ЛЕКЦИЯ 3.

ТЕМА: «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ».

1. Определение объема выборки обследований.
2. Определение выборочных характеристик.
3. Законы распределения случайных величин.
   3.1 Экспоненциальный закон распределения
   3.2 Нормальный закон распределения
   3.3 Логарифмически нормальное распределение
   3.4 Распределение Вейбулла
4. Статистическая обработка информации о надежности.

1. Определение объема выборки обследований

Без объективной информации о надежности невозможно определить ее фактические показатели, выявить недостатки проектирования и производства изделия, установить влияние на надежность условий эксплуатации.

Такая информация поступает для анализа и обработки по результатам самых разнообразных испытаний (стендовых, полигонных, эксплуатационных, специальных и т.д.).

Наиболее полную информацию о надежности машин и их элементов, дают эксплуатационные испытания. Подконтрольные машины при таких испытаниях подбирают в группы, которые характеризуются однородностью своего возрастного состава (новые, после КР) и однородностью условий эксплуатации. Однако, как показывает практика, показатели надежности у разных машин будут тем не менее отличаться друг от друга. Объясняется это влиянием большого числа различных факторов: качества изготовления, погодных условий, квалификации водителей и ремонтно-обслуживающего персонала, применяемых ГСМ и т.д. Таким образом, наработка, при которой возникает отказ, является случайным событием.

Из математической статистики известно, что при многократном повторении наступление случайных событий обладает статистической устойчивостью, которая возрастает с увеличением числа испытуемых объектов. Естественно, при увеличении числа испытуемых изделий повышается точность оценок статистических характеристик изучаемых величин, и при достаточно большом их числе можно получить сколь угодно малую ошибку.

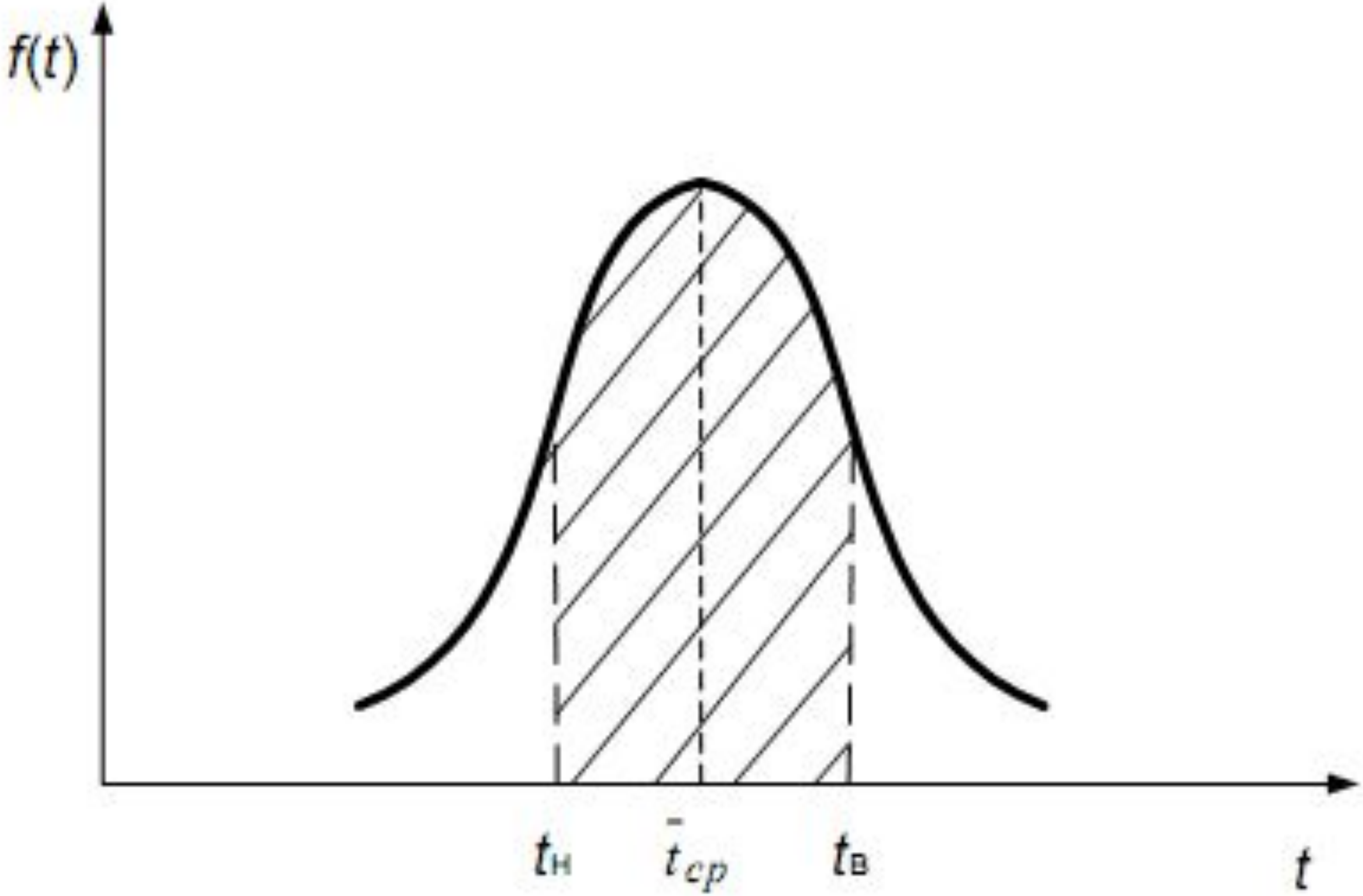
Однако чрезмерное увеличение объемов обследований приводит к необоснованному перерасходу трудовых и материальных затрат для получения избыточной информации, которая ничего нового о показателях надежности уже не несет.

В связи с этим целесообразно испытать не просто наперед заданное количество объектов, а ту минимальную партию (представительную выборку), которая с заданной точностью позволяет получить достоверные оценки показателей надежности.

Наиболее распространенным методом определения представительной выборки испытаний является метод доверительных интервалов, который заключается в следующем. По предварительным выборочным характеристикам случайной величины (например среднего ресурса $\bar{t}_{\text{ср}}$) определяют верхнюю $t_{\text{в}}$ и нижнюю $t_{\text{н}}$ доверительные границы (рисунок 1). Эти границы и определяют доверительный интервал, который с некоторой доверительной вероятностью α накрывает значение , т.е.

.

$$\alpha = P(t_H \le \bar{t}_{\text{ср}} \le t_B)$$



Распределение случайной величины *t* с доверительными границами

Ширина доверительного интервала характеризует точность выборочной оценки ($\bar{t}_{ср}$), а доверительная вероятность *α* – достоверность этой оценки. Чем уже доверительный интервал и больше значение *α*, тем точнее оценка среднего ресурса.

Для нормального распределения случайной величины ресурса t_i до-верительные границы по предварительной выборке испытаний определяются из выражений:

$$t_H = \bar{t}_{\text{ср}} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}};$$

$$t_B = \bar{t}_{\text{ср}} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где t_α – коэффициент Стьюдента, определяемый из таблиц нормального распределения при доверительной вероятности α и числе степеней свободы $k = N - 1$; N – объем предварительной выборки.

Пример. При наблюдении за 9 автомобилями были получены следующие наработки t_i (тыс. км) до предельного состояния выпускного клапана двигателя ЗМЗ-4063.10: $t_1 = 90$; $t_2 = 105$; $t_3 = 125$; $t_4 = t_5 = 140$; $t_6 = 170$; $t_7 = 185$; $t_8 = 210$; $t_9 = 230$. Требуется определить необходимый объем выборки обследования с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}95$ и относительной погрешностью $\delta = 10$ %.

1. Вычисляем среднее арифметическое значение наработки выпускного клапана $\overline{t}_{\text{ср}}$ до предельного состояния и среднее квадратическое отклонение

$$\overline{t}_{\text{ср}} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{9} t_i = \frac{1}{9}(90 + 105 + \ldots + 230) = 171{,}9 \text{ тыс. км;}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{N}(t_i - t_{\text{ср}})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(90-171{,}9) + (105-171{,}9) + \ldots + (230-171{,}9)^2}{9\ -\ 1}} =$$

$= 50{,}5$ тыс. км.

2. Определяем значение вспомогательной величины U_p. При заданной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$

$$\alpha^* = \frac{1+\alpha}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975.$$

По таблице квантилей нормального распределения для $\alpha^* = 0{,}975$ величина $U_p = 1{,}96$.

3. При относительной погрешности $\delta = 10$ % минимально необходимый объем выборки составит

$$N = \frac{U_p{}^2 \sigma^2}{(\delta t_{\text{ср}})^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 50{,}5^2}{(0{,}1 \cdot 171{,}9)^2} = 33 \ \text{ед.}$$

Если ужесточить величину относительной погрешности при оценке $\overline{t}_{\text{ср}}$, например до 5 %, то необходимый объем выборки для нашего примера составит

$$N = \frac{1{,}96^2 \cdot 50{,}5^2}{(0{,}05 \cdot 171{,}9)^2} = 52 \ \text{ед.}$$

Таким образом, метод доверительных интервалов позволяет с необходимой точностью и заданной доверительной вероятностью определить представительный объем выборки обследований. Необходимым условием при этом, как уже отмечалось, является знание закона распределения искомой характеристики. При неизвестном законе может быть использована ориентировочная формула определения объема выборки

$$N = \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-\delta)}. \tag{4.6}$$

Для нашего примера при уровне доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ и допустимой относительной ошибке $\delta = 5$ % необходимый объем выборки составит

$$N = \frac{\ln(1-0{,}95)}{\ln(1-0{,}05)} \approx 58 \text{ ед.}$$

2 Определение выборочных характеристик

Для оценки случайной однородной величины используются два вида характеристик: полные и числовые. Полные характеристики – это так называемые законы распределения. Для дискретных величин в качестве таковых используют функцию и ряд распределения (графически – многоугольник распределения), для непрерывных величин – функцию и плотность распределения (графически – кривую распределения).

Любой закон распределения представляет собой некоторую функцию, которая полностью описывает случайную величину. Однако в целом ряде инженерных задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью (исчерпывающим образом). Вполне достаточно определить отдельные параметры, характеризующие наиболее существенные черты распределения случайной величины. Такие характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками случайной величины.

Числовые характеристики случайной величины

Основными числовыми характеристиками случайной величины являются:

- среднее арифметическое (выборочное среднее),
- среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Среднее арифметическое случайной величины характеризует центр группирования всей совокупности ее значений

$$\overline{X} = (X_1 m_1 + X_2 m_2 + X_k m_k) / n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} X_i m_i$$

где X_i – центр i-го интервала вариационного ряда; m_i – соответствующая данному интервалу частота; k – количество интервалов вариационного ряда; n – объем выборки обследования.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины $\sigma(x)$, характеризующее меру рассеивания значений $\overline{X}$ вокруг центра группирования X, определяют по формуле

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 m_i}{n-1}}$$

Коэффициент вариации ряда v оценивает относительную меру рассеивания случайной величины X и в первом приближении позволяет судить о законе ее распределения:

.

$$v = \frac{\sigma(x)}{\overline{X}}$$

Чем меньше значение коэффициента вариации, тем плотнее группируются результаты испытаний вокруг среднего значения $\overline{X}$, тем, следовательно, меньше их рассеивание.

3 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Результаты испытаний дают возможность найти математическое описание полученных закономерностей, т.е. получить обобщенные зависимости, по которым определяются показатели надежности.

В общем случае в качестве таких обобщенных зависимостей используются функции распределения случайной величины (законы распределения) *F*(*X*) и *P*(*X*). Для автотракторной техники в качестве случайной величины чаще всего используют наработки *t* (до одного отказа, между отказами, до предельного состояния и т.д.). Поэтому при обработке результатов испытаний различными законами вместо абстрактной случайной величины *X* используем наработку *t*.

Интегральная функция распределения $F(t)$ показывает вероятность того, что наработка T от начала отсчета до появления отказа окажется меньше заданной наработки t, т.е.

$$F(T) = \text{Вер}\ (T < t).$$

Иными словами эта функция показывает вероятность того, что изделие откажет в заданном интервале наработки.

Интегральная функция $P(t)$ показывает вероятность того, что наработка T от начала отсчета до появления отказа окажется больше или равной заданной наработке t. Иначе говоря, эта функция показывает, что в пределах заданной наработки от 0 до t отказа изделия не произойдет:

$$\boldsymbol{P(T) = \text{Вер}\ (T \geq t).}$$

Теоретические значения $F(t)$ и $P(t)$ определяют из выражений:

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt$$

$$P(t) = \int_t^\infty f(t)dt = 1 - F(t)$$

где $f(t)$ – дифференциальная функция распределения. Она характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке, и поэтому называется плотностью распределения случайной величины.

Физический смысл $f(t)$ применительно к теории надежности – это вероятность возникновения отказа на достаточно малой наработке.

Таким образом, функции, или законы распределения, устанавливают связи между возможными значениями случайных величин и соответствующими им вероятностями.

При обработке информации о надежности машин наиболее широкое распространение получили следующие законы распределения:

- **экспоненциальный,**
- **нормальный,**
- **логарифмически нормальный,**
- **Вейбулла.**

Экспоненциальный закон распределения

Непрерывная случайная величина t называется распределенной по экспоненциальному закону, если ее плотность вероятности определяется выражением

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ при } t \geq 0,$$

где λ – параметр закона распределения; t – случайная величина наработки.

В общем случае экспоненциальным распределением описываются события, которые возникают с постоянной интенсивностью (λ = const) и независимо друг от друга (наработки деталей с внезапным характером отказов, трудоемкости их устранения, интервалы времени между поступлениями машин в зону ремонта).

Вероятность безотказной работы $P(t)$ и вероятность отказа $F(t)$ на интервале наработки от 0 до t вычисляются из выражений:

$$P(t) = e^{-\lambda t}\ ;\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\ .$$

Средняя наработка до отказа

(средний ресурс, средний срок службы, средний срок сохраняемости, среднее время восстановления отказа)

$$t_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} P(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

Интенсивность отказов *λ* может быть выражена формулой

$$\lambda = \frac{f(t)}{e^{-\lambda t}} = \frac{f(t)}{P(t)}$$

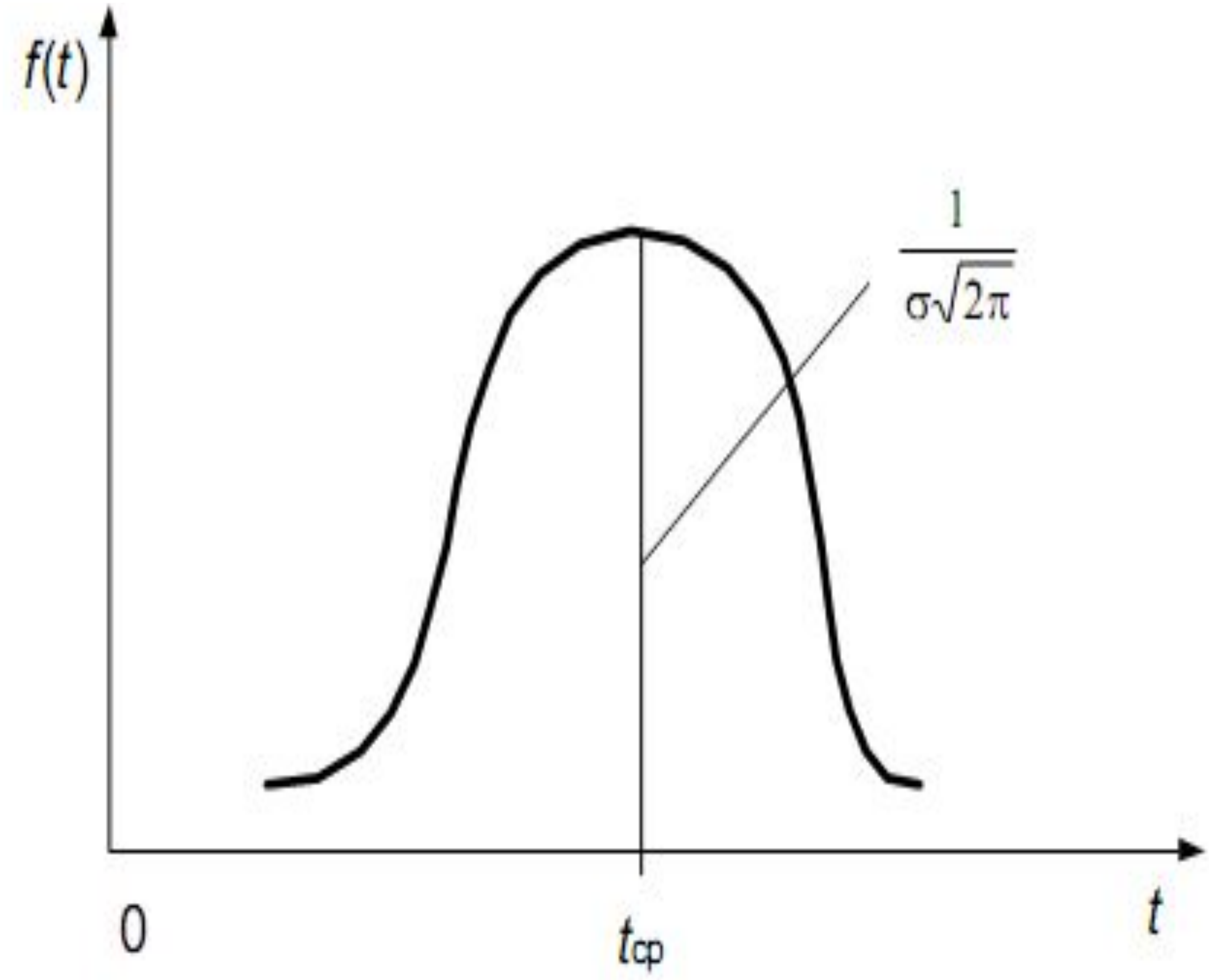
Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина *t* называется нормально распределенной, если ее плотность вероятности имеет следующий вид:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_{\text{ср}})^2}{2\sigma^2}}$$

где $t_{\text{ср}}$, σ – параметры нормального распределения (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение).

Параметр $t_{ср}$ характеризует положение распределения на оси абсцисс, а параметр σ форму кривой. Для упрощения вычислений при решении практических задач надежности прибегают к центрированию и нормированию нормального распределения.



Нормальное распределение
с параметрами $t_{ср}$ и σ

Под центрированием понимается перенос центра группирования случайной величины $t_{ср}$ в начало координат, тогда $t_{ср} = 0$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1$. Если ввести новую переменную

$$z = \frac{t - t_{ср}}{\sigma}$$

, то такая операция называется нормированием.

Вероятность отказа определяется по формуле

$$F(t) = 0,5 + \Phi\left(\frac{t - \overline{t}_{cp}}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция

Лапласа, значения которой приведены в таблицах математической статистики. Эта функция нечетная, т.е. при Ф(–*z*) = –Ф(*z*).

Гамма-процентный ресурс (гамма-процентный срок службы, гамма-процентный срок сохраняемости) определяется из уравнения

$$\frac{\gamma}{100} = 0,5 - \Phi\left(\frac{t_\gamma - \overline{t}_{cp}}{\sigma}\right)$$

Нормальный закон распределения хорошо описывает процессы, на которые влияют большое число независимых факторов, каждый из которых оказывает незначительное воздействие. Ему подчиняются износные отказы, ресурсы агрегатов и отдельных деталей, люфты и зазоры в сочленениях, трудоемкости обслуживания и др.

Логарифмически нормальное распределение

Непрерывная случайная величина *t* называется распределенной по логарифмически нормальному закону, если логарифм этой величины распределяется по нормальному закону. Плотность распределения имеет вид:

$$f(t)=\frac{1}{t\sigma_{\ddot{e}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-y_0)^2}{2\sigma_{\ddot{e}}^2}}$$

где y_0 – математическое ожидание логарифма случайной величины;

$\sigma_л$ – среднее квадратическое отклонение логарифма случайной величины.

При решении практических задач определения показателей надежности машин плотность распределения вероятности логарифма *t* определяется по формуле

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma'_{ё}} f_0\left(\frac{\ln t - y_0}{\sigma_{ё}}\right)$$

где $f_0(z)$ – плотность вероятности нормированного распределения.

Гамма-процентный ресурс (срок службы, сохраняемости) находится из уравнения

$$\frac{\gamma}{100} = \Phi 0,5 - 0,5 \left(\frac{\ln t_{\gamma} - y_{0}}{\sigma_{л}} \right)$$

Логарифмически нормальное распределение хорошо описывает отказы подшипников передних колес, усталостное разрушение деталей при стендовых испытаниях, периодичности крепежных работ и др.

Распределение Вейбулла

Непрерывная случайная величина *t* называется распределенной по закону Вейбулла, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}}$$

при t > 0,

где *a* – параметр масштаба распределения, характеризующий растянутость кривых вдоль оси *t*; *b* – параметр формы распределения.

Распределение Вейбулла – гибкое распределение и часто принимается в качестве статистической модели для описания самых разнообразных отказов. Хорошо оно проявляется в модели «слабого звена». Например, в двигатель кроме блока цилиндров, картера, коленчатого вала, поршней, шатунов входят менее долговечные детали: поршневые кольца, вкладыши, прокладки, уплотнения и т.д. Они отказывают в разные сроки, а наработка двигателя на отказ определяется наиболее слабым звеном.

Поэтому распределение Вейбулла занимает особое место при оценке ресурсов работы многих узлов и агрегатов машин. При этом в зависимости от параметра b оно может принимать самые разнообразные формы. При $b < 1$ – это убывающая функция; при $b \approx 1$ – совпадает с экспонентой; при $b \approx 3,3$ – совпадает с нормальным распределением.

Интенсивность отказов определяется выражением

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}$$

Гамма-процентный ресурс (срок службы, сохраняемости) находится по формуле

$$\frac{\gamma}{100} = e^{-\left(\frac{t_\gamma}{a}\right)^b}$$