

ТЕМА 2.4.2

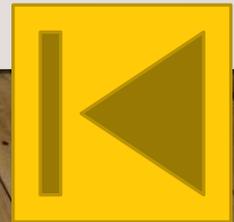
ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ С ДАННОЙ ТАБЛИЦЕЙ ИСТИННОСТИ



Таблица истинности — таблица, показывающая, какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний.

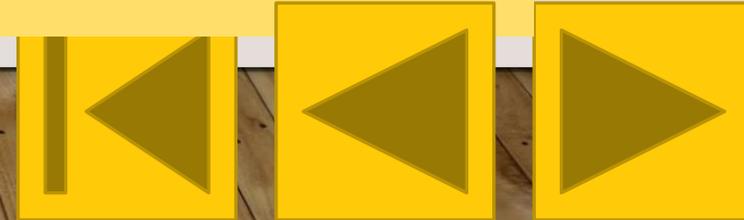
Логическое выражение — составные высказывания в виде формулы.

Равносильные логические выражения — логические выражения, у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают. Для обозначения равносильности используется знак « \equiv ».



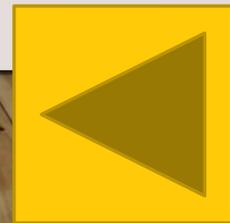
Алгоритм построения таблицы истинности

1. Подсчитать количество переменных n в логическом выражении;
2. Определить число строк в таблице по формуле $m=2^n$, где n — количество переменных;
3. Подсчитать количество логических операций в формуле;
4. Установить последовательность выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;
5. Определить количество столбцов: число переменных + число операций;
6. Выписать наборы входных переменных;
7. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной в пункте 4 последовательностью.



Заполнение таблицы

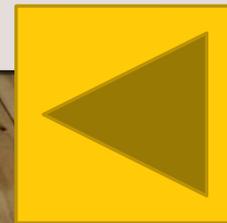
1. Разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть «0», а нижнюю «1»;
2. Разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами «0» и «1», начиная с группы «0»;
3. Продолжать деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами «0» или «1» до тех пор, пока группы «0» и «1» не будут состоять из одного символа.



Пример 1.

Для формулы $\overline{A} \wedge (\overline{B} \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$ постройте таблицу истинности. Количество логических переменных 3, следовательно, **количество строк** — $2^3 = 8$. Количество логических операций в формуле 5, количество логических переменных 3, следовательно **количество столбцов** — $3 + 5 = 8$.

A	B	C	\overline{B}	\overline{C}	$\overline{B} \wedge \overline{C}$	$\overline{B} \vee \overline{B} \wedge \overline{C}$	$\overline{A} \wedge (\overline{B} \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1



Пример 2

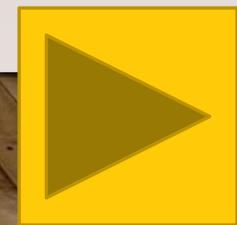
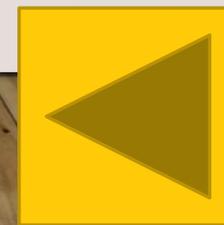
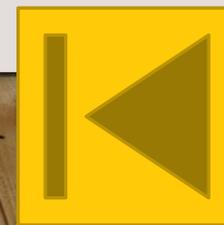
Определите истинность логического выражения

$$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) .$$

1. В выражении две переменные A и B ($n=2$).
2. $m_{\text{строк}} = 2^n$, $m=2^2=4$ строки.
3. В формуле 5 логических операций.
4. $K_{\text{столбцов}} = n+5=2+5=7$ столбцов.

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \vee B$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Ответ:
 $F(0,1)=1$ и $F(1,0)=1$.



Простой конъюнкцией или **конъюнктом** называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

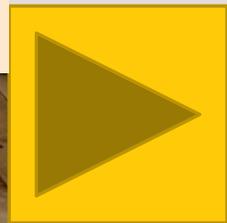
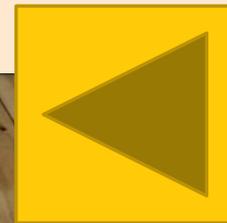
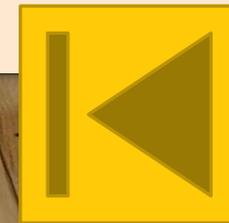
Простая конъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно 1 раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Дизъюнктивная нормальная форма, ДНФ — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид дизъюнкции нескольких простых конъюнктов.

Пример ДНФ:

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$$



Совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СДНФ —
ДНФ, удовлетворяющая условиям:

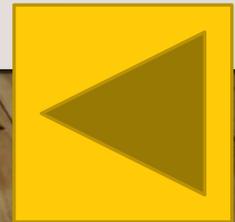
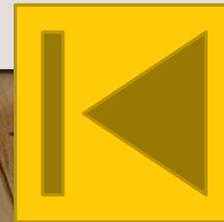
- в ней нет одинаковых простых конъюнкций,
- каждая простая конъюнкция полная.

Пример СДНФ:

$$f(x,y,z)=(\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$$

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.
2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

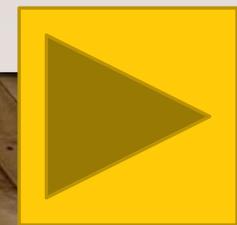
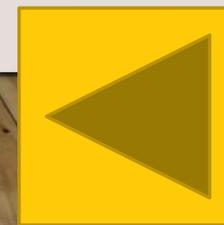
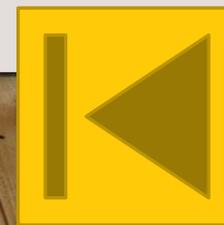


Пример 3

Построение СДНФ для медианы от трех аргументов

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно **1**.

X	Y	Z	(X,Y,Z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



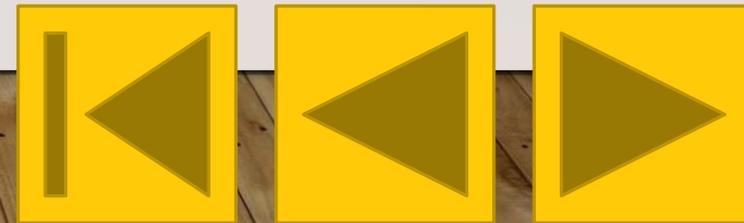
Пример 3

2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть **1**, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

X	Y	Z	(X,Y,Z)	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\bar{X} \wedge Y \wedge Z$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$X \wedge \bar{Y} \wedge Z$
1	1	0	1	$X \wedge Y \wedge \bar{Z}$
1	1	1	1	$X \wedge Y \wedge Z$

3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции:

$$\langle X, Y, Z \rangle = (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \bar{Y} \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \bar{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$$



Простой дизъюнкцией или **дизъюнктом** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

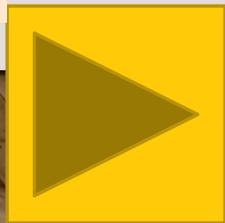
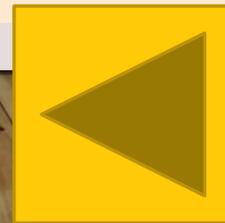
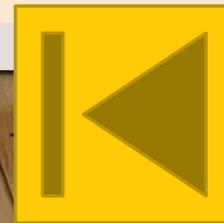
Простая дизъюнкция

- **полная**, если в неё каждая переменная (или её отрицание) входит ровно один раз;
- **монотонная**, если она не содержит отрицаний переменных.

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ:

$$f(X, Y, Z) = (X \vee Y) \wedge (Y \vee Z)$$



Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ —

это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

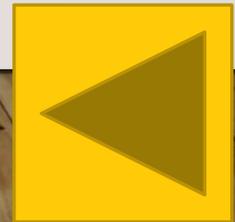
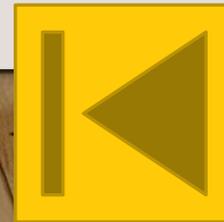
- в ней нет одинаковых простых дизъюнкций
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ:

$$: f(X, Y, Z) = (X \vee Y \bar{V} Z) \wedge (X \bar{V} Y \vee Z)$$

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.
2. Для каждого отмеченного набора записываем дизъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

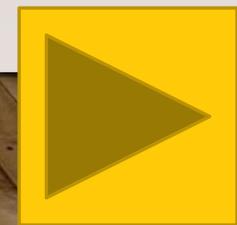
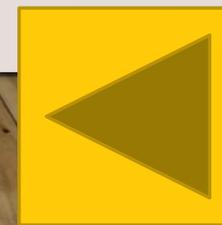


Пример 4

Построение СКНФ для медианы от трех аргументов

1. В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.

X	Y	Z	(X,Y,Z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Пример 3

2. Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу : если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

X	Y	Z	(X,Y,Z)	
0	0	0	0	$(X \vee Y \vee Z)$
0	0	1	0	$(X \vee Y \vee \bar{Z})$
0	1	0	0	$(X \vee \bar{Y} \vee Z)$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\bar{(X \vee Y \vee Z)}$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

$$\langle X, Y, Z \rangle = (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee Z) \wedge \bar{(X \vee Y \vee \bar{Z})} \wedge (X \vee Y \vee Z)$$

