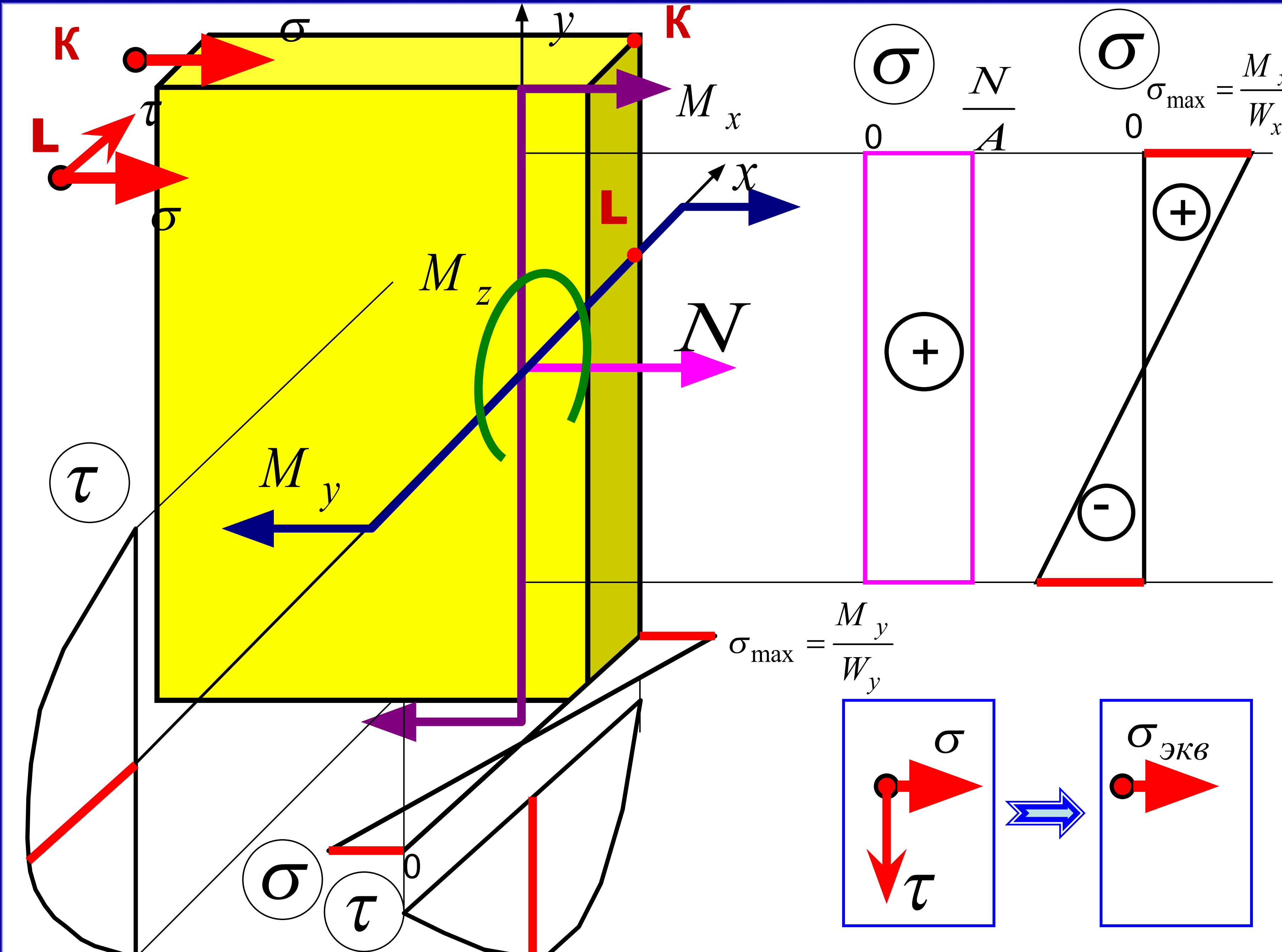
Сложное сопротивление.

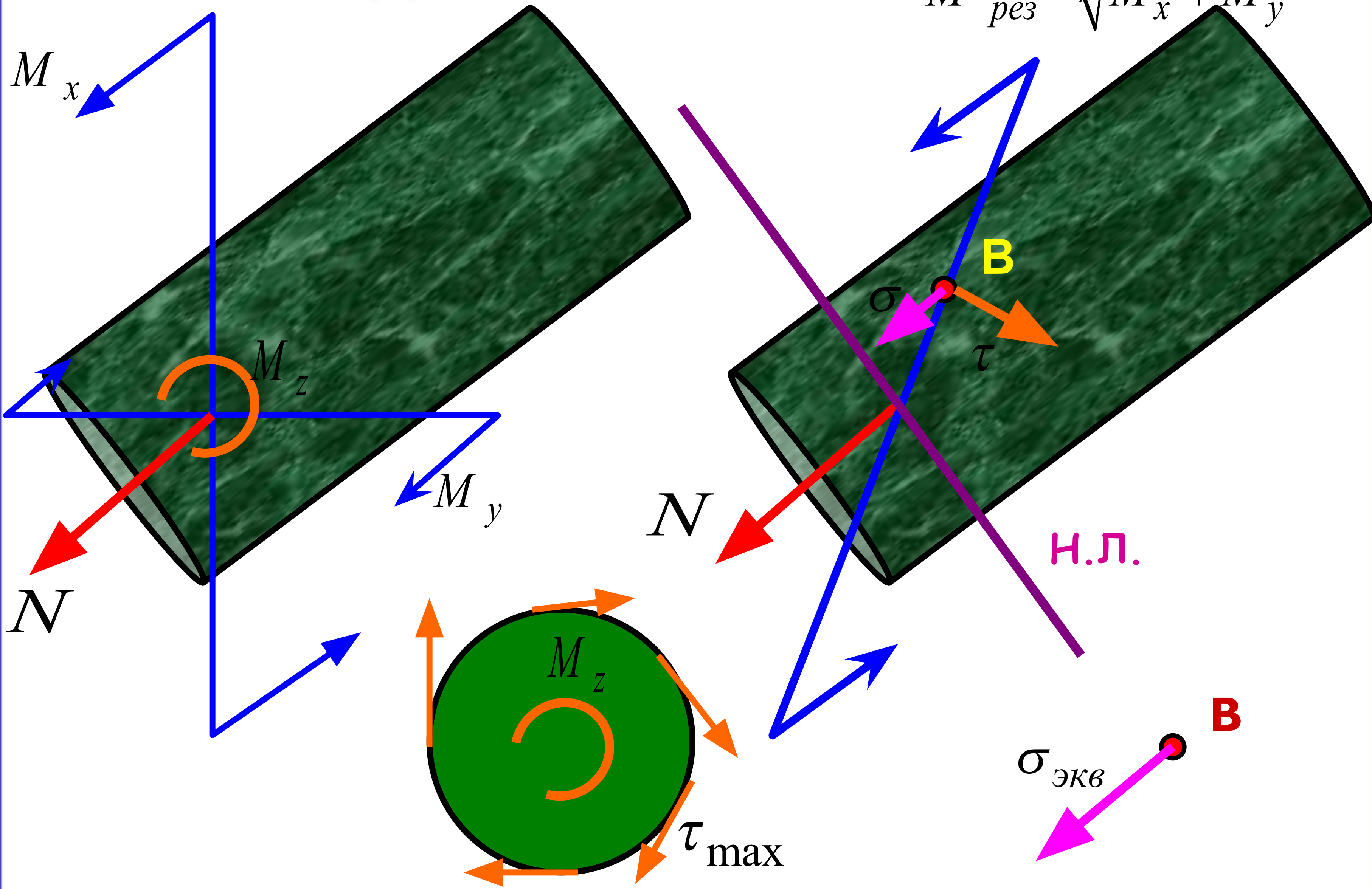
Общий случай действия сил



К
σ
y
К
τ
L
σ
M_x
σ
$\frac{N}{A}$
0
σ
$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}$
0
x
L
M_z
N
+
+
-
τ
M_y
$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y}$
σ
τ
$\sigma_{экв}$
σ
τ
0

Сечение круглого типа

$$M_{рез} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$



Условие прочности

$$\boxed{\sigma_{экв} \le R}$$

Формулы для подсчета эквивалентных напряжений зависят от теории прочности.

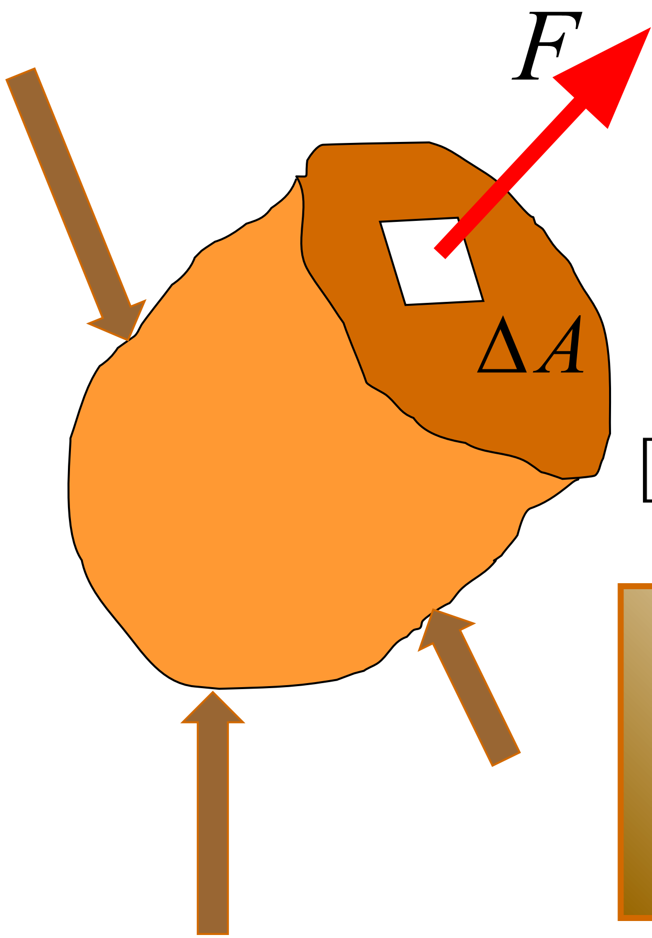
Основные теории прочности.

Основные положения.

Напряжение P

Напряжение - мера интенсивности внутренних сил.

$$\boxed{\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = P}$$



Напряжение есть внутренняя сила, отнесенная к единице площади.

$$[P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{сила}{площадь} = \frac{ньютон}{кв\ метр} = \frac{Н}{м^2} = Паскаль\ Па$$

$[\quad]$

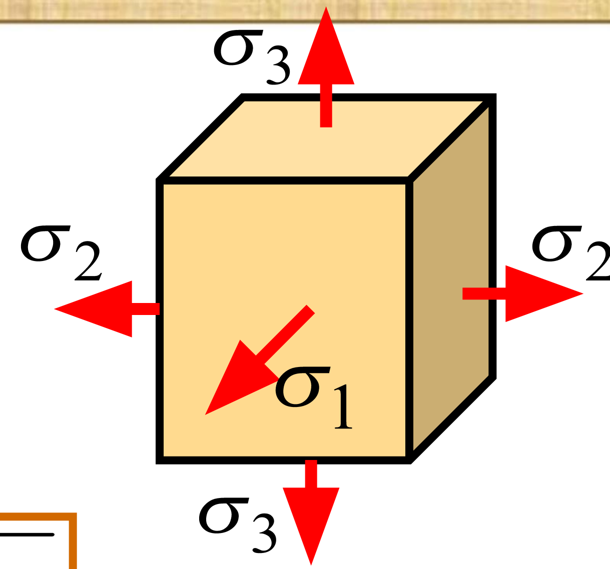
Напряжение в точке зависит не только от нагрузок, но и от ориентации площадки его действия.

Совокупность всех нормальных и касательных напряжений на бесконечном множестве площадок, проведенных через данную точку тела, называется **напряженным состоянием в точке.**

Напряженное состояние можно описать с помощью тензора напряжений T_σ :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

В общем случае среди этого бесконечного множества площадок существуют три взаимно перпендикулярные площадки на которых касательные напряжения отсутствуют.



$$\boxed{\tau_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{x, y, z}}$$

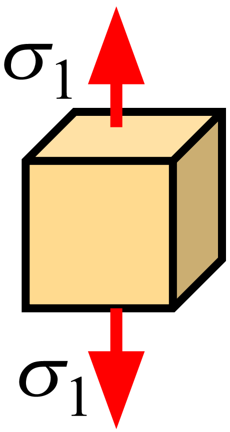
Такие площадки называются **главными**, а значения нормальных напряжений на них **главными напряжениями**

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$\boxed{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}$$

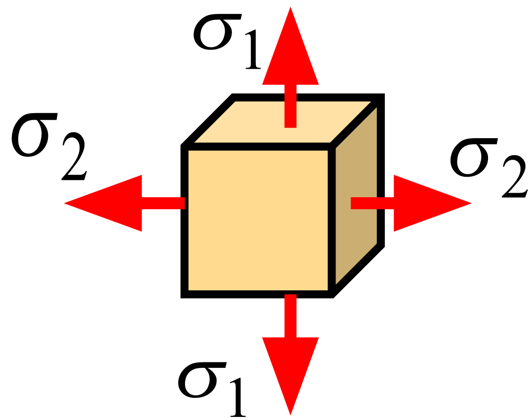
Виды напряженного состояния

ОДНООСНОЕ (ЛИНЕЙНОЕ)



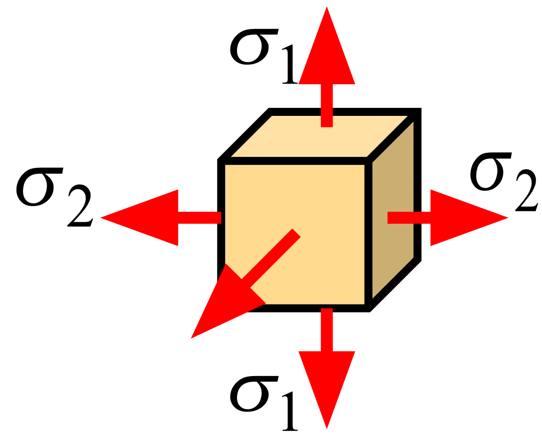
$$\sigma_1 \neq 0,$$
$$\sigma_2 = 0,$$
$$\sigma_3 = 0.$$

ДВУХОСНОЕ (ПЛОСКОЕ)



$$\sigma_1 \neq 0,$$
$$\sigma_2 \neq 0,$$
$$\sigma_3 = 0.$$

ТРЕХОСНОЕ (ОБЪЕМНОЕ)



$$\sigma_1 \neq 0,$$
$$\sigma_2 \neq 0,$$
$$\sigma_3 \neq 0.$$

Задача инженерного расчета: оценка прочности элемента конструкции по известному напряженному состоянию (Н.С.)

Простые виды Н.С. (одноосное растяжение – сжатие, чистый сдвиг)

ЭКСПЕРИМЕНТ → **Для каждого материала можно установить величину предельного (опасного) напряжения.**

σ_0 – *опасные напряжения для линейного (одноосного) напряженного состояния*

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma_{тек} - \text{для пластичных материалов} \\ \sigma_{проч} - \text{для хрупких материалов} \end{cases}$$

Задача инженерного расчета: оценка прочности элемента конструкции по известному напряженному состоянию (Н.С.)

Сложное напряженное состояние

? ЭКСПЕРИМЕНТ ?

Необходимо большое количество испытаний, отсутствие испытательных машин и измерительной техники для создания любого напряженного состояния в образце и получения достоверных результатов.

ДРУГОЙ ПУТЬ

Экспериментальные данные при одноосном растяжении-сжатии

Гипотеза о преимущественном влиянии на прочность какого-либо фактора

$$\sigma_{экв} = f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$$

$$\sigma_{экв} \le R$$

Основная задача критериев (теорий)прочности – свести сложное напряжённое состояние к линейному.

Два напряжённых состояния считаются **равноопасными**, если увеличивая главные напряжения в одно и то же число раз материал одновременно переходит в опасное состояние.

В этом случае коэффициент запаса прочности будет одинаковым.

Эквивалентное напряжение – напряжение, при котором образец материала в условиях одноосного напряжённого состояния оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряжённым состоянием в точке.

Первая теория прочности(критерий прочности по наибольшим нормальным напряжениям).

Галилео Галилей (15.02.1564 - 08.01.1642) математик, механик, астроном.

ГИПОТЕЗА: *Предельное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее рабочее напряжение достигает опасного значения*

$$\boxed{\sigma_{\max} = \sigma_1 < \sigma_0}$$

$$\boxed{\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_0}{K} = R}$$

K коэффициент запаса прочности

Рассмотрим этот критерий для сложного напряженного состояния

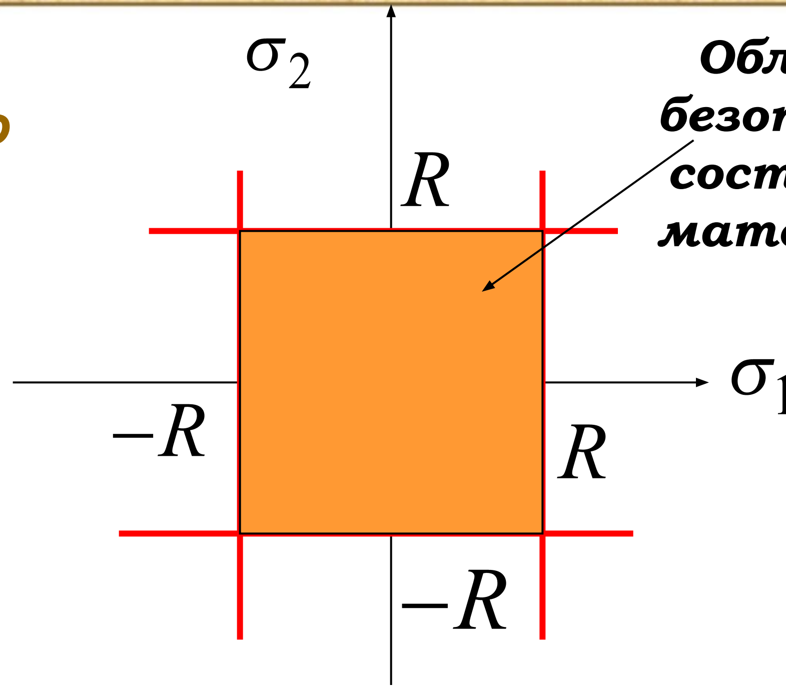
$$\left.\begin{aligned} -R < \sigma_1 < R \\ -R < \sigma_2 < R \\ -R < \sigma_3 < R \end{aligned}\right\}$$

Материал одинаково сопротивляется растяжению-сжатию (пластичный материал).

Геометрическая интерпретация (для плоского напряженного состояния)

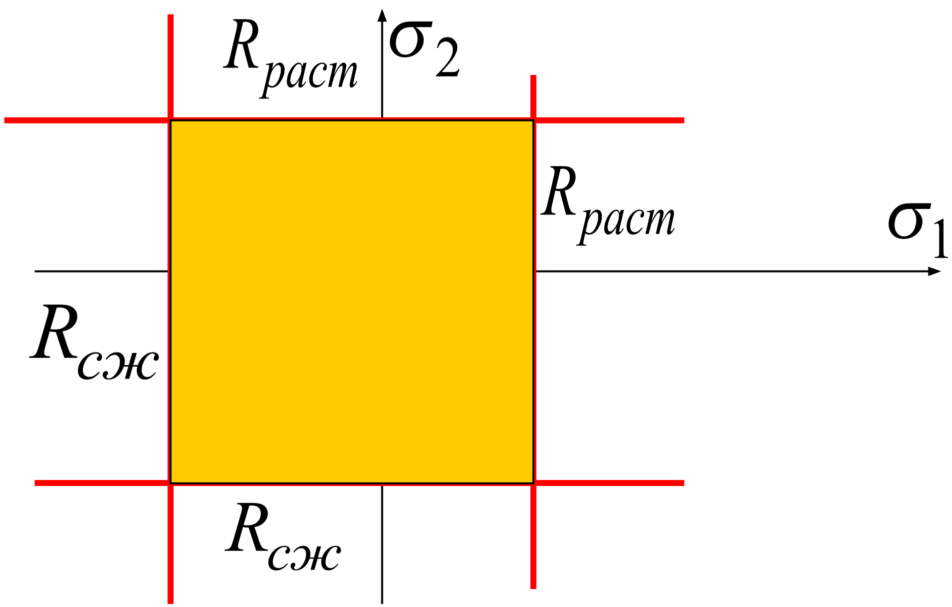
$$\left.\begin{aligned} -R < \sigma_1 < R \\ -R < \sigma_2 < R \end{aligned}\right\}$$

Для пластичных материалов



$$\left.\begin{aligned} -R_{сж} < \sigma_1 < R_{раст} \\ -R_{сж} < \sigma_2 < R_{раст} \end{aligned}\right\}$$

Для хрупких материалов



«-» (Недостаток теории): не учитывается взаимное влияние главных напряжений при переходе материала в опасное состояние

Первая теория прочности удовлетворительно подтверждается лишь для некоторых весьма хрупких материалов (кирпич, стекло и т.п.)

По этой причине в современных инженерных расчетах гипотеза Галилея не используется.

Вторая теория прочности(критерий прочности по наибольшим относительным удлинениям).

Эдме Мариотт (1620 – 12.05.1684) физик, механик.

ГИПОТЕЗА: ***При наступлении предельного состояния наибольшее удлинение достигает предельного значения, равного относитель-ному удлинению при одноосном растяжении.***

Условие разрушения: $\boxed{\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 < \varepsilon_0}$

$$\boxed{\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] < \frac{\sigma_0}{E}}$$

$$\boxed{\sigma_{экв}^{II} = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le R}$$

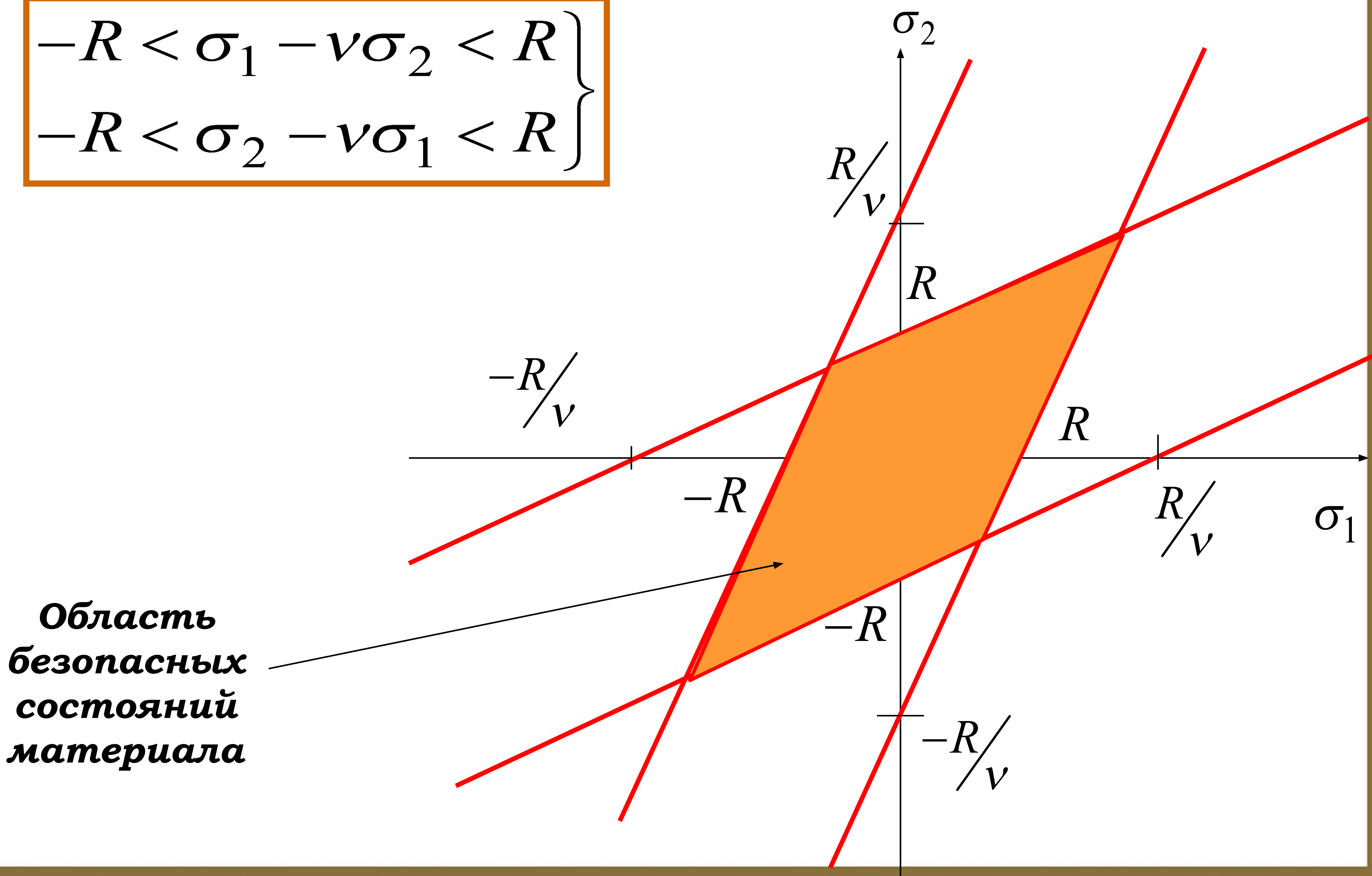
Рассмотрим этот критерий для сложного напряженного состояния

$$\boxed{\left.\begin{aligned} -R < \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) < R \\ -R < \sigma_2 - \nu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right) < R \\ -R < \sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) < R \end{aligned}\right\}}$$

Материал одинаково сопротивляется растяжению-сжатию (пластичный материал).

Геометрическая интерпретация (для плоского напряженного состояния)

$$\left.\begin{aligned} -R < \sigma_1 - \nu\sigma_2 < R \\ -R < \sigma_2 - \nu\sigma_1 < R \end{aligned}\right\}$$



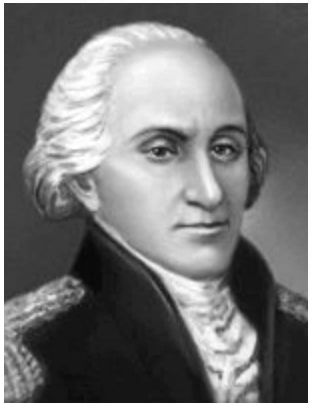
«-» : не учитывается взаимное влияние главных деформаций при переходе материала в опасное состояние

«+» : Вторая теория учитывает взаимное влияние главных напряжений при переходе материала в опасное состояние

Вторая теория прочности удовлетворительно подтверждается лишь для немногих хрупких материалов (легированный чугун, высокопрочные стали после низкого отпуска и т.п.)

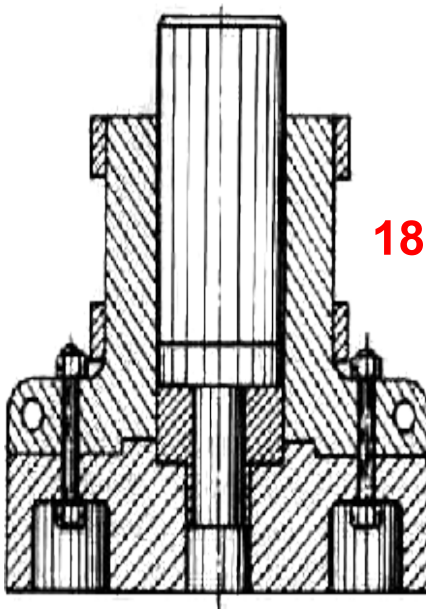
Для большинства материалов она не применима, поэтому в практике современных инженерных расчетов не используется.

Третья теория прочности(критерий пластичности по наибольшим касательным напряжениям).

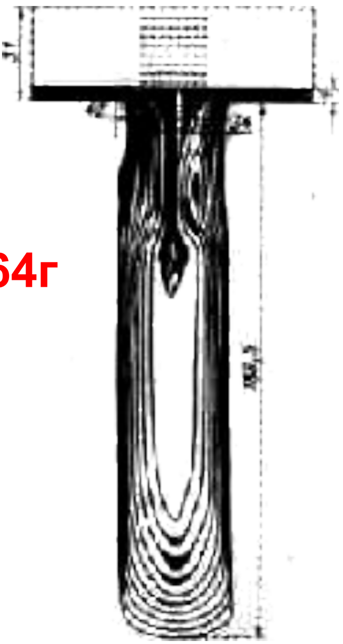


Шарль Огюстен Кулон (14.06.1736 – 23.08.1806) физик, механик, инженер.

Анри Эдуард Треска (1814 –1885) механик, инженер.



1864г



Разрез установки А. Треска для изучения течения металлов

Сечение набора десяти свинцовых пластин после выдавливания на установке.

Адемар Жан-Клод Барре Сен-Венан (23.08.1797 – 06.01.1886) механик, инженер.

1871г

ГИПОТЕЗА: ***Существует предельное значение максимального касательного напряжения, превышение которого вызывает текучесть материала.***

$$\boxed{\tau_{\max} < \tau_0}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} < \tau_0}$$

$$\boxed{\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}}$$

Условие прочности: $$\boxed{\sigma_1 - \sigma_2 < R}$$

Эту теорию используют в современных прочностных расчетах для пластичных материалов.

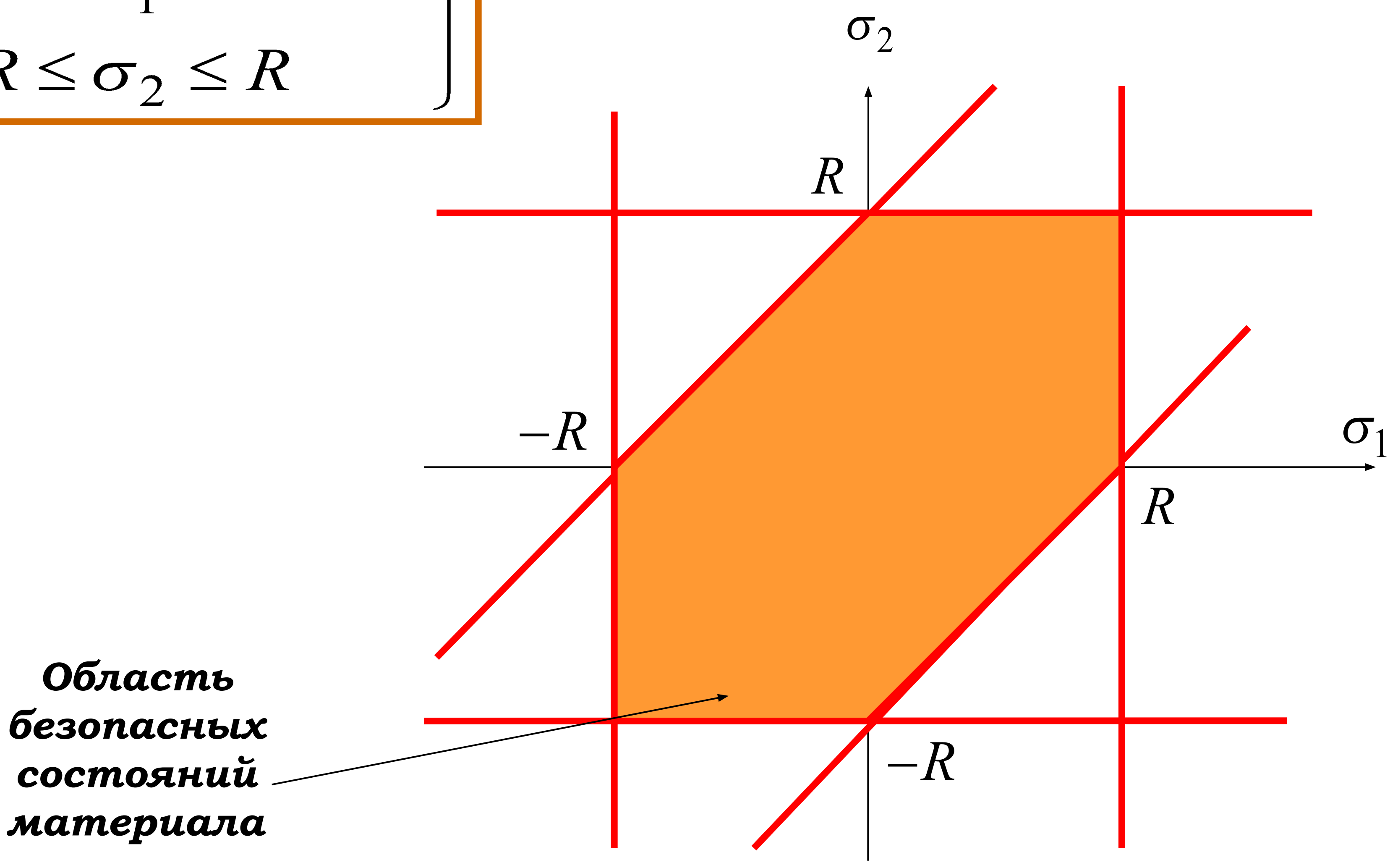
Рассмотрим этот критерий для сложного напряженного состояния

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} -R \le \sigma_1 - \sigma_2 \le R \\ -R \le \sigma_1 - \sigma_3 \le R \\ -R \le \sigma_2 - \sigma_3 \le R \end{array}\right\}}$$

Материал одинаково сопротивляется растяжению-сжатию (пластичный материал).

$$\left.\begin{array}{l} -R \le \sigma_1 - \sigma_2 \le R \\ -R \le \sigma_1 \le R \\ -R \le \sigma_2 \le R \end{array}\right\}$$

Геометрическая интерпретация (для плоского напряженного состояния)



В случае плоского напряженного состояния, когда

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_{\max}, \ \ \sigma_2 = \sigma_{\min}, \quad \sigma_3 = 0}$$

эквивалентное напряжение имеет вид:

$$\boxed{\sigma^{III}_{экв} = \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}}$$

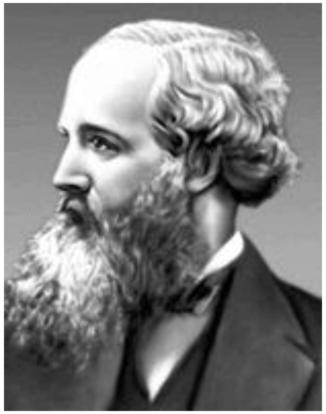
В частности, если $\boxed{\sigma_x = \sigma, \ \sigma_y = 0}$

$$\boxed{\sigma^{III}_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

Четвертая теория прочности(критерий потенциальной энергии изменения формы).

Эудженио Бельтрами (16.11.1835-18.02.1900) математик

1885г



Джеймс Клерк Максвелл (13.06.1831 – 05.11.1879) физик, механик.

1856г

Максимилиан Тытус Хубер (04.01.1872 – 09.12.1950) механик, инженер.

1904г

Рихард Мизес (19.04.1883 – 14.07.1953) механик, инженер.

1913г

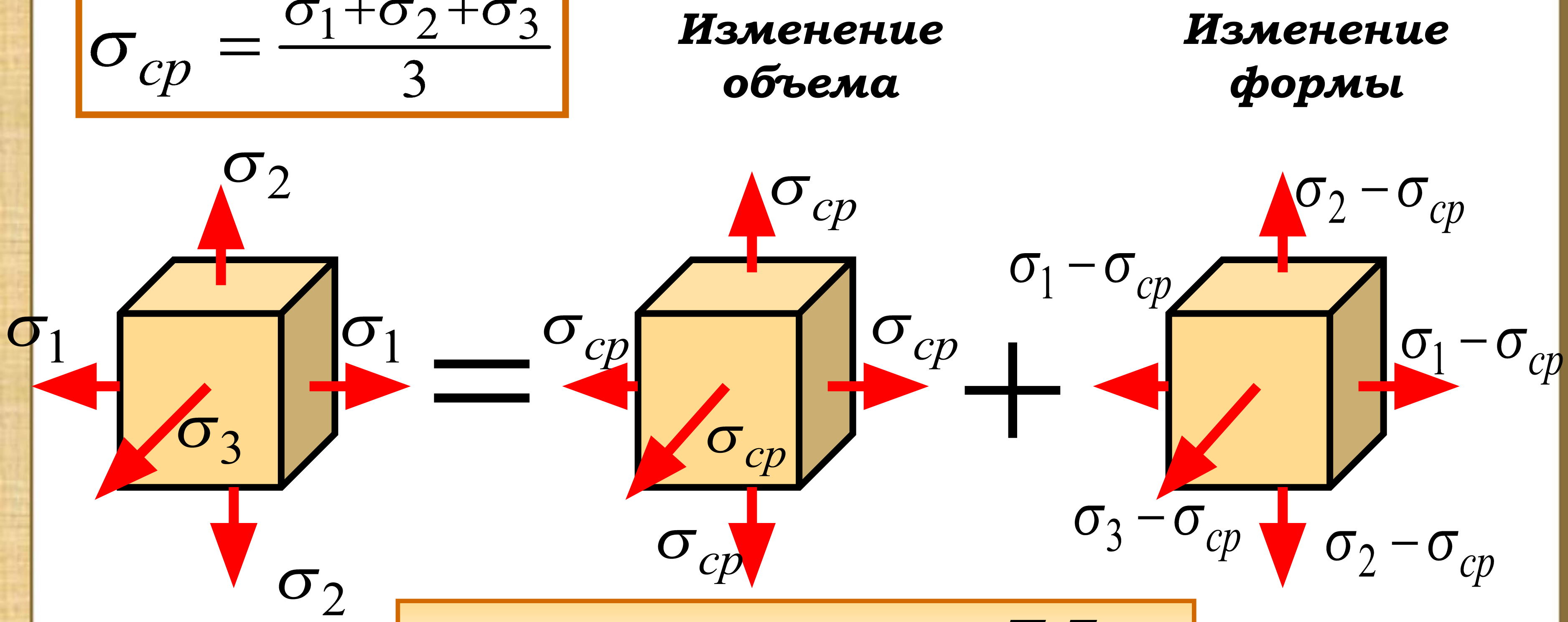
ГИПОТЕЗА: ***Переход материала в опасное состояние возникает в той точке, в которой удельная потенциальная энергия, затраченная на изменение формы достигла опасного значения.***

$$\boxed{U_{\Phi} < U_{0\Phi}}$$

Удельная потенциальная энергия формоизменения для сложного напряженного состояния $<$ Удельная потенциальная энергия формоизменения для линейного напряженного состояния

Сложное напряженное состояние можно представить как сумму других состояний, не изменяя напряженного состояния в точке.

$$\boxed{\sigma_{ср} = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}}$$



$$\boxed{U = U_V + U_Ф}$$

$$U = U_{\Phi} + U_{V} \qquad U_{\Phi} = U - U_{V} \qquad (*)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – *главные напряжения*

$$U = \frac{1}{2}\left[\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right]$$

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right] \qquad (**)$$

Определим из (**) выражение для энергии, связанной с изменением объема.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{cp}$$

$$U_{Vcp} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2 \quad (***)$$

(**) и (***) подставим в (*)

$$U_{\Phi} = U - U_V =$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right] - \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{cp}^2$$

$$U_{\Phi} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right] - \\ - \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right)^2;$$

$$U_{\Phi} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]$$

$$U_{\Phi} = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2\right] \quad \textbf{(1)}$$

Определим удельную потенциальную энергию, затраченную на изменение формы, для линейного напряжённого состояния.

$$U_{\Phi} = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2\right] \quad (1)$$

Полагаем в (1) $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_0 = \sigma_1$

$$U_{0\Phi} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_0^2 \quad (2)$$

(1) и (2) подставим в неравенство $\boxed{U_{\Phi} < U_{0\Phi}}$

$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq 2\sigma_0^2}$$

Условие прочности

$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq 2R^2}$$

«+» : Четвертая теория учитывает взаимное влияние всех трех главных напряжений при переходе материала в опасное состояние

Этот критерий пластичности даёт хорошие результаты для пластичных материалов, одинаково работающих при растяжении и сжатии.

Геометрическая интерпретация (для плоского напряженного состояния)

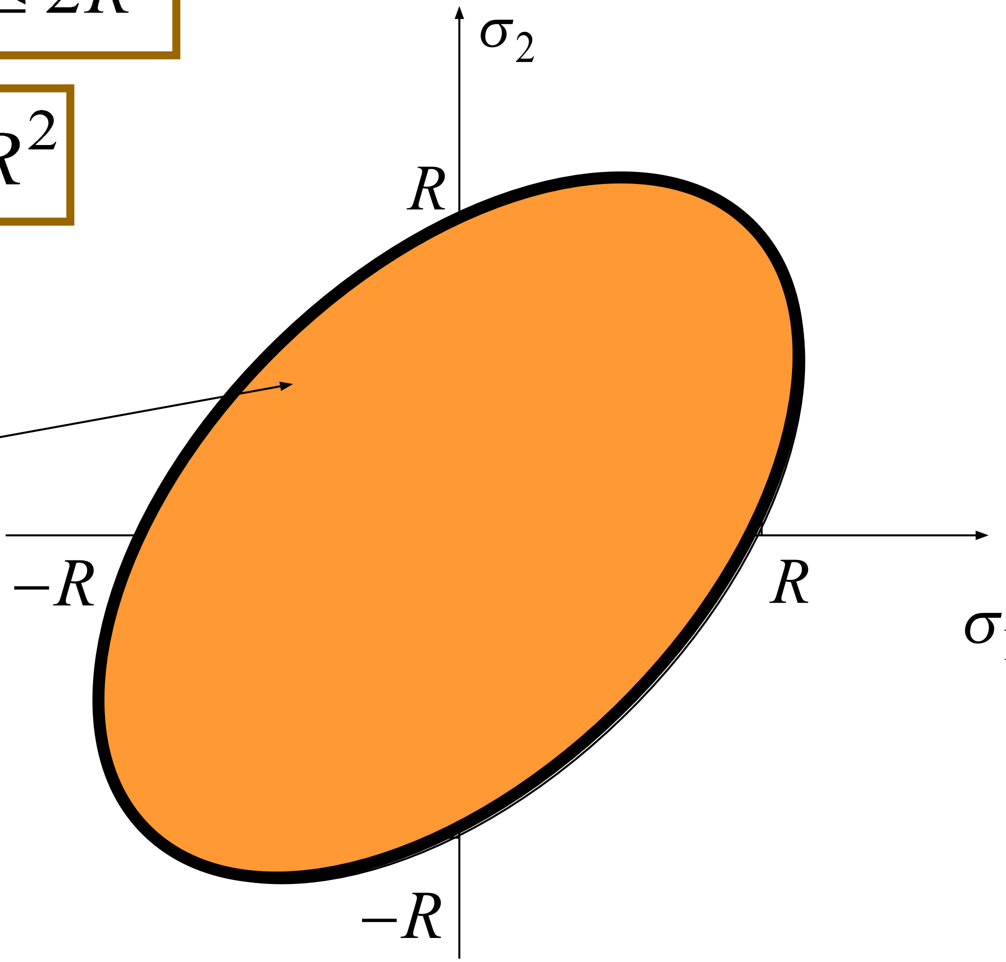
$$\sigma_3 = 0$$

$$\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 \le 2R^2$$

$$\sigma_1{}^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2{}^2 \le R^2$$

эллипс

Область безопасных состояний материала



В случае плоского напряженного состояния условие прочности имеет вид:

$$\boxed{\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le R}$$

Пятая теория прочности (теория прочности Мора).

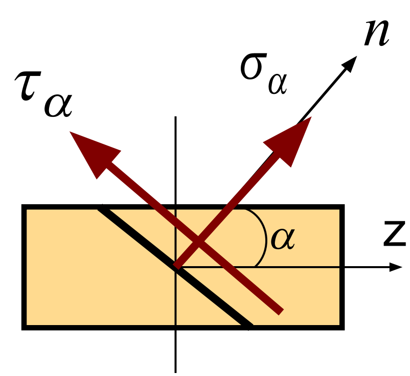
Отто Христиан Мор (08.10.1835 – 03.10.1918) механик, инженер.

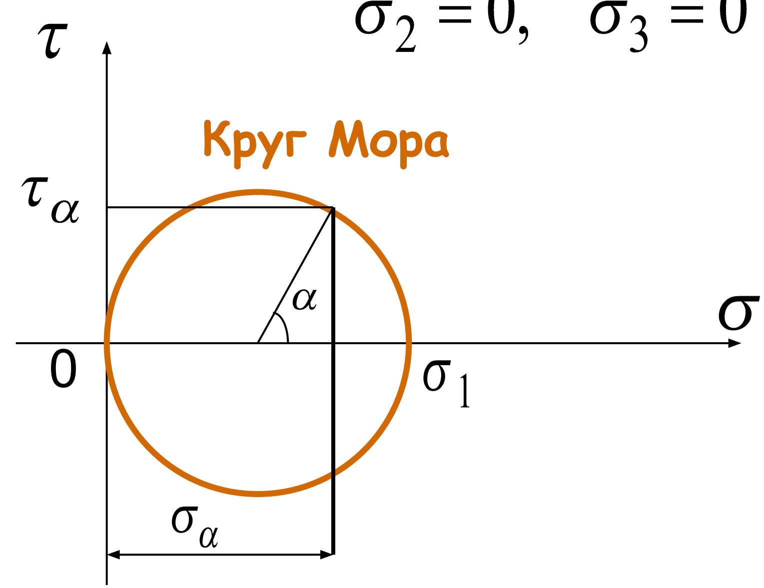
Эту теорию прочности удобно интерпретировать с помощью кругов напряжений.

Рассмотрим осевое растяжение.

$$\sigma_1 \neq 0$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0$$

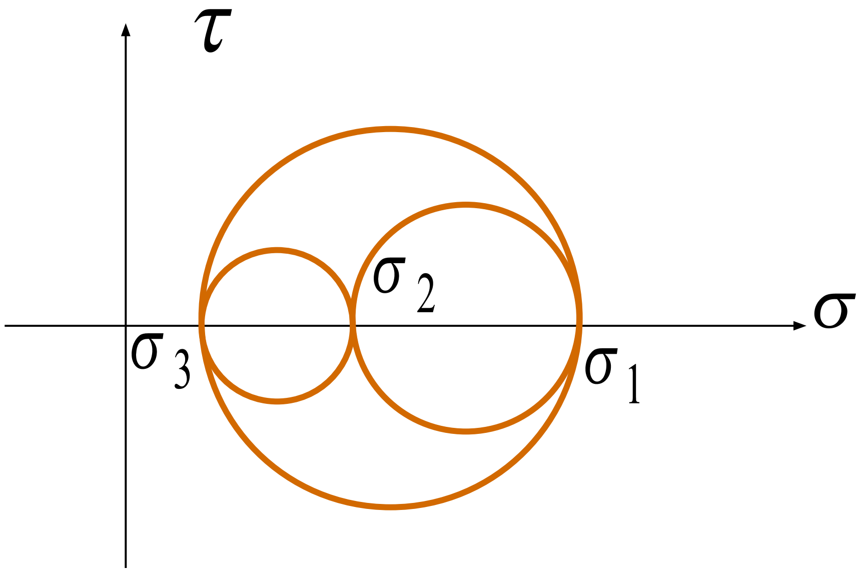




Рассмотрим сложное напряженное состояние

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

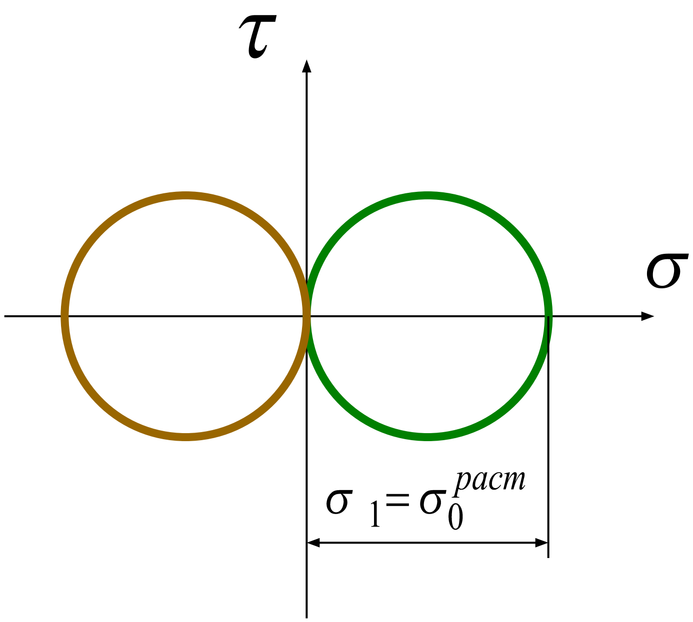
Графическое представление сложного напряженного состояния в точке.



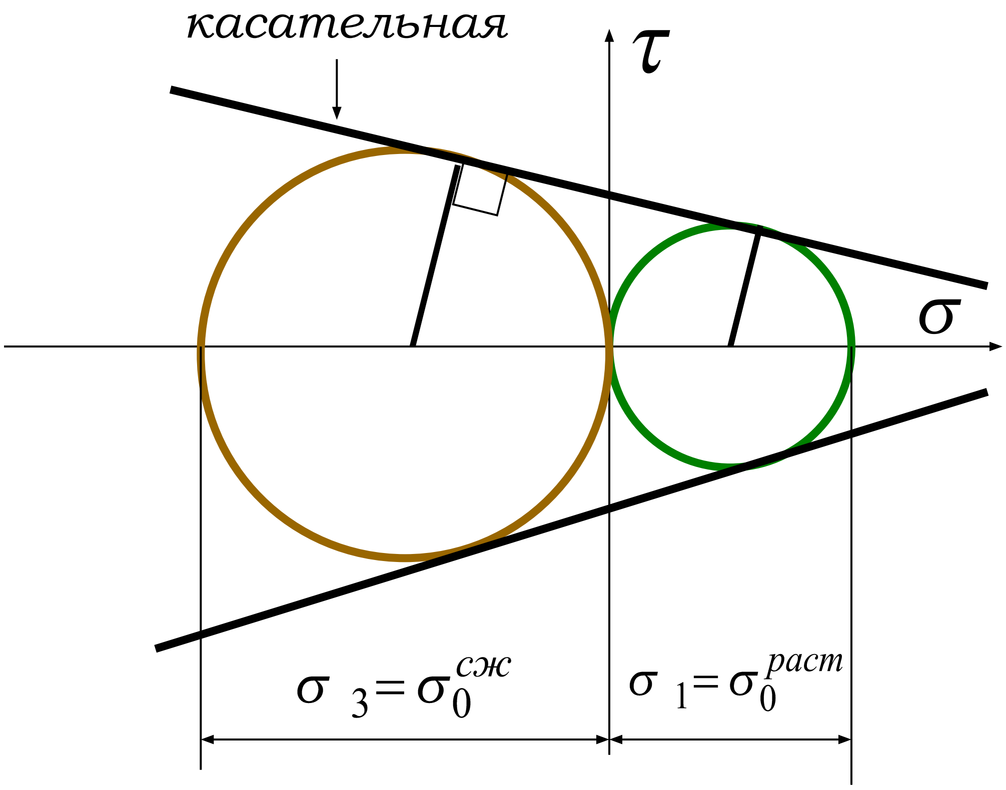
Если напряженное состояние соответствует началу разрушения материала (предельному состоянию), то большой круг называют ПРЕДЕЛЬНЫМ КРУГОМ.

Опишем напряженное состояние с помощью кругов Мора для осевого растяжения-сжатия

Для пластичных материалов



Для хрупких материалов



Гипотеза: среднее главное напряжение σ_2 оказывает незначительное влияние на момент предельного состояния и им можно пренебречь.

Условие прочности имеет вид:

$$\boxed{\sigma_1 - K\sigma_3 \leq R}$$

$$\boxed{K = \frac{\sigma_0^{pacm}}{\sigma_0^{cж}}}$$

Для пластичных материалов K=1.

Пятую теорию прочности используют и для хрупких и для пластичных материалов.

Понятие о новых теориях прочности

Критерии прочности и пластичности справедливы для традиционных конструкционных материалов - однородных и изотропных.

Материал однороден, т.е. характеристики материала во всех точках одинаковы.

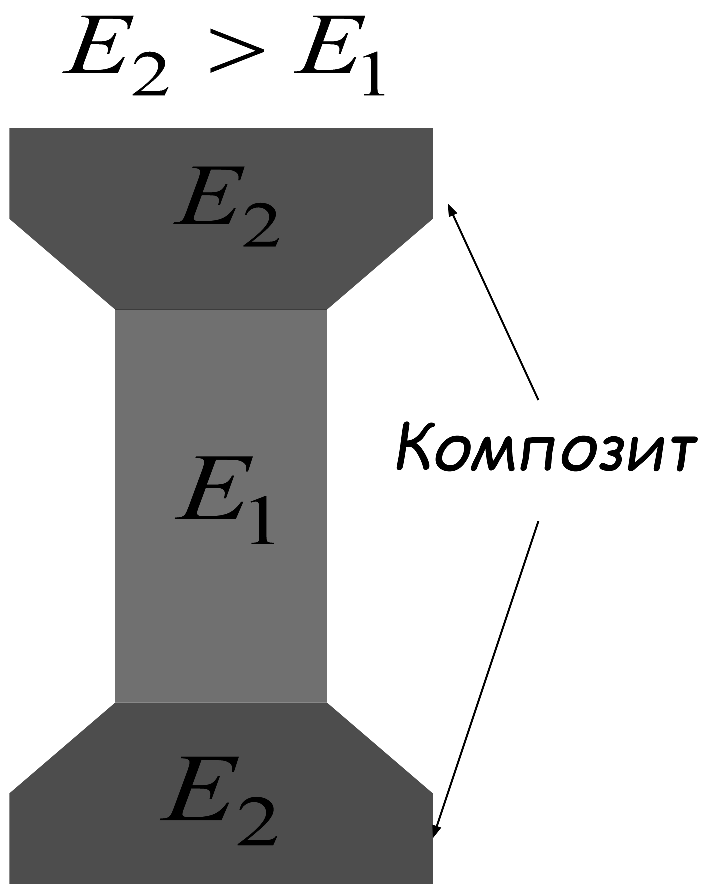
Материал изотропен, т.е. обладает одинаковыми свойствами во всех направлениях.

$$f\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right)=0$$

E – модуль Юнга

μ – коэффициент Пуассона

Композитные материалы



Идея: при создании комбинированного материала основу армируют большим количеством тонких нитей из другого материала, более прочного и жесткого.

Результат: стержень, имеющий в наиболее нагруженных частях сечения материал с повышенными упругими и прочностными характеристиками.

Композит: полимерная или металлическая матрица, армированная высоко прочными волокнами (стеклянными, угольными и т.п.)

Отличительные признаки композитов

неоднородность

анизотропия

Изменение прочностных свойств

Армирование композита

однонаправленное

ортогональное

Симметричное в нескольких направлениях

Условие прочности для ортотропного материала (свойства в продольном и поперечном направлении различны).

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, E_1, E_2, \quad ,\ldots) = 0$$

Пример.

Обобщение критерия текучести по удельной энергии формоизменения в случае плоского напряженного состояния:

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_z}{\tau_{0z}}\right)^2 \leq 1$$

Условие прочности для полимерных материалов

$$f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, E, \mu, \text{время}\ T, \text{температура}\ {}^0(\qquad)\right) = 0$$

Теории, которые учитывают изменение свойств и деформаций с течением времени называют теориями вязкоупругости.

Для любого материала и для любого напряженного состояния можно записать условие прочности.