

Лекция 10

Элементы линейной алгебры

Литература.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.

Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.
Пушкаря. 2012г. Лекция 24, 25, 26.

Матрицы, действия над матрицами, определители второго
порядка и их свойства, определители высших порядков.
Обратная матрица.

Система линейных уравнений, решение системы
уравнений матричным способом, формулы Крамера,
метод Гаусса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.1. *Прямоугольная таблица*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (24.1)$$

составленная из $m \times n$ чисел a_{ij} , называется матрицей размером $m \times n$.

Числа a_{ij} , входящие в матрицу, называются элементами матрицы. Горизонтальный ряд чисел называется строкой, а вертикальный – столбцом матрицы. Первый индекс i – номер строки ($i = 1, 2, \dots, m$), второй j – номер столбца ($j = 1, 2, \dots, n$). Матрицу принято обозначать заглавными буквами, например A , B и т.д.

Приведем основную терминологию матриц, которую будем использовать в дальнейшем.

- Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов ($m \neq n$), называется прямоугольной.
- Матрица, в которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется квадратной. Причём число её строк или столбцов называется порядком матрицы.

Например, матрица
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

является квадратной матрицей 2-го порядка

- Последовательность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами ($i = j$) называется главной диагональю матрицы ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$).
- Если в квадратной матрице все недиагональные элементы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то матрица называется диагональной

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Квадратная диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, называется единичной матрицей E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется треугольной.
- Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нуль-матрицей.
- Матрица, состоящая только из одной строки, называется матрицей-строкой

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

- Матрица, состоящая только из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Матрица B называется транспонированной по отношению к матрице A , если она получена из матрицы A заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками. Транспонированная матрица обозначается A^T .

Например, по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ транспонированной будет } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.2. (Равенство матриц.) Две матрицы A и B называются равными ($A = B$), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны, $a_{ij} = b_{ij}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.3. (Сложение матриц.) Суммой двух матриц A и B одинакового размера ($m \times n$) называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$A + B = C, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (24.2)$$

ПРИМЕР 24.1. Сложить матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел:

$$A + 0 = A.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.4. Произведением матрицы A на число α называется матрица B :

$$B = A \cdot \alpha = \alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}). \quad (24.3)$$

ПРИМЕР 24.2. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ на число 3.

Решение: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 3 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}.$

При умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.5. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на матрицу $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij}) = A \cdot B$, каждый элемент которой определяется выражением

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Как видно из определения произведения двух матриц, перемножить можно лишь матрицы, у которых число столбцов матрицы сомножителя A равно числу строк матрицы сомножителя B .

Например, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, то

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

В результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица множитель.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Эти примеры показывают, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:

$$AB \neq BA.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.6. Матрицы A и B , для которых $AB = BA$, называются коммутативными.

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону

$$A(BC) = (AC)B$$

и распределительному закону $(A + B)C = AC + BC$.

ЗАМЕЧАНИЕ 24.1. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь место, т. е. произведение двух не нулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.

ПРИМЕР 24.4. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Решение: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

24.3. Определители второго порядка и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.7. *Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Определитель обозначают символом*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (24.4)$$

Таким образом, определитель второго порядка можно вычислить (раскрыть) по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (24.5)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя.

ПРИМЕР 24.5. *Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.*

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23.$

- Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

- Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.
- Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k a_{12} \\ a_{21} & k a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
- Если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

24.4. Определители высших порядков

Рассмотрим квадратную матрицу n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (24.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.8. *Определителем (или детерминантом) n -го порядка, соответствующим данной квадратной матрице, называют число, получаемое из элементов матрицы A по определённом закону – закону раскрытия определителя.*

Это число обозначается

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (24.7)$$

Прежде, чем формулировать закон раскрытия определителей высшего порядка, введем понятие минора и алгебраического дополнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.9. *Минором, соответствующим данному элементу определителя n -го порядка, называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.*

Миноры будем обозначать заглавными буквами M_{ij} с двумя индексами. Так, например, минор M_{12} , соответствующий элементу a_{12} определителя (24.7), есть

определитель $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Он получается, если вычеркнуть в

определителе n -го порядка первую строку и второй столбец.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.10. *Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, чётна, и со знаком минус, если эта сумма нечётна.*

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается через A_{ij} . Здесь i означает номер строки, а j -номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Связь между алгебраическим дополнением элемента и его минором выражается следующим равенством:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (24.8)$$

Например: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$.

В этом случае закон раскрытия определителей можно записать следующим образом:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad \text{для любых } i \quad (24.9)$$

или
$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad \text{для любых } j. \quad (24.10)$$

Этот результат можно сформулировать следующим образом.
Определитель n-го порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Так как согласно определениям 24.9 и 24.10, алгебраическое дополнение любого элемента определителя n – го порядка является определителем n – 1-го порядка, из формул (24.9) и (24.10) следует, что любой определитель n-го порядка сводится к сумме n определителей n – 1-го порядка.

В качестве примера использования формул (24.9) и (24.10) приведем формулы разложения определителя третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (24.11)$$

по элементам первой строки $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, и элементам второго столбца $|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 24.2. Для определителя 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, алгебраическим дополнением, согласно (24.8), $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$.

И раскрывая $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ по (24.9) или (24.10) получим формулу (24.5).

ПРИМЕР 24.6. Вычислить определитель третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (24.12)$$

Воспользуемся формулой (24.9) и раскроем определитель (24.12), например, по элементам третьей строки ($i = 3$):

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \quad (24.13)$$

Предварительно вычислим алгебраические дополнения, входящие в формулу

$$(24.13) \quad A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = 1 \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = (-2)10 - 9(-10) = -20 + 90 = 70;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -[(-1)10 - 1(-10)] = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)9 - 1(-2) = -9 + 2 = -7.$$

Подставляем в формулу (24.13)

$$|A| = 1 \cdot 70 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 70.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 24.3. Рекомендуется раскрывать определители по элементам той строки или того столбца, которые содержат нулевые элементы, т.к. это значительно сокращает процесс вычислений.

Все свойства определителя 2-го порядка, приведенные в п. 24.3, без всяких изменений переносятся и на определители n -го порядка.

Свойства определителя могут быть использованы для того, чтобы в какой-либо строке (или столбце) все элементы, кроме одного, сделать равными нулю.

Покажем это на примере вычисления определителя (24.12):

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ из примера 24.6.}$$

Решение: Прибавим к элементам первой строки элементы третьей строки и вычтем из элементов второй строки элементы третьей строки

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь раскроем полученный определитель по элементам первого столбца и получим результат, известный из решения примера 24.6.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 70.$$

Таким образом, мы можем сформулировать общее *правило*, согласно которому *любой определитель n -го порядка может быть сведен к одному определителю $n - 1$ -го порядка*. И, следовательно, применяя последовательно это правило, мы можем свести определитель n -го порядка к числу. Вычисление определителей часто удобнее и быстрее проводить, пользуясь этим правилом.

25.1. Обратная матрица

Рассмотрим так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25.1. *Если A – квадратная матрица, то обратной для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию*

$$AA^{-1} = E. \quad (25.1)$$

Можно доказать, что матрицы A и A^{-1} являются коммутативными:

$$A^{-1}A = E.$$

Приведем теперь следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА 25.1. (об обратной матрице): *Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.*

Вычисляется обратная матрица по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (25.2)$$

ПРИМЕР 25.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Решение: Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно,
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

25.3. Элементарные преобразования матриц

Элементарными называются следующие преобразования:

- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и то же число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;
- перемена местами строк (столбцов) матрицы;
- отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными*.

Можно доказать, что следующие преобразования переводят систему уравнений в равносильную ей:

- перемена местами двух любых уравнений;
- умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
- перемена слагаемых, содержащих разные неизвестные, местами;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Эти преобразования, по аналогии с элементарными преобразованиями матриц, будем называть элементарными.

Возможно, что после нескольких таких преобразований в системе появится уравнение, все коэффициенты которого и свободный член равны нулю. Поскольку такому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, оно может быть отброшено. В этом случае мы получим систему, равносильную данной и содержащую на одно уравнение меньше, чем данная система.

Если в результате применения элементарных преобразований в системе появится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это указывает на то, что уравнение не удовлетворяет никаким значениям неизвестных и, следовательно, полученная система несовместна. Поэтому несовместной является и первоначальная система.

Если обозначить через A матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных (26.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (26.2)$$

Через X – матрицу-столбец,
составленную из неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (26.3)$$

Через C – матрицу-столбец,
составленную из свободных членов

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (26.4)$$

Произведение $A \cdot X$ есть матрица-столбец

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (26.5)$$

Тогда система линейных уравнений может быть записана в матричном виде

$$A \cdot X = C. \quad (26.6)$$

Если число неизвестных системы равно числу уравнений и матрица A системы невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$, то уравнение $A \cdot X = C$ решается следующим образом:

- Умножаем обе части уравнения на матрицу A^{-1} , обратную матрице A :

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C.$$

- Используя сочетательный закон умножения матриц, можно записать:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C.$$

- Так как $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение матричного уравнения получится в виде:

$$X = A^{-1} \cdot C. \quad (26.9)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение: В матричной форме эта система запишется в виде

$$AX = C. \text{ Здесь } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} найдена нами в примере 25.1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы записываем в виде

$$X = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда на основании определения равенства матриц следует, что $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.

Рассмотрим ещё раз систему n уравнений с n неизвестными $A \cdot X = C$, для которой $|A| \neq 0$. Запишем матричное равенство (26.9) в следующем виде:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Или} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + \dots + A_{n1}c_n \\ A_{12}c_1 + A_{22}c_2 + \dots + A_{n2}c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}c_1 + A_{2n}c_2 + \dots + A_{nn}c_n \end{pmatrix}.$$

Вспомним, что две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, т.е.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + \dots + A_{n1}c_n) \\ x_2 = \frac{1}{|A|}(A_{12}c_1 + A_{22}c_2 + \dots + A_{n2}c_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n = \frac{1}{|A|}(A_{1n}c_1 + A_{2n}c_2 + \dots + A_{nn}c_n) \end{cases} \quad (26.10)$$

Обратим внимание на то, что выражения в круглых скобках равенств (26.10) представляют собой определители, полученные из определителя системы $|A|$ заменой соответствующего номеру неизвестного столбца столбцом свободных членов данной системы уравнений (26.1). Обозначим их следующим образом:

$$\Delta_{x_1} = A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + \dots + A_{n1}c_n = \begin{vmatrix} c_1 a_{12} \dots a_{1n} \\ c_2 a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ c_n a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = A_{12}c_1 + A_{22}c_2 + \dots + A_{n2}c_n = \begin{vmatrix} a_{11} c_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} c_2 \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} c_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и т.д.

С учётом этих обозначений формулы (26.10) можно переписать в виде:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{|A|}. \tag{26.11}$$

Формулы (26.11) называются формулами Крамера и являются следствием формулы (26.9).

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение: Ранее определитель системы уже был вычислен: $|A|=5$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Вычислим определители неизвестных:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10.$$

Используя формулы Крамера, найдем:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|} = \frac{5}{5} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|} = \frac{-5}{5} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{|A|} = \frac{10}{5} = 2.$$

Умножим теперь первое уравнение системы (26.12) на a_{21} и вычтем из второго уравнения. Затем умножим первое уравнение на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д. В результате получим новую систему, также равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1k}x_k + \dots + a'_{1n}x_n = c'_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2k}x_k + \dots + a'_{2n}x_n = c'_2. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения:

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1};$$

$$i = 2, 3, \dots, n;$$

Ошибка в учебнике

$$c'_1 = \frac{c_1}{a_{11}}, \quad c'_i = c_i - \frac{c_1}{a_{11}}a_{i1}; \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

Здесь введены обозначения:

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1}; \quad c'_1 = \frac{c_1}{a_{11}}, \quad c'_i = c_i - \frac{c_1}{a_{11}}a_{i1}; \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

Надо

Разделим теперь второе уравнение системы (26.13) на коэффициент a'_{22} , предполагая, что он отличен от нуля; затем умножим второе уравнение полученной системы последовательно на $a'_{32}, \dots, a'_{i2}, \dots, a'_{m2}$ и вычтем поочередно из соответствующих уравнений системы, кроме первого и второго.

Если, продолжая этот процесс, мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то эта система несовместна.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение:

Совершим элементарные преобразования, которые каждый раз будут приводить нас к равносильной исходной системе уравнений.

- Переставим местами первое и второе уравнения системы для удобства дальнейших преобразований:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

- Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из второго, умножим первое уравнение на 5 и вычтем из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -7x_2 - x_3 = 5, \\ -12x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

- Поменяем члены, содержащие x_2 и x_3 местами,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ x_3 + 7x_2 = -5, \\ -x_3 - 12x_2 = 10. \end{cases}$$

• Сложим второе и третье уравнения
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ x_3 + 7x_2 = -5, \\ -5x_2 = -5. \end{cases}$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = -5 - 7x_2 = 2$$

$$x_1 = -3x_2 - x_3 = (-3)(-1) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Прежде, чем перейти к решению других примеров по методу Гаусса, заметим, что *нет необходимости каждый раз переписывать системы уравнений. Все преобразования можно проводить над расширенной матрицей системы (26.8).*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу системы и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Выше вертикальной прямой отделен столбец свободных членов от столбцов коэффициентов при неизвестных, так как его, в отличие от других столбцов, нельзя переставлять.

Полученный результат запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 11x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Если в качестве базисных неизвестных выбрать, например, x_1 и x_2 , тогда свободными неизвестными будут x_3 и x_4 после элементарных преобразований следует

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4. \end{cases}$$

Полагая, например, $x_3 = 1, x_4 = 1$, получим $x_1 = -1, x_2 = -1$, т.е. некоторое частное решение системы уравнений.

ПРИМЕР 26.5. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение:

Составляем расширенную матрицу и выполняем над её строками элементарные преобразования. Поскольку при применении метода Гаусса к данной системе целесообразно менять местами слагаемые, содержащие неизвестные, будем указывать их над соответствующими столбцами.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Полученной матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_2 + 2x_1 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -22. \end{cases}$$

Так как последнее уравнение этой системы противоречиво, то она является несовместной. Следовательно, несовместна и равносильная ей исходная система уравнений, т.е. она не имеет решения.

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (25.3)$$

имеющую m строк и n столбцов. Выделим в этой матрице произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k .

Напомним, что минором k -го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, получающийся из данной матрицы выделением произвольных k строк и k столбцов.

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

имеющей три строки и четыре столбца, одним из миноров третьего порядка

является определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, полученный выделением первой, второй и

третьей строк и первого, второго и третьего столбцов матрицы A . Минором

второго порядка является, например, определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Сами элементы матрицы можно рассматривать как миноры первого порядка. Некоторые из миноров матрицы могут быть равны нулю, другие – отличны от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25.2. Рангом матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля её миноров.

Если ранг матрицы A равен r , то это означает, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r , но всякий минор порядка, большего чем r , равен нулю. Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Единственный минор четвёртого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

как определитель, все элементы одной из строк которого равны нулю. Один из миноров третьего порядка отличен от нуля, например

$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Следовательно, ранг данной матрицы равен 3, т.е. $r(A) = 3$.

При определении ранга матрицы, как правило, приходится вычислять большое число определителей. Чтобы облегчить этот процесс, применяют специальные приемы. Прежде чем излагать эти приемы, введем понятие об *элементарных преобразованиях матрицы*.

Элементарными называются следующие преобразования:

- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и то же число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;
- перемена местами строк (столбцов) матрицы;
- отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными*. Эквивалентные матрицы, вообще говоря, не равны друг другу, но, как можно доказать, *ранги эквивалентных матриц равны*. Этим обстоятельством пользуются при вычислении ранга матрицы.

ПРИМЕР 25.2. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Решение: Вычтем из 2-ой строчки 1-ую и результат поставим в 1-ую строчку

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из второй и третьей строк матрицы A_1 первую строку, умноженную соответственно на 3 и 5, получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки матрицы A_2 вторую строку, получим матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбрасывая в матрице A_3 строку, состоящую из нулей, получаем матрицу

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

ранг которой равен, очевидно, двум. Следовательно, ранг данной матрицы A также равен двум, т.е. $r(A) = 2$.

Спасибо за внимание