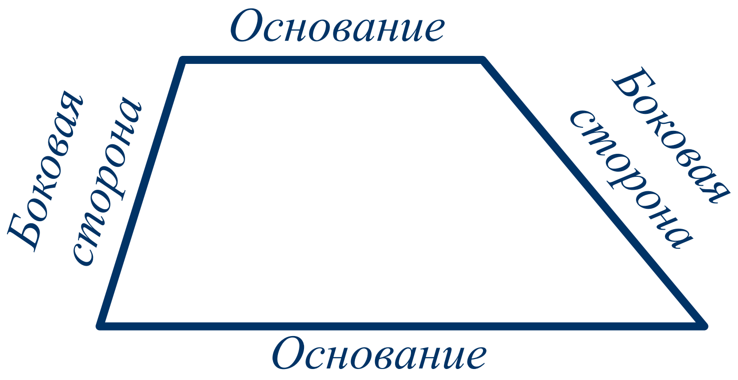
Трапеция

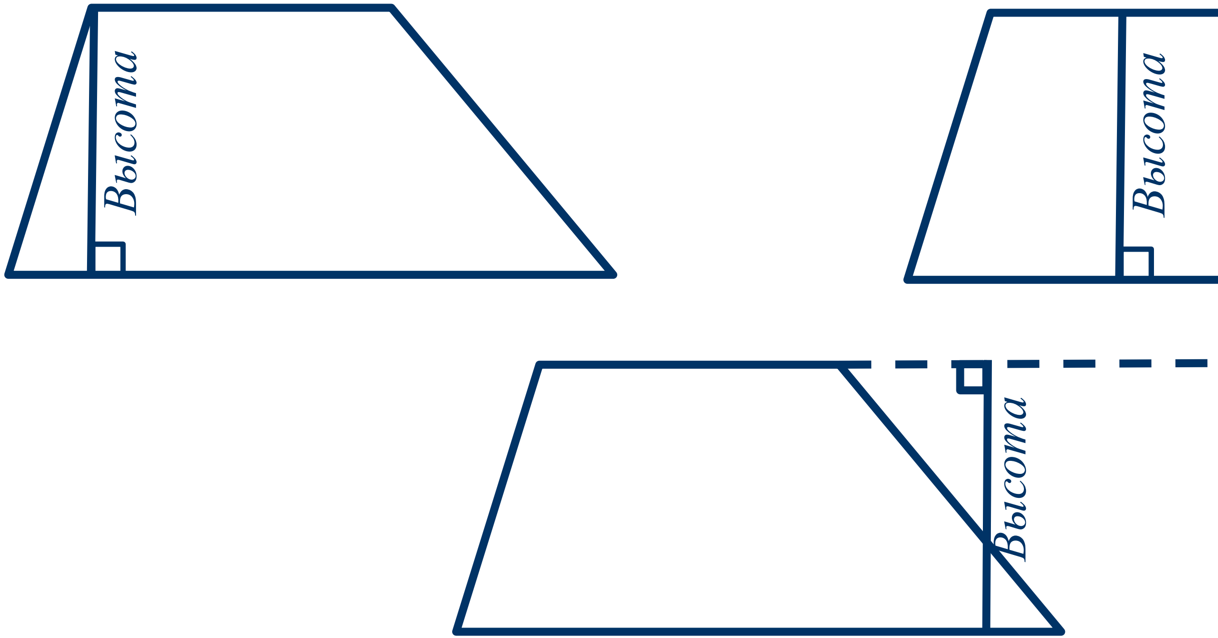
Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет.



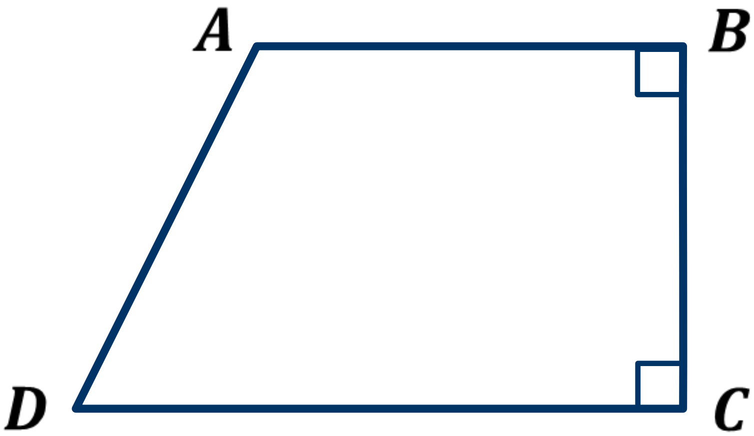
Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**.

А не параллельные – **боковыми сторонами**.

Перпендикуляр, проведённый из любой точки одного из оснований на другое основание или его продолжение, называется высотой трапеции.



Трапеция, у которой есть прямой угол, называется прямоугольной.



Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобедренной.

Теорема. Свойство углов равнобедренной трапеции. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

Доказательство.

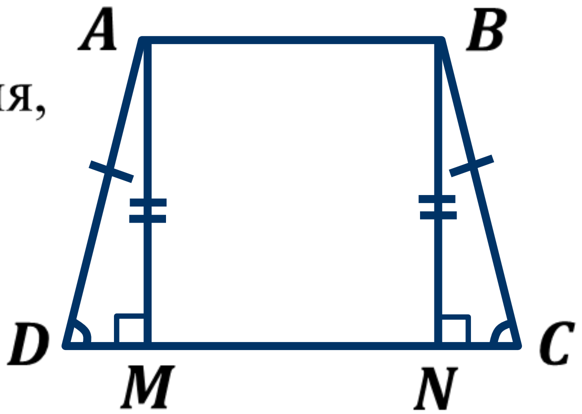
Рассмотрим прямоугольные ΔAMD и ΔBNC.

$AD = BC$, так как $ABCD$ – равнобедр. трапеция,

$AM = BN$.

$\Delta AMD = \Delta BNC$ по катету и гипотенузе.

Следовательно, $\angle ADM = \angle BCN$.



Расстоянием между параллельными прямыми является длина их общего перпендикуляра.

Теорема. Свойство диагоналей равнобедренной трапеции.

Диагонали равнобедренной трапеции равны.

Доказательство.

Рассмотрим ΔACD и ΔBDC.

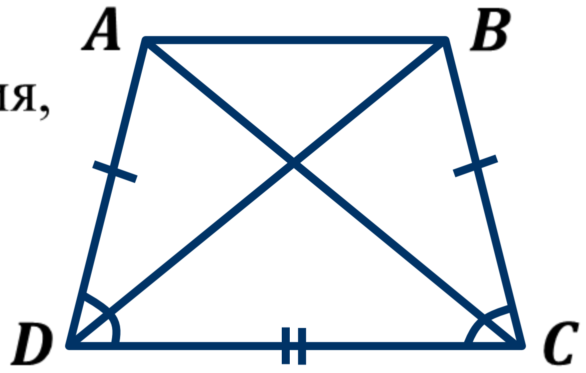
$AD = BC$, так как $ABCD$ – равнобедр. трапеция,

сторона CD – общая,

$\angle ADC = \angle BCD$ как углы при основании равнобедр. трапеции.

$\Delta ACD = \Delta BDC$ по первому признаку.

Следовательно, $AC = BD$.



Теорема. Признак равнобедренной трапеции. Если у трапеции углы при основании равны, то она равнобедренная.

Доказательство.

Рассмотрим прямоугольные ΔAMD и ΔBNC.

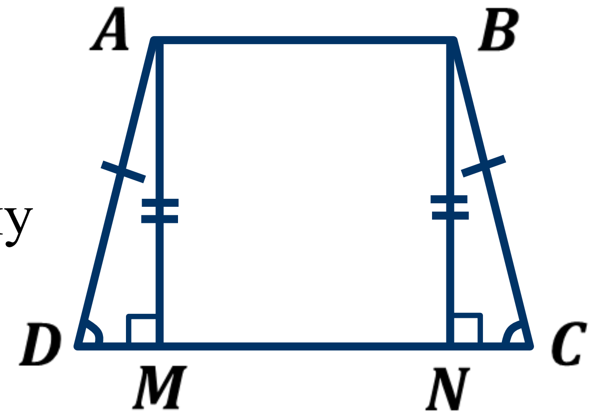
$\angle ADM = \angle BCN$ по условию.

$AM = BN$.

$\Delta AMD = \Delta BNC$ по катету и противолежащему острому углу.

Следовательно, $AD = BC$.

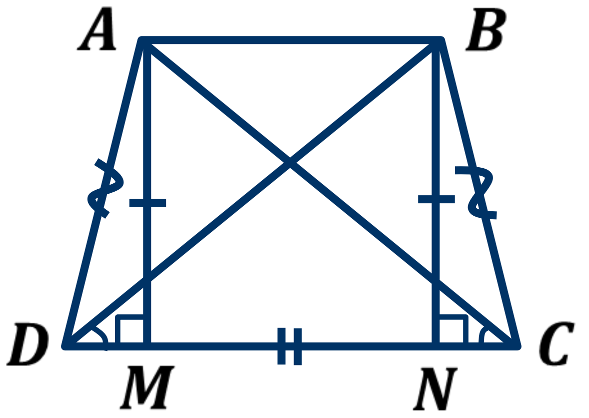
Тогда трапеция $ABCD$ – равнобедренная.



Теорема. Признак равнобедренной трапеции. Если у трапеции диагонали равны, то она равнобедренная.

Доказательство.

Рассмотрим прямоугольные ΔAMC и ΔBND.



$AC = BD$ по условию,

$AM = BN$.

$\Delta AMC = \Delta BND$ по катету и гипотенузе.

Следовательно, $\angle ACD = \angle BDC$.

Рассмотрим ΔACD и ΔBDC.

$AC = BD$ по условию,

сторона CD – общая,

$\angle ACD = \angle BDC$.

$\Delta ACD = \Delta BDC$ по первому признаку.

Следовательно, $AD = BC$.

Тогда трапеция $ABCD$ – равнобедренная.

Задача. $ABCD$ – трапеция, у которой $AD = BC$. $\angle ADC = 72°$. Найдите градусную меру $\angle ABC$.

Решение.

Так как $AD = BC$, то трапеция $ABCD$ – равнобедренная.

$\angle ADC = \angle BCD = 72°$ как углы при основании равнобедр. трапеции.

$\angle ABC$, $\angle BCD$ – внутр. односторонние при $AB \parallel CD$ и секущей BC,

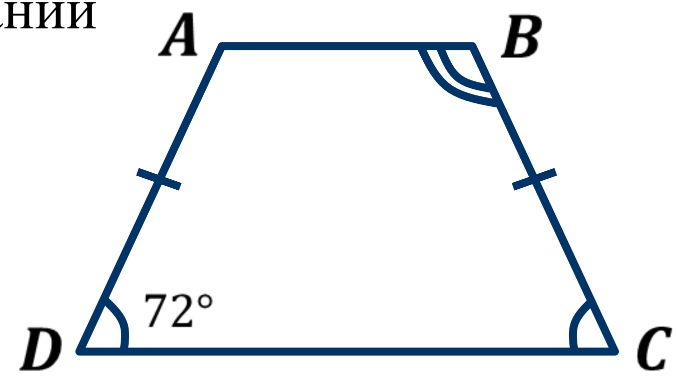
то есть $\angle ABC + \angle BCD = 180°$,

$\angle ABC = 180° - \angle BCD$,

$\angle ABC = 180° - 72°$,

$\angle ABC = 108°$.

Ответ: 108°.



Если две прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Задача. В прямоугольной трапеции $ABCD$ проведена диагональ AC. $AD = AC$, $\angle BAC = 48°$. Найдите градусную меру $\angle CAD$.

Решение.

$\angle BAC = \angle ACD$ как накр. лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC, то есть $\angle ACD = 48°$.

$AD = AC$, следовательно, ΔACD – равнобедренный, тогда $\angle ADC = \angle ACD = 48°$.

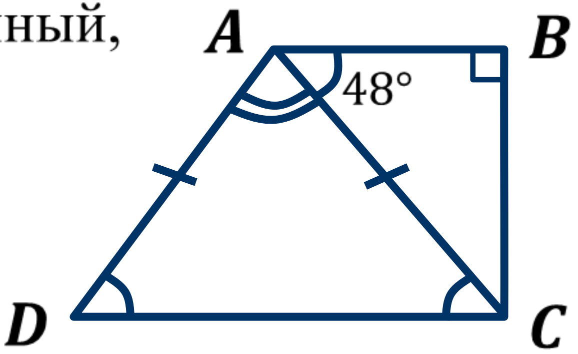
Для ΔACD: $\angle DAC + \angle ACD + \angle ADC = 180°$,

$\angle DAC = 180° - \angle ACD - \angle ADC$,

$\angle DAC = 180° - 48° - 48°$,

$\angle DAC = 84°$.

Ответ: $84°$.



Так как сумма углов треугольника равна 180°

Углы при основании равнобедренного треугольника равны.