ТЕМА 2.4.2
ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ С ДАННОЙ ТАБЛИЦЕЙ ИСТИННОСТИ

Таблица истинности — таблица, показывающая, какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний.

Логическое выражение — составные высказывания в виде формулы.

Равносильные логические выражения – логические выражения, у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают. Для обозначения равносильности используется знак «**=**».

Алгоритм построения таблицы истинности

1. **П**одсчитать количество переменных n в логическом выражении;
2. **О**пределить число строк в таблице по формуле $m=2^n$, где n — количество переменных;
3. **П**одсчитать количество логических операций в формуле;
4. **У**становить последовательность выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;
5. **О**пределить количество столбцов: число переменных + число операций;
6. **В**ыписать наборы входных переменных;
7. **П**ровести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной в пункте 4 последовательностью.

Заполнение таблицы

1. Разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть «0», а нижнюю «1»;
2. Разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами «0» и «1», начиная с группы «0»;
3. Продолжать деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами «0» или «1» до тех пор, пока группы «0» и «1» не будут состоять из одного символа.

Пример 1.

Для формулы $A \wedge (B \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$ постройте таблицу истинности. Количество логических переменных 3, следовательно, **количество строк** — 2^3 = **8**. Количество логических операций в формуле 5, количество логических переменных 3, следовательно **количество столбцов** — 3 + 5 = **8**.

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \wedge \overline{C}$	$B \vee \overline{B} \wedge \overline{C}$	$A \wedge (B \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Пример 2

Определите истинность логического выражения

$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$.

1. В выражении две переменные A и B (n=2).
2. $m_{строк}=2^n$, $m=2^2=4$ строки.
3. В формуле 5 логических операций.
4. $K_{столбцов}=n+5=2+5=7$ столбцов.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Ответ:
F(0,1)=1 и F(1,0)=1.

Простой конъюнкцией или **конъюнктом** называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая конъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно 1 раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Дизъюнктивная нормальная форма, ДНФ — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции нескольких простых конъюнктов.

Пример ДНФ:

$$f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ — ДНФ, удовлетворяющая условиям:

- в ней нет одинаковых простых конъюнкций,
- каждая простая конъюнкция полная.

Пример СДНФ:

$f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge \overline{y}\wedge z)$

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.
2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Пример 3

Построение СДНФ для медианы от трех аргументов

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.

X	Y	Z	(X,Y, Z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Пример 3

2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

X	Y	Z	(X,Y, Z)	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$(\overline{X}$^Y^Z)
1	0	0	0	
1	0	1	1	(X^$\overline{Y}$^Z)
1	1	0	1	(X^Y^$\overline{Z}$)
1	1	1	1	(X^Y^Z)

3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции:

$\langle X,Y,Z\rangle=(X\wedge Y\wedge Z)\overline{\vee}(X\wedge Y\wedge Z)\overline{\vee}(X\wedge Y\wedge Z)\overline{\vee}(X\wedge Y\wedge Z)$

Простой дизъюнкцией или **дизъюнктом** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Простая дизъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно один раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ:

$f(X,Y,Z)=(X \vee Y) \wedge (Y \vee Z)$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнкций
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ:

: $f(X,Y,Z)=(X \vee Y \overline{\vee} Z) \wedge (X \overline{\vee} Y \vee Z)$

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.
2. Для каждого отмеченного набора записываем дизъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Пример 4

Построение СКНФ для медианы от трех аргументов

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.

X	Y	Z	(X,Y, Z)
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Пример 3

2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу : если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

X	Y	Z	(X,Y, Z)	
0	0	0	**0**	$(X\vee Y\vee Z)$
0	0	1	**0**	$(X\vee Y\vee \overline{Z})$
0	1	0	**0**	$(X\vee \overline{Y}\vee Z)$
0	1	1	**1**	
1	0	0	**0**	$(\overline{X}\vee Y\vee Z)$
1	0	1	**1**	
1	1	0	**1**	
1	1	1	**1**	

3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

$$\langle X,Y,Z\rangle = (X\vee Y\vee Z)\wedge(X\vee \overline{Y}\vee Z)\wedge\overline{}(X\vee Y\vee \overline{Z})\wedge(X\vee Y\vee Z)$$