Решение систем конечных уравнений (СКУ)

- нахождение таких значений аргументов функций, которые обращают все конечные уравнения системы в тождества.

$$f_1(x_1,x_2,\dots x_n)=0$$
$$f_2(x_1,x_2,\dots x_n)=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_m(x_1,x_2,\dots x_n)=0$$

где n – число неизвестных, m – число уравнений, $f_i(x_1,x_2,\dots x_n)=0$ $i=1,\dots,m$ – линейные или нелинейные функции неизвестных аргументов x, x, … x

Если m>n, то система называется **переопределённой**.

Если m<n, то система **недоопределена**.

При m=n, такая система называется **нормальной** системой уравнений.

СКУ можно разделить на два класса: **линейные и нелинейные**. **СЛАУ** содержат алгебраические функции с искомыми аргументами в первой степени во всех уравнениях системы.

Системы нелинейных уравнений делятся на **алгебраические** (содержат только алгебраические функции - многочлены n-ой степени с действительными коэффициентами) **и трансцендентные** (содержат тригонометрические, логарифмические и др.функции, не являющиеся многочленами).

Системы линейных алгебраических уравнений

Система уравнений называется **совместной,** если существует хотя бы одно решение этой системы, в противном случае она **несовместна.**

СЛАУ ***Au=f*** называется **неоднородной**, если найдётся хотя бы один свободный член $f_i \neq 0$, если все $f_i = 0$, $i=1,2,\ldots n$, то система называется **однородной**. Очевидно, что однородная система всегда совместна.

Тривиальное (нулевое) решение однородной СЛАУ ***Au=0*** располагается в начале n-мерной системы координат:

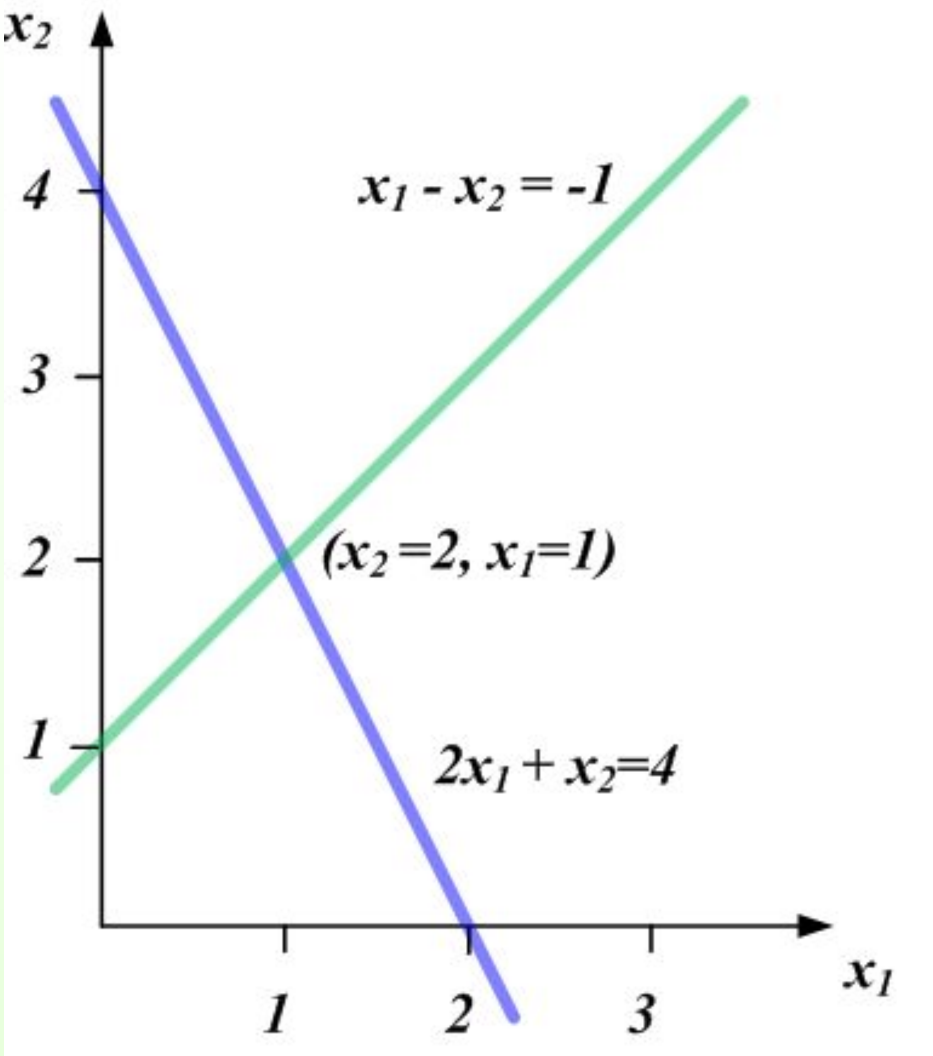
$$u^*=[0, 0,\ldots,0]^T$$

Если $\det A=0$, то однородная СЛАУ имеет бесконечное множество решений

1. Решение системы неоднородных линейных алгебраических уравнений существует и является единственным.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

Решение этой системы $x_1=1$, $x_2=2$

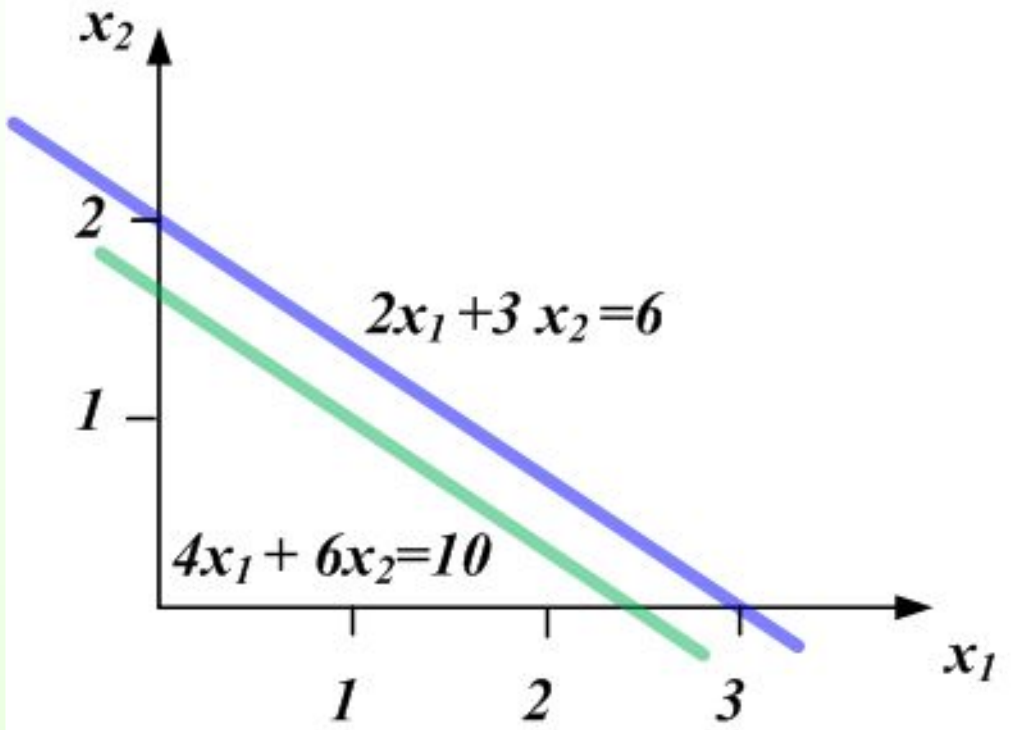


Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, имеющей единственное решение

2. Система неоднородных линейных алгебраических уравнений вообще не имеет решения.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

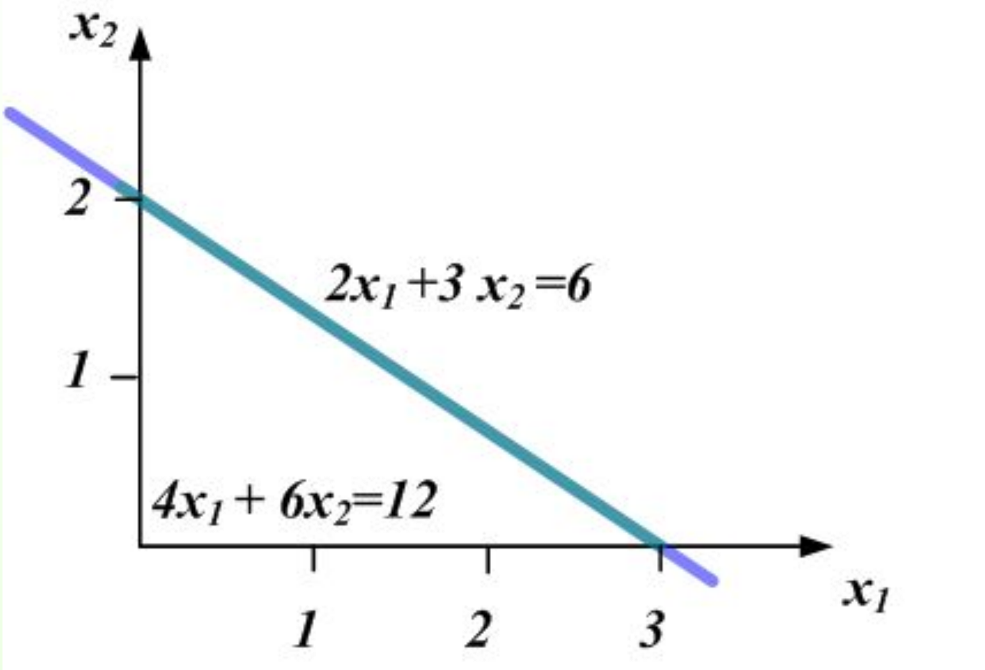
Прямые параллельны и нигде не пересекаются.



Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, не имеющей решения

3. Система неоднородных линейных алгебраических уравнений имеет бесконечное множество решений.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$



Геометрическое представление системы двух линейных уравнений, имеющей бесконечное множество решений

Оба уравнения описывают одну и ту же прямую. Любая точка, лежащая на ней, является решением этой **вырожденной** системы уравнений.

Методы решения СЛАУ делятся на **прямые** (в предположении отсутствия ошибок округления позволяют получить точные решения за конечное число арифметических действий) и **итерационные** или методы последовательных приближений (позволяют вычислить последовательность $\{u_k\}$, сходящуюся к решению задачи при $k \to \infty$.

На практике ограничиваются конечным k в зависимости от требуемой точности. Однако неточность задания правых частей и элементов матрицы коэффициентов A может приводить к значительным погрешностям при вычислении решения СЛАУ.

Теорема Кронекера–Капелли. Для того чтобы система линейных неоднородных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов A был равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $\tilde{A}$ (расширение – за счет столбца свободных членов b_i).

Проверка условия единственности решения выполняется в соответствии с теоремой.

Теорема. Для того чтобы неоднородная система из n уравнений с n неизвестными имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы коэффициентов был отличен от нуля. В противном случае неоднородная система не имеет решения либо имеет их бесчисленное множество.

Рассмотрим СЛАУ вида $\boldsymbol{Au = f}$ (2.1)

где $\mathbf{A}$ — невырожденная ($\det \mathbf{A} \neq 0$) квадратная матрица размером $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_n\}^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец решения, $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец правой части.

Так как матрица системы — невырожденная, $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$, то решение системы (2.1) существует и единственно.

Из курса линейной алгебры [6] известно правило Крамера нахождения решения. Так, каждый компонент вектора неизвестных может быть вычислен как

$$u_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i — определитель матрицы, получаемой из $\mathbf{A}$ заменой i столбца столбцом правых частей. Однако несложные арифметические оценки позволяют понять, что использование этой формулы приводит к неоправ-**данным затратам машинного времени.**

Если использовать наиболее оптимальный способ расчёта определителя, то для решения СЛАУ методом Крамера потребуется примерно $\frac{2}{3}n^4$ арифметических операций.

Для сравнения матриц используются такие их характеристики, как определитель, ранг, матричные нормы.

Норма вектора и норма матрицы – это некоторые скалярные числовые характеристики, которые ставят в соответствие вектору и матрице.

Нормой вектора $\boldsymbol{u = (u_1, u_2, \ldots u_n)^T}$ (обозначают $\|u\|$) в n-мерном вещественном пространстве векторов называют неотрицательное число, вычисляемое с помощью компонент вектора и обладающее следующими свойствами:

а) $\|u\| \geq 0$ ($\|u\|=0$ тогда и только тогда, когда u – нулевой вектор);

б) $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ для любых чисел α (действительных или комплексных);

в) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Нормой матрицы $\boldsymbol{A_{n \cdot n}}$ (обозначается $\|A\|$) с вещественными элементами в пространстве матриц называют неотрицательное число, вычисляемое с помощью элементов матрицы и обладающее следующими свойствами:

а) $\|A\| > 0$ ($\|A\|=0$ тогда и только тогда, когда A – нулевая матрица);

б) $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ для любых чисел α (действительных или комплексных);

в) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$;

г) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ для всех n x n матриц A и B рассматриваемого пространства.

Как видно из определения норм векторов и матриц (определения аналогичны, за исключением последнего свойства нормы матрицы), норма матрицы должна быть согласована с нормой векторов. Это согласование осуществляется следующей связью

$$\|A \cdot u\| \le \|A\| \cdot \|u\|$$

В векторном n-мерном линейном нормированном пространстве введем следующие нормы вектора:

кубическая:

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i|, \tag{2.2а}$$

октаэдрическая:

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|, \tag{2.2б}$$

евклидова (в комплексном случае — эрмитова):

$$\|\mathbf{u}\|_3 = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \right)^{1/2} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}. \tag{2.2в}$$

Согласованные с введёнными выше нормами векторов нормы матриц будут определяться следующим образом:

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (2.3а)$$

$$\|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (2.3б)$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{\max_i |\lambda_i| A^T A} \qquad (2.3в)$$

и евклидова норма матрицы:

$$\|A\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad (2.3г)$$

Обусловленность СЛАУ
Число обусловленности матрицы

Понятия согласованных норм матриц и векторов позволяют оценить погрешности, возникающие при численном решении СЛАУ. Пусть и матрица, и правая часть системы заданы с некоторой погрешностью, тогда наряду с системой

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f} \tag{2.4}$$

рассматривается система

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}. \tag{2.5}$$

Теорема. *Пусть правая часть и невырожденная матрица СЛАУ* (2.4) *вида* $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$, $\mathbf{u} \in L^n, \mathbf{f} \in L^n$, *получили приращения* $\Delta\mathbf{f}$ *и* $\Delta\mathbf{A}$ *соответственно. Пусть существует обратная матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *и выполнены условия* $\|\mathbf{A}\| \neq 0$, $\mu\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} < 1$, *где* $\mu = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$. *В этом случае оценка относительной погрешности решения* $\|\Delta\mathbf{u}\| / \|\mathbf{u}\|$ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leqslant \frac{\mu}{1 - \mu\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}} \left(\frac{\|\Delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right).$$

При $\Delta A \approx 0$ получаем оценку при наличии погрешности только правых частей

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leqslant \mu \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}, \tag{2.7}$$

если в (2.5) положить $\Delta \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u} \approx 0$, то

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leqslant \mu \left(\frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right). \tag{2.8}$$

В результате получено важное соотношение, показывающее, на сколько возрастают относительные ошибки решения СЛАУ в случае наличия относительных ошибок при задании правых частей и элементов матриц.

Величина

$$\mu(\mathbf{A}) = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{A}\| \tag{2.9}$$

называется *числом обусловленности* матрицы **A**. Число обусловленности определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять на решение системы (2.1). Почти очевидно, что всегда $\mu \geqslant 1$. Действительно

$$1 = \|\mathbf{E}\| = \left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right\| \leqslant \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{A}\| = \mu.$$

При $\mu \approx 1 \div 10$ ошибки входных данных слабо сказываются на решении и система (2.1) считается хорошо обусловленной. При $\mu >> 10^2 \div 10^3$ система является плохо обусловленной.

Пример. Решением системы

$$\begin{cases} 100u + 99v = 199 \\ 99u + 98v = 197 \end{cases}$$

будет пара чисел $u = v = 1$.

Внесем возмущение в правые части системы:

$$\begin{cases} 100u + 99v = 198,99 \\ 99u + 98v = 197,01. \end{cases}$$

При этом решение заметно изменится: $u = 2,97; v = -0,99$. Воспользовавшись выбранными согласованными нормами, получим

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i|, \quad \|\mathbf{f}\|_1 = 199, \quad \|\Delta \mathbf{f}\|_1 = 10^{-2},$$

$$\delta f = \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|_1}{\|\mathbf{f}\|_1} \approx 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ (это очень малая величина)},$$

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 = 199, \mu = 199 \cdot 199 \approx 4 \cdot 10^4.$$

Значит, $\delta u = \frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leqslant \mu \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} \approx 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{10^{-4}}{2} = 2$, что согласуется с результатами решения возмущенной и невозмущенной задач. Для невозмущенной задачи $\|\Delta \mathbf{u}\| \approx 2$, $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Пример. Вычислить число обусловленности для матрицы А.

$$A = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}$$

Для этой матрицы $\det A = 10^{-4} \neq 0$ $A^{-1} = 10^{4} \cdot \begin{bmatrix} 0,98 & -0,99 \\ -0,99 & 1,0 \end{bmatrix}$

$\|A\|_1 = 1,99$; $\|A^{-1}\|_1 = 1,99 \cdot 10^4$; $\mu(A) = 39601$

Классический пример плохо обусловленной матрицы – матрица Гильберта: $a_{ij} = 1/(i + j - 1), \quad i, j = 1, \ldots, n.$

Числа обусловленности для матриц Гильберта различных порядков

n	3	6	9	12	15
μ	524,0568	1,4951e+007	4,9315e+011	1,7945e+016	8,4880e+017

```
>>cond(hilb(n))
```

Прямы методы решения СЛАУ

Прямые методы дают решение за конечное число шагов. Они просты и универсальны. Их обычно используют для матриц порядка $n < 10^4$.

Трудность численного решения СЛАУ определяется видом матрицы А. Большое значение имеют её размер, обусловленность, симметричность, заполненность, специфика расположения ненулевых коэффициентов и др.

Легко получается решение системы с диагональной матрицей А: система распадается на n линейных уравнений, каждое из которых содержит лишь одну неизвестную величину.

Для диагональной системы очевидны явные формулы:

$$u_k = f_k/a_{kk}, k = 1 \div n.$$

В случае треугольной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

из последнего уравнения получаем $u_n = f_n/a_{nn}, (a_{ii} \neq 0$, т. к. $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0)$.

Решая систему линейных уравнений с треугольной матрицей «снизу вверх», для u_k имеем

$$u_k = \frac{1}{a_{kk}}(f_k - a_{kn}u_n - a_{k,n-1}u_{n-1} - \dots - a_{k,k+1}u_{k+1}),$$

или $u_k = a_{kk}^{-1}(f_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}u_j), k = n-1, n-2, \dots, 1.$

Можно оценить количество арифметических действий, затрачиваемых на решение такой системы. Оно составляет $O(n^2)$.

Метод исключения Гаусса

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n = f_1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n = f_2, \\ \ldots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n = f_n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Прямой ход метода Гаусса состоит в следующем. Положим, что $a_{11} \neq 0$ и исключим u_1 из всех уравнений, начиная со второго, для чего ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11} = -\eta_{21}$, к третьему прибавим первое, умноженное на $-a_{31}/a_{11} = -\eta_{31}$ и т. д. После этих преобразований получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n = f_1, \\ a_{22}^1 u_2 + \ldots + a_{2n}^1 u_n = f_2^1, \\ \ldots \\ a_{n2}^1 u_2 + \ldots + a_{nn}^1 u_n = f_n^1, \end{cases} \tag{2.11}$$

в которой коэффициенты и правые части определяются следующим образом:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - \eta_{i1} a_{1j}; f_i^1 = f_i - \eta_{i1} f_1; i,j = 2,\ldots,n.$$

Теперь положим $a_{22}^1 \neq 0$. Аналогично, вычислив множители второго шага $-a_{i2}^1/a_{22}^1 = -\eta_{i2}$ $(i = 3,\ldots,n)$, исключаем u_2 из последних $(n-2)$ уравнений системы (2.17). В результате преобразований получим новую эквивалентную систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \ldots + a_{1n}u_n = f_1 \\ a_{22}^1 u_2 + a_{23}^1 u_3 + \ldots + a_{2n}^1 u_n = f_2^1 \\ a_{33}^2 u_3 + \ldots + a_{3n}^2 u_n = f_3^2 \\ \ldots \\ a_{n3}^2 u_3 + \ldots + a_{nn}^2 u_n = f_n^2 \end{cases},$$

в которой $a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - \eta_{i2} a_{2j}^1$; $f_i^2 = f_i^1 - \eta_{i2} f_2^1$; $i,j = 3,\ldots,n$. Продолжая алгоритм, т.е. исключая u_i $(i = k+1,\ldots,n)$, приходим на $n-1$ шаге к системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \ldots + a_{1n}u_n = f_1 \\ a_{22}^1 u_2 + a_{23}^1 u_3 + \ldots + a_{2n}^1 u_n = f_2^1 \\ a_{33}^2 u_3 + \ldots + a_{3n}^2 u_n = f_3^2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{nn}^{(n-1)} u_n = f_n^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (2.12)$$

.

Обратный ход метода Гаусса позволяет определить решение системы линейных уравнений. Из последнего уравнения системы находим u_n; подставляем это значение в предпоследнее уравнение, получим u_{n-1}. Поступая так и далее, последовательно находим $u_{n-2}, u_{n-3}, \ldots, u_1$. Вычисления компонент вектора решения проводятся по формулам

$$u_n = f_n^{(n-1)}/a_{nn}^{(n-1)},$$

$$\ldots$$

$$u_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}(f_k^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)}u_{k+1} - \ldots - a_{kn}^{(k-1)}u_n), \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1,$$

$$\ldots$$

$$u_2 = \frac{1}{a_{22}^1}(f_2^1 - a_{23}^1 u_3 - \ldots - a_{2n}^1 u_n),$$

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}}(f_1 - a_{12}u_2 - \ldots - a_{1n}u_n).$$

Этот алгоритм прост и легко реализуем при условии, что $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ и т.д. Количество арифметических действий прямого хода $\approx 2/3n^3$, обратного $\approx n^2$. Это уже приемлемая для современных компьютеров величина.

Рассмотрим метод Гаусса с позиции операций с матрицами. Пусть $\mathbf{A}_1$ — матрица системы после исключения первого неизвестного

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & \dots & a_{3n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & \dots & a_n^1 n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \{f_1, f_2^1, \dots, f_n^1\}^{\mathrm{T}}.$$

Введем новую матрицу

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\eta_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\eta_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\eta_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{N}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{N}_1\mathbf{f}$. Аналогично, после второго шага система приводится к виду $\mathbf{A}_2\mathbf{u} = \mathbf{f}_2$, где $\mathbf{A}_2 = \mathbf{N}_2\mathbf{A}_1$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{N}_2\mathbf{f}_1$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & \dots & a_{3n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^2 & \dots & a_{nn}^2 \end{pmatrix}, \mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\eta_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\eta_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \left\{ f_1, f_2^1, f_3^2, \dots, f_n^2 \right\}^{\mathrm{T}}.$$

После $n-1$ шага получим $\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{n-1}$, $\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{N}_{n-1} \cdot \mathbf{A}_{n-2}$, $\mathbf{f}_{n-1} = \mathbf{N}_{n-1}\mathbf{f}_{n-2}$,

$$\mathbf{A}_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & \dots & a_{3n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\eta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_{n-1} = \{ f_1, f_2^1, f_3^2, \dots, f_n^{n-1} \}^{\mathrm{T}}.$$

В итоге получаются матрица и вектор $\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{N}_{n-1} \ldots \mathbf{N}_2\mathbf{N}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{f}_{(n-1)} = \mathbf{N}_{n-1} \ldots \mathbf{N}_2\mathbf{N}_1\mathbf{f}$, откуда $\mathbf{A} = \mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{N}_2^{-1} \ldots \mathbf{N}_{n-1}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{n-1}$. При этом

$$\mathbf{N}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \eta_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \eta_{31} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \eta_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \eta_{n2} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \eta_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

После введения обозначений $\mathbf{U} = \mathbf{A}_{n-1}$, $\mathbf{L} = \mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{N}_2^{-1} \ldots \mathbf{N}_{n-1}^{-1}$, где

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \eta_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \eta_{31} & \eta_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \eta_{n3} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

получим $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Это представление матрицы **A** называется **LU**-разложением (на произведение нижней и верхней треугольных матриц **L** и **U**). Прямой ход метода Гаусса можно рассматривать как один из вариантов представления матрицы в виде произведения двух треугольных матриц, или **LU**-разложения. Его можно провести и другими способами.

Если в методе Гаусса элемент на главной диагонали мал, то коэффициенты становятся большими числами, и при пересчёте элементов матрицы может быть значительная потеря точности на ошибках округления при вычитании больших чисел. Чтобы этого не происходило , перед исключением u_1 среди элементов 1-ого столбца находится главный или максимальный элемент.

Этот метод называется **методом Гаусса с выбором главного или ведущего элемента.** Из-за накапливания погрешностей в процессе округления метод Гаусса без выбора главных элементов используется обычно для решения сравнительно небольших ($n \le 100$) систем уравнений с плотно заполненной матрицей коэффициентов и не близким к нулю определителем. Если матрица А сильно разрежена, а её определитель при этом не близок к нулю, то метод Гаусса пригоден для решения больших систем уравнений.

Пусть максимум достигается при $i = k$. В этом случае меняются местами первое и k уравнения (или в матрице меняются местами две строки) и реализуется процедура исключения.

Затем отыскивается $\max_i |a_{i2}^1|$, и процедура поиска главного элемента в столбцах повторяется. Так же реализуется выбор главного элемента по строкам: перед исключением u_1 отыскивается $\max_j |a_{kj}|$. Если максимум достигается при $i = k$, то у u_1 и u_k меняются номера, то есть максимальный элемент из коэффициентов первого уравнения окажется на месте a_{11}, и т. д. Наиболее эффективным является метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице. Во многих методах важным является условие *диагонального преобладания* $|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ для $i = 1, \ldots, n$, при выполнении которого проблемы, появляющиеся в методе Гаусса, не возникают. Если для всех строк матрицы выполняются строгие неравенства, то говорят о *строгом диагональном преобладании*.

Полученное решение можно улучшить следующим образом. Пусть $\mathbf{r}^1 = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^1$ есть невязка, допущенная при решении рассматриваемой системы ($\mathbf{u}^1$ — полученное численное решение) за счет ошибки округлений. Очевидно, что погрешность $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{u} - \mathbf{u}^1$ удовлетворяет СЛАУ $\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{r}^1$, так как $\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{u}^1 = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^1$.

Решив последнюю систему, получаем $\boldsymbol{\varepsilon}^1$, после чего уточняем решение:

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^1 + \boldsymbol{\varepsilon}^1.$$

Эту процедуру можно продолжить.

При решении многих прикладных задач возникают **разреженные матрицы**, т.е матрицы, в которых много нулевых элементов. К ним относятся и трёхдиагональные матрицы. **Метод прогонки** разработан для решения систем уравнений с трёхдиагональной матрицей.

Для хранения квадратной матрицы А размерности nxn требуется n^2 ячеек памяти и порядка n^3 арифметических операций при работе с ней. Память, отводимая под хранение разреженной матрицы, пропорциональна количеству ненулевых элементов памяти. Оно вычисляется командой **mnz(A)**. Количество арифметических операция также пропорционально **mnz(A)**.

LU-разложение

Если матрица **A** представима в виде произведений матриц **LU**, то СЛАУ может быть представлена в виде

$$(\mathbf{LU})\mathbf{u} = \mathbf{f}. \qquad (2.13)$$

Перепишем (2.13), вводя вспомогательный вектор **v**, в следующем виде

$$\mathbf{Lv} = \mathbf{f}, \mathbf{Uu} = \mathbf{v}. \qquad (2.14)$$

Решение СЛАУ свелось к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами. Первый этап решения системы $\mathbf{Lv} = \mathbf{f}$:

$$\begin{cases} v_1 = f_1, \\ l_{21}v_1 + v_2 = f_2, \\ \dots \\ l_{n1}v_1 + l_{n2}v_2 + \dots + l_{n,n-1}v_{n-1} + v_n = f_n, \end{cases}$$

откуда можно вычислить все v_k последовательно по формулам

$$v_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}\, v_j; k = 2, \dots, n.$$

Далее рассмотрим систему $\mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ или

$$\begin{cases} d_{11}u_1 + d_2u_2 + \ldots + d_{1n}u_n = v_1, \\ d_{22}u_2 + \ldots + d_{2n}u_n = v_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ d_{nn}u_n = v_n, \end{cases}$$

решение которой находится в обратном порядке, т. е. при $k = n-1, \ldots, 1$ по очевидным формулам $u_k = d_{kk}^{-1}(v_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{kj}u_j)$. Условия существования такого разложения даются следующей теоремой [5] (без доказательства).

Теорема. *Если все главные миноры квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *отличны от нуля, то существуют единственные нижняя и верхняя треугольные матрицы* $\mathbf{L} = l_{ij}$ *и* $\mathbf{U} = d_{ij}$ *такие, что* $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$. *При этом все диагональные коэффициенты матрицы* $\mathbf{L}$ *фиксированы и равны единице.*

Опишем алгоритм нахождения элементов $l_{ij}d_{ij}$ матриц $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$. Выписав равенство $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ в компонентах, получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц, приходим к системе линейных уравнений размером $n \times n$:

$$d_{11} = a_{11}, d_{12} = a_{12}, \dots, d_{1n} = a_{1n},$$
$$l_{21}d_{11} = a_{21}, l_{21}d_{12} + d_{22} = a_{22}, \dots, l_{21}d_{1n} + d_{2n} = a_{2n},$$
$$\dots$$
$$l_{n1}d_{11}=a_{n1}, l_{n1}d_{12}+l_{n2}d_{22}=a_{n2}, \dots, l_{n1}d_{1n}+ \dots +l_{n,n-1}d_{n-1,n}+d_{nn}=a_{nn}$$

относительно неизвестных $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n}, l_{21}, d_{22}, \dots, d_{2n}, l_{n1}, l_{n2}, \dots, d_{nn}$.

Специфика этой системы позволяет решить ее последовательно. Из первой строки находим $d_{1j} = a_{1j} (j = 1, \dots, n)$.

Из уравнений, входящих в первый столбец приведенной выше системы, находим $l_{i1} = a_{i1}/d_{11}, i = 1, \dots, n$. Теперь можно из уравнений второй строки найти $d_{2j} = a_{2j} - l_{21}d_{1j}, j = 2, \dots, n$, а из уравнений, входящих во второй столбец, получим $l_{i2} = d_{22}^{-1}(a_{i2} - l_{i1}d_{12}), i = 2, \dots, n$ и так далее. Последним вычисляется элемент

$$d_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}d_{kn}.$$

Можно выписать общий вид этих формул:

$$d_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kj}, \quad i \leqslant j,$$

$$l_{ij} = d_{ij}^{-1} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kj} \right), i > j.$$

Приведение матриц к треугольному виду аналогично приведению матрицы в методе Гаусса и также требует количества арифметических действий порядка $O(n^3)$, точнее, $\approx 2n^3$.

Метод Холецкого (метод квадратного корня)

Пусть матрица A рассматриваемой линейной системы - симметричная, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$, положительная матрица. Тогда она представима в виде $A=LL^T$, где

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{1n} & l_{2n} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Далее, как и в случае LU-разложения, решение СЛАУ $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ сводится к последовательному решению двух линейных систем с треугольными матрицами $\mathbf{Lv} = \mathbf{f}$, $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{v}$, для решения которых требуется примерно $2n^2$ арифметических действий.

Первая из этих линейных систем

$$l_{11}v_1 = f_1,$$
$$l_{12}v_1 + l_{22}v_2 = f_2,$$
$$\dots$$
$$l_{1n}v_1 + l_{2n}v_2 + \ldots + l_{nn}v_n = f_n,$$

она легко решается. Для решения получаем очевидные формулы

$$v_i = l_{ii}^{-1}(f_i - \sum_{k=1}^{i} l_{ki}v_k), i = 1, \ldots, n.$$

Вторая система уравнений есть

$$l_{11}u_1 + l_{12}u_2 + \ldots + l_{1n}u_n = v_1, l_{22}u_2 + \ldots + l_{2n}u_n = v_2, \ldots l_{nn}u_n = v_n.$$

Из нее находим значения переменных u_i в обратном порядке по формуле

$$u_k = l_{ii}^{-1}(v_k - \sum_{j=k+1}^{n} l_{kj}u_j).$$

Определенной опасностью при реализации этого метода являются возможная близость к нулю l_{ii} и отрицательность подкоренных выражений при вычислении l_{ii} (последнего не должно быть при симметричной положительной матрице **A**)

Элементы матрицы **L** находим из уравнения $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{A}$, приравнивая соответствующие элементы матриц $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ и **A**. В результате получим систему уравнений

$$l_{11}^2 = a_{11},$$
$$l_{i1}l_{11} = a_{i1}, i = 2, \ldots, n,$$
$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22},$$
$$l_{i1}l_{21} + l_{i2}l_{22} = a_{i2}, i = 3, \ldots, n,$$
$$\ldots$$
$$l_{k1}^2 + l_{k2}^2 + \ldots + l_{kk}^2 = a_{kk},$$
$$l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k2} + \ldots + l_{ik}l_{kk} = a_{kk}, i = k + 1, \ldots, n.$$

Решение этой системы легко находится:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}},$$
$$l_{i1} = a_{i1}/l_{11}, i = 2, \ldots, n,$$
$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2},$$
$$l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1}l_{21})/l_{22}, i = 3, \ldots, n,$$
$$\ldots$$
$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - l_{k2}^2 - \ldots - l_{k,k-1}^2},$$
$$l_{ik} = (a_{ik} - l_{i1}l_{k1} - l_{i2}l_{k2} - \ldots - l_{i,k-1}l_{k,k-1})/l_{kk}, i = k+1, \ldots, n,$$

Метод также называется методом квадратного корня.

Метод обратной матрицы

В матричном виде СЛАУ имеет вид $Au=f$.

Методом обратной матрицы решение системы может быть получено в результате умножения слева правой и левой частей этого уравнения на обратную матрицу от матрицы коэффициентов системы:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}f$$

Учитывая, что $A^{-1}A = E$, получаем $x = A^{-1}f$.

Этот метод удобно применять в тех случаях, когда несколько раз решается система уравнений с разными правыми частями. В этом случае достаточно один раз вычислить обратную матрицу A^{-1} и затем умножать её на различные векторы f.

Недостатком метода являются трудности вычисления обратной матрицы, особенно если она большой размерности или если её определитель близок к нулю.

Решение СЛАУ в MATLAB

В MATLAB имеется обширный арсенал методов решения СЛАУ. Для этого применяются следующие операторы:

\	– левое деление;
^ - 1	– возведение в степень –1;
inv(A)	– обращение матрицы **A**.

x=A\b

x=A^-1*b

x=inv(A)*b

- **prod(V)** или **prod(A,k**) – вычисляет произведение элементов массива ***V*** или произведения столбцов или строк матрицы в зависимости от значения **k**;

```
>> V=[1,2,3];
>> prod (V) % произведение элементов вектора

>>A=[1 2;3 4]
>> prod(A) %произведения столбцов матрицы

>>prod(A,1) % произведения столбцов матрицы

>> prod(A,2) % произведения строк матрицы
```

- **sum(V)** или **sum(A,k)** – вычисляет сумму элементов массива ***V*** или сумму столбцов или строк матрицы, в зависимости от значения **k**;

```
>>V=[-1 0 3 -2 1 -1 1]
>>sum(V) %сумма элементов вектора

>>C=[1 2 3;1 2 3]
>>sum(C,1) %сумма элементов матрицы по столбцам

>>sum(C,2) %сумма элементов матрицы по строкам
```

- **dot (v1,v2)** – вычисляет скалярное произведение векторов v1 и v2, то же значение выдаст функция sum(v1.*v2);

```
>>v1=[1.2;0.3;-1.1]
>>v2=[-0.9;2.1;0.5]
>>dot (v1,v2) %скалярное произведение
>> sum(v1.*v2) %скалярное произведение
```

- **cross (v1,v2)** – определяет векторное произведение векторов v1 и v2;

```
>>v1=[1.2;0.3;-1.1]
>>v2=[-0.9;2.1;0.5]
>>cross (v1,v2)
```

- **min(V)** – находит минимальный элемент массива ***V***, вызов в формате [k,n]=min(V) даёт возможность определить минимальный элемент **k** и его номер ***n*** в массиве;
- **max(V)** - находит максимальный элемент массива ***V***, вызов в формате [k,n]=max(V) определяет максимальный элемент **k** и его номер ***n*** в массиве;

```
>> V=[-1 0 3 -2 1 -1 1]
>> min(V)
>> max(V)
>> [k,n]=min(V)
>> [k,n]=max(V)
```

- **sort(V)** – выполняет упорядочивание массива V

```
>> V=[-1 0 3 -2 1 -1 1]
>> sort(V) %сортировка по возрастанию
>> -sort(-V) % сортировка по убыванию.
```

- **det(M)** – вычисляет определитель квадратной матрицы M;
- **rank(M)** – определяет ранг матрицы M;
- **norm(M,p)** – вычисляет различные виды норм матрицы M в зависимости от p (p=1, 2, inf, fro);
- **cond(M,p)** – определяет число обусловленности матрицы M, основанное на норме p;

```
>> M=[5 7 6 5;7 10 8 7;6 8 10 9;5 7 9 10]
>> norm(M) %норма матрицы M
>> cond(M) %число обусловленности матрицы M
>> norm(M,2) %вторая норма матрицы M, аналогично
   norm(M)
>> cond(M,2) %число обусловленности матрицы M для
   второй нормы, аналогично cond(M)
```

- **diag(V,n)** или **diag(V)** – создаёт квадратную матрицу с элементами V на **n**-ой диагонали или элементами V на главной диагонали;

>> diag(V) %диагональная матрица, V на главной диагонали

>> diag(V,1) %диагональная матрица, V на первой диагонали

- **cat(n, A, B, …)** – объединяет матрицы A и B и все входящие матрицы, аналогично [A,B].

- **inv(M)** - вычисляет матрицу, обратную к M;

>> M=[2 1 -5 1;1 -3 0 -6;0 2 -1 2;1 4 -7 6]

>>P=inv(M)

- **linsolve(A,b**) - решение системы линейных уравнений A*x=b, вызов в формате linsolve(A,b,options) позволяет задать метод решения уравнения. Если задать функцию в виде [x,r]= linsolve(A,b), то она вернёт x – решение системы и r - ранг матрицы A;

В случае, когда для решения линейной системы используется знак \ , т.е. X=A\b , выбор метода остаётся за MATL AB.

```
>> A=[1 2 3;-2 -4 -6]; b=[5;6]
>>x= linsolve(A,b)
>>A*x %проверка – решение не верно
>> [x,r]= linsolve(A,b)

>> A=[2 -1 1;3 2 -5;1 3 -2]; b=[0;1;4]
>>x= linsolve(A,b); >>A*x % проверка – решение верно
>> [x,r]= linsolve(A,b)
```

- **rref(M)** - осуществляет приведение матрицы М к треугольной форме, используя метод исключения Гаусса;

```
>>%Решение системы уравнений методом Гаусса
>> A=[2 -1 1;3 2 -5;1 3 -2]; b=[0;1;4]
>> C= rref([A b]) %приведение расширенной матрицы к треугольному виду
>>x=C(1:3,4:4) %выделение последнего столбца из матрицы – это решение системы уравнений
>> A*x %проверка
```

- **chol(M)** - вычисляет разложение по Холецкому для положительно определённой симметрической матрицы M;

>> A=[10 1 1;2 10 1;2 2 10]

>>chol(A)

>> A = [1 2;1 1] %матрица не симметрическая

>>chol(A)

>> A = [3 1 -1 2;-5 1 3 -4;2 0 1 -1; 1 -5 3 -3] %матрица содержит отрицательные элементы

>>chol(A)

- **lu(M)** – выполняет **LU**- разложение, возращает две матрицы: нижнюю треугольную **L** и верхнюю треугольную **U;**
- **qr(M) –** выполняет **QR –** разложение, возвращает ортогональную матрицу **Q** и верхнюю треугольную **R***;* Ортогональная матрица обладает свойством $Q^{T} = Q^{-1}$.
- **realmin** и **realmax** – выводят соответственно минимально (после нуля) и максимально возможные числа.

Пример 1. Решение системы методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Пусть $Ax=b$, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 & 5 \\ -15 & -12 & 50 & -16 \\ -27 & -36 & 73 & 8 \\ 9 & 12 & -10 & -16 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} -14 \\ 44 \\ 142 \\ -76 \end{pmatrix}$$

Прямой ход. 1 шаг. Максимальный по модулю элемент 1-го столбца a_{13} = -27.

Переставим 1-ое и 3 - е уравнения местами:

$$A=\begin{pmatrix} -27 & -36 & 73 & 8 \\ -15 & -12 & 50 & -16 \\ 3 & 4 & -9 & 5 \\ 9 & 12 & -10 & -16 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 142 \\ 44 \\ -14 \\ -76 \end{pmatrix}$$

Вычислим масштабирующие множители 1 шага:

$$\mu_{21}=\frac{-15}{-27}=\frac{5}{9} \qquad \mu_{31}=\frac{3}{-27}=-\frac{1}{9} \qquad \mu_{41}=\frac{9}{-27}=-\frac{1}{3}$$

и выполним преобразование матрицы и вектора:

$$A1=\begin{pmatrix} -27 & -36 & 73 & 8 \\ 0 & 8 & \frac{85}{9} & -\frac{184}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{9} & \frac{53}{9} \\ 0 & 0 & \frac{43}{3} & -\frac{40}{3} \end{pmatrix} \qquad b1=\begin{pmatrix} 142 \\ -\frac{314}{9} \\ \frac{16}{9} \\ -\frac{86}{3} \end{pmatrix}$$

2 шаг. Вычислим масштабирующие множители 2 шага:

$$\mu_{32}=\frac{0}{8}=0 \qquad \mu_{42}=\frac{0}{8}=0$$

.

Второй шаг не изменяет матриц: *A2=A1, b2= b1.*

3 шаг. Максимальный по модулю элемент 3 столбца $a_{43}=\frac{43}{3}$. Переставим 3 и 4 уравнения местами.

$$A2=\begin{pmatrix} -27 & -36 & 73 & 8 \\ 0 & 8 & \frac{85}{9} & -\frac{184}{9} \\ 0 & 0 & \frac{43}{3} & -\frac{40}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{9} & \frac{53}{9} \end{pmatrix} \qquad b2=\begin{pmatrix} 142 \\ -\frac{314}{9} \\ -\frac{86}{3} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

Вычислим масштабирующие множители 3 шага:

$$\mu_{43}=-\frac{8\cdot 3}{9\cdot 43}=-\frac{8}{129}$$

и выполним преобразование матрицы и вектора:

$$A3=\begin{pmatrix} -27 & -36 & 73 & 8 \\ 0 & 8 & \frac{85}{9} & -\frac{184}{9} \\ 0 & 0 & \frac{43}{3} & -\frac{40}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{653}{129} \end{pmatrix} \qquad b3=\begin{pmatrix} 142 \\ -\frac{314}{9} \\ -\frac{86}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обратный ход. Из последнего уравнения находим: $x_4 = 0$. Из третьего уравнения системы находим $x_3 = -\frac{86 \cdot 3}{43 \cdot 3} = -2$. Из второго уравнения находим $x_2 = \frac{1}{8}\left(-\frac{314}{9} - \frac{85 \cdot (-2)}{9}\right) = -2$. Неизвестное x_1 находим из первого уравнения:

$$x_1 = -\frac{1}{27}(142 + 36 \cdot (-2) - 73 \cdot (-2) - 8 \cdot 0) = -8$$

Ответ: $x_1 = -8$ $x_2 = -2$ $x_3 = -2$ $x_4 = 0$.

Решение примера в среде пакета Matlab

```
% Решить систему Ax=b методом Гаусса

% Введём матрицу
A = [3,4,-9,5;-15,-12,50,-16;-27,-36,73,8;9,12,-10,-16];
% Введём правую часть
b = [-14; 44; 142; -76];

% Решим систему средствами MATLAB
x = A \ b
```

```
% Решим систему, используя LU-разложение
[L1,U] = lu(A)
y = L1\b
x = U\y

[L2,U,P] = lu(A)      % где P - матрица перестановок
L2 = P*L1
```

Пример 2. Решение системы уравнений методом Холецкого.

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}$$

Находим элементы матрицы *L*:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}},$$
$$l_{i1} = a_{i1}/l_{11}, i = 2, \ldots, n,$$
$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2},$$
$$l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1}l_{21})/l_{22}, i = 3, \ldots, n,$$
$$\ldots$$
$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - l_{k2}^2 - \ldots - l_{k,k-1}^2},$$
$$l_{ik} = (a_{ik} - l_{i1}l_{k1} - l_{i2}l_{k2} - \ldots - l_{i,k-1}l_{k,k-1})/l_{kk}, i = k+1, \ldots, n,$$

$$l_{11} = \sqrt{81} = 9 \qquad l_{21} = \frac{-45}{9} = -5 \qquad l_{22} = \sqrt{50 - (-5)^2} = 5$$

$$l_{31} = \frac{45}{9} = 5 \qquad l_{32} = \frac{-15 - 5\cdot(-5)}{5} = 2 \qquad l_{33} = \sqrt{38 - 5^2 - 2^2} = 3$$

Таким образом, разложение матрицы A имеет вид:

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Последовательно решаем системы $Ly = b$ и $L^T x = y$.

Решением 1-ой системы является

вектор $y = \begin{pmatrix} 59 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}$, а решением 2-ой системы - вектор $x = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $x_1 = 6 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = -4$

Решение примера в среде пакета Matlab

```
% Решить систему Ax=b методом Холецкого

% Введём матрицу
A = [81 -45 45; -45 50 -15; 45 -15 38];
% Введём правую часть
b = [531; -460; 193];

% Найдём разложение Холецкого
R = chol(A);

% R'*R*x = b
% Матрица R легко обратима
y = R' \ b;
x = R \ y;
% Проверим решение
A * x - b
```

Пример 3.

```
>>%Решение линейной системы с помощью LU-разложения
>> A=[3,1,-1,2;-5,1,3,-4;2,0,1,-1;1,-5,3,-3];
>> b=[6;-12;1;3];
>> [L,U,P]=lu(A)%LU-разложение
L = %Нижняя треугольная матрица
    1.0000         0         0         0
   -0.2000    1.0000         0         0
   -0.4000   -0.0833    1.0000         0
   -0.6000   -0.3333    0.8000    1.0000
U = %Верхняя треугольная матрица
   -5.0000    1.0000    3.0000   -4.0000
         0   -4.8000    3.6000   -3.8000
         0         0    2.5000   -2.9167
         0         0         0    0.6667
P = %Матрица перестановок
     0     1     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     0
     1     0     0     0
```

```
>>b1=P*b %Модификация вектора b
b1 =
   -12
     3
     1
     6
>> Y=rref([L b1)%Рушение уравнения Ly=b1
Y =
    1.0000         0         0         0  -12.0000
         0    1.0000         0         0    0.6000
         0         0    1.0000b1         0   -3.7500
         0         0         0    1.0000    2.0000
>> y=Y(1:4,5:5)
y =
  -12.0000
    0.6000
   -3.7500
    2.0000
```

```
>> X=rref([U y])%Решение уравнения Ux=y
X =
    1.0000         0         0         0    1.0000
         0    1.0000         0         0   -1.0000
         0         0    1.0000         0    2.0000
         0         0         0    1.0000    3.0000
>> x=X(1:4,5:5)%Решение заданной системы Ax=b
x =
    1.0000
   -1.0000
    2.0000
    3.0000
>> A*x %Проверка
ans =
    6.0000
  -12.0000
    1.0000
    3.0000
```

Задания.

1. Решить СЛАУ методом обратной матрицы:

$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Определить обусловленность матрицы коэффициентов.

2. **Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:**

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= -9, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 &= 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 9. \end{aligned}$$

Проверить точность решения системы уравнений.

3. Решить СЛАУ

с помощью LU-разложения:

$$
\begin{aligned}
2{,}34x_1 - 1{,}42x_2 - 0{,}54x_3 + 0{,}21x_4 &= 0{,}66,\\
1{,}44x_1 - 0{,}53x_2 + 1{,}43x_3 - 1{,}27x_4 &= -1{,}44,\\
0{,}63x_1 - 1{,}32x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}43x_4 &= 0{,}94,\\
0{,}56x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}67x_3 - 2{,}38x_4 &= 0{,}73;
\end{aligned}
$$

Проверить точность решения системы уравнений.

Приложение

Элементы матричной алгебры

Квадратная матрица называется *треугольной* (B), если все элементы, расположенные ниже или выше главной диагонали, равны нулю; *диагональной* (D), если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю; *единичной* (E) называется диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единице:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}; \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица, полученная из исходной путем замены элементов строк элементами соответствующих столбцов, называется *транспонированной*. Так, для квадратной матрицы A транспортированная ей матрица A^{T} имеет вид:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определитель – числовая характеристика квадратной матрицы, которая обозначается $\det A$ или $|A|$. Одним из способов вычисления определителя является разложение по строке или столбцу: определитель матрицы A равен сумме произведений элементов строки (столбца), взятой для разложения, на их *алгебраические дополнения* A_{kj}, т.е.

$$\det A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ , \qquad (3.2.7)$$

где k – номер строки разложения; $A_{kj} = (-1)^{k+j}M_{kj}$ – *алгебраическое дополнение*; M_{kj} – минор, который равен определителю подматрицы A после вычеркивания k-й строки и j-го столбца.

Порядок определителя равен числу строк (столбцов) квадратной матрицы. Если определитель квадратной матрицы равен нулю, то она называется *вырожденной*.

Пример. Вычислить определитель матрицы A и указать его порядок, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

▼ Путем разложения этой матрицы по первой строке получаем сумму трёх определителей второго порядка (миноров) с соответствующими коэффициентами – 1, 0, 3 (3.2.7):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 45 + 3 \cdot 32 = 141.$$

Порядок исходного определителя равен 3.▲

Ранг матрицы $r_{\overset{=}{A}}$ — наивысший порядок минора, отличного от нуля.

Пример. Определить ранг прямоугольной матрицы A, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

▼ Составим квадратную подматрицу 2×2 из элементов первого и второго столбцов. Минор этой подматрицы равен нулю. Составим другую подматрицу из элементов первого и третьего столбцов; минор ее отличен от нуля; порядок этого минора равен 2. Следовательно, ранг матрицы A равен 2, т.е. $r_{\overset{=}{A}} = 2$.▲

Матричные операции

Матрицы можно *сложить (вычесть),* если они имеют одинаковое число строк и число столбцов. Результатом является матрица того же размера, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц.

Чтобы *умножить* матрицу на число, надо каждый элемент ее умножить на это число:

$$\tilde{A} = \lambda A; \quad \tilde{a}_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если матрица A имеет размер $m\times n$, матрица B — $n\times p$, то ***размер матрицы произведения*** $C = A\cdot B$ ***будет*** $m\times p$, причем каждый элемент ее вычисляется по правилу:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,p,$$

т.е. элементы ***i***-й строки матрицы A умножаются на соответствующие элементы ***j***-го столбца матрицы B, а произведения суммируются, например:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2+3) & (4+5+6) \\ (2+4+6) & (8+10+12) \\ (3+6+9) & (12+15+18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 12 & 30 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, при перемножении матриц необходимо расположить их в правильной последовательности: число столбцов первой перемножаемой матрицы (сомножителя) должно быть равно числу строк второй перемножаемой матрицы (сомножителя).

Поэтому при перемножении матриц *перестановка местами матриц-сомножителей* может привести к *невозможности выполнения этого действия*.

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица A^{-1}, при умножении на которую как слева, так и справа получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = E; \qquad A \cdot A^{-1} = E.$$

Обратная матрица существует лишь для *невырожденных квадратных матриц* ($\det A \neq 0$).

Рассмотрим два метода нахождения обратных матриц.

Классический метод обращения матрицы A состоит из следующих этапов:

1) вычисление определителя матрицы $\det A$;
2) вычисление алгебраических дополнений A_{ij} (3.2.7) для всех элементов матрицы A и построение матрицы алгебраических дополнений AA;
3) транспонирование матрицы алгебраических дополнений AA в AA^{T}, т.е. получение *присоединенной матрицы* A^{*}, равной AA^{T};
4) нахождение обратной матрицы A^{-1} путем деления всех элементов присоединенной матрицы на определитель $\det A$:

$$A^{-1} = (1/\det A) \cdot A^{*}.$$

Метод Жордана для обращения матрицы A заключается в построении расширенной матрицы, содержащей исходную матрицу A и единичную E. Левая часть расширенной матрицы $A \vdots E$

$$A \vdots E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

с помощью допустимых элементарных преобразований (умножение строки на константу и сложение ее с другими строками) приводится к единичной матрице. Параллельно те же самые преобразования делаются над правой частью расширенной матрицы, в результате которых и получается обратная матрица, т.е. $A \vdots E \to E \vdots A^{-1}$.

Пример. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ найти ей обратную методом Жордана.

▼ Составим расширенную матрицу, а затем вычтем из первой строки вторую и умножим ее на $-1/4$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} -1/4 & +1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножим вторую строку на 1/2 и затем вычтем из нее элементы первой строки, умноженные на 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} -1/4 & +1/4 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Слева получена единичная матрица, а справа – обратная, т.е.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

Задание

Найти матрицу, обратную к матрице А.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$