} \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{I_\gamma}{4b_1} \times$$

$$\times \left[\sin\alpha_1 + \cos\gamma \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\sin 2\alpha_1}{4}\right)\right].$$

Средняя цилиндрическая освещенность:

$$E_ц = \frac{I_\gamma}{\pi b_1} \int_0^{\alpha_1} \cos\alpha \sqrt{1 - \cos^2\gamma \cos^2\alpha}\, d\alpha.$$

Интегральные характеристики светового поля горизонтально расположенного прямоугольника с произвольным светораспределением



Площадь выделенного участка: $dA = dx \cdot dy$

Сила света, излучаемая этим участком:

$$dI_{\gamma\alpha} = L_0 \cdot dx \cdot dy \cdot (\cos\alpha)^N \cdot (\cos\gamma)^M$$

Нормальная освещенность в точке Б:

$$dE_н = \frac{dI_{\gamma\alpha}}{b^2} = \frac{L_0\, dx\, dy \cos^N\alpha \cos^M\gamma}{H^2 + x^2 + y^2},$$

где

$$\cos\alpha = \frac{b_1}{b} = \frac{\sqrt{H^2 + x^2}}{\sqrt{H^2 + x^2 + y^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{H}{\sqrt{H^2 + x^2}}.$$

При этом

$$dE_н = \frac{L_0\, dx\, dy \left(\sqrt{H^2 + x^2}\right)^N H^M}{\left(\sqrt{H^2 + x^2 + y^2}\right)^{N+2} \left(\sqrt{H^2 + x^2}\right)^M}$$

Разделив числитель и знаменатель этого выражения на H^{N+M+2}, запишем его в относительных величинах $n = x/H$ и $m = y/H$:

$$dE_н = \frac{L_0\, dn\, dm}{\left(\sqrt{1 + n^2 + m^2}\right)^{N+2} \left(\sqrt{1 + n^2}\right)^{M-N}}$$

1. Пространственная освещенность: $E_0 = L_0 \int\limits_0^{n_1} \int\limits_0^{m_1} \frac{dn\ dm}{\left(\sqrt{1+n^2+m^2}\right)^{N+2} \left(\sqrt{1+n^2}\right)^{M-N}}$

2. Средняя сферическая освещенность: $E_{4\pi} = E_0/4.$

3. Средняя полусферическая освещенность(с ориентациями в трех координатных плоскостях):

а) основание полусферы горизонтальное:

$$(E_{2\pi})_{xБy} = E_{4\pi} + \frac{1}{4} \int\limits_0^{n_1} \int\limits_0^{m_1} dE_{\text{н}} \cos \beta_z,$$

где $n_1 = a/H$ и $m_1 = c/H$;

б) основание полусферы лежит в координатной кости $xБz$:

$$(E_{2\pi})_{xБz} = E_{4\pi} + \frac{1}{4} \int\limits_0^{n_1} \int\limits_0^{m_1} dE_{\text{н}} \cos \beta_y;$$

в) основание полусферы лежит в плоскости $yБz$:

$$(E_{2\pi})_{yБz} = E_{4\pi} + \frac{1}{4} \int\limits_0^{n_1} \int\limits_0^{m_1} dE_{\text{н}} \cos \beta_x.$$

Из геометрии:

$$\cos\beta_z = \frac{H}{b} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2+m^2}};$$

$$\cos\beta_y = \frac{y}{b} = \frac{m}{\sqrt{1+n^2+m^2}};$$

$$\cos\beta_x = \frac{x}{b} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2+m^2}}.$$

4. Средняя цилиндрическая освещенность:

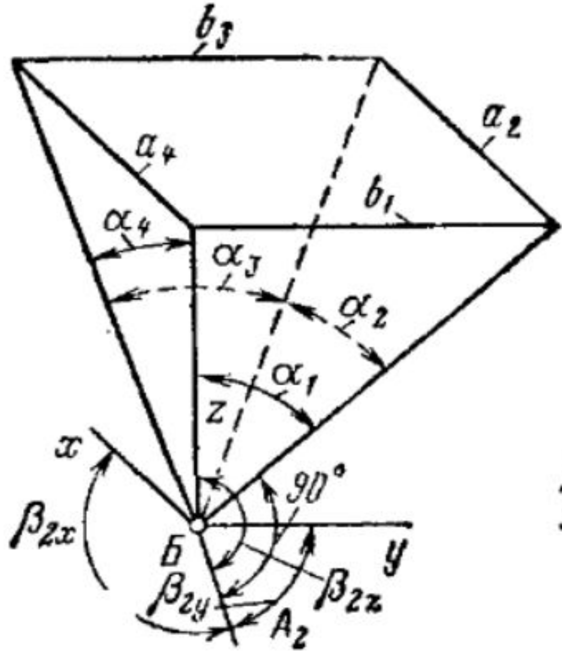
Из геометрии: $$\cos\beta_{xy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{H^2+x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{n^2+m^2}}{\sqrt{1+n^2+m^2}}$$

$$dE_{ц} = \frac{L_0\sqrt{n^2+m^2}\,dn\,dm}{\pi\left(\sqrt{1+n^2+m^2}\right)^{N+3}\left(\sqrt{1+n^2}\right)^{M-N}}$$

Проинтегрировав по поверхности прямоугольника, получим:

$$E_{ц} = \frac{L_0}{\pi}\int_0^{n_1}\int_0^{m_1}\frac{\sqrt{n^2+m^2}\,dn\,dm}{\left(\sqrt{1+n^2+m^2}\right)^{N+3}\left(\sqrt{1+n^2}\right)^{M-N}}$$

Интегральные характеристики в световом поле равнояркого горизонтально расположенного прямоугольника



1. Пространственная освещенность:

$$E_0 = \int\limits_{\omega} L\, d\omega = L \int\limits_0^{n_1}\int\limits_0^{m_1} \frac{dn\, dm}{\left(\sqrt{1+n^2+m^2}\right)^3}$$

$$\omega = \int\limits_0^{n_1}\int\limits_0^{m_1} \frac{dn\, dm}{\left(\sqrt{1+n^2+m^2}\right)^3}.$$

Для малых значений $n_1 = a/H$ и $m_1 = b/H$ Гершун предложил выражение, описывающее телесный угол ω':

$$\omega' \approx \operatorname{arctg} \frac{n_1 m_1}{\sqrt{1+n^2+m^2}}.$$

Для $n_1 = m_1 = 1$ $\omega'/\omega = 1{,}1$.

2. Средняя сферическая освещенность: $E_{4\pi} = E_0/4.$

3. Средняя полусферическая освещенность:

$$(E_{2\pi})_{xБy} = E_{4\pi} + \varepsilon_z;$$
$$(E_{2\pi})_{yБz} = E_{4\pi} + \varepsilon_x;$$
$$(E_{2\pi})_{xБz} = E_{4\pi} + \varepsilon_y.$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – проекции светового вектора в точке Б

Получаем выражения:

$$\varepsilon_x = \frac{L}{2}(\alpha_3 \cos \alpha_4 - \alpha_1);$$

$$\varepsilon_y = \frac{L}{2}(\alpha_2 \cos \alpha_1 - \alpha_4);$$

$$\varepsilon_z = -\frac{L}{2}(\alpha_2 \sin \alpha_1 + \alpha_3 \sin \alpha_4).$$

4. Средняя цилиндрическая освещенность:

$$E_{\text{ц}} = \frac{L}{\pi} \int\limits_0^{n_1} \int\limits_0^{m_1} \frac{\sqrt{n^2 + m^2}\, dn\, dm}{(1 + n^2 + m^2)^2}$$

Спасибо за внимание! ;-)