

Нормальные формы

Глава 2. Булева алгебра

Булева алгебра

Множество всех булевых в базисе S_1 образуют *булеву алгебру*. Таким образом в булевой алгебре все формулы записываются при помощи трех связок:

- ✓ отрицание
- ✓ конъюнкция
- ✓ дизъюнкция

Нормальные формы

Нормальные формы являются синтаксически однозначным способом записи формулы, реализующей заданную функцию.

- Если x - логическая переменная, а $\sigma \in \{0, 1\}$ то выражение

$$x^\sigma = \begin{cases} x & \text{если } \sigma = 1 \\ \bar{x} & \text{если } \sigma = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{если } x = \sigma \\ 0 & \text{если } x \neq \sigma \end{cases}$$

называется **литерой**.

- Литеры x и $\neg x$ называются **контрарными**.

Основные определения

- *Конъюнктом* называется конъюнкция литер.
- *Дизъюнктом* называется дизъюнкция литер.

Конъюнкнт:

$x \cdot y \cdot \bar{z}$ и $x \cdot y \cdot x \cdot \bar{x}$

Дизъюнкнт:

$x \vee y \vee \bar{z}$ и $x \vee y \vee \bar{x}$

Основные определения

- ✓ *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) называется дизъюнкция конечного числа конъюнктов.
- ✓ *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

Более просто: ДНФ - это сумма произведений, а КНФ - это произведение логических сумм.

Примеры

1. $x \cdot y \vee y \cdot z \vee x$ — это ДНФ (сумма произведений).
2. $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (x \vee y) \cdot z$ — это КНФ (произведение сумм).
3. $\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{w}$ — это ДНФ и КНФ (одновременно).
4. $\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot w$ — это ДНФ и КНФ (одновременно).
5. $(x \vee x \vee y) \cdot (y \vee z \vee x) \cdot z$ — это КНФ.
6. $x \cdot y \cdot \bar{z}$ и $x \cdot y \cdot x \cdot \bar{x}$ — это ДНФ.
7. $x \cdot (x \vee yz) \cdot \overline{x \cdot \bar{y} \cdot z}$ — это не нормальная форма (не ДНФ и не КНФ).

Задача

Пусть дана таблица истинности для некоторой логической функции $F(X, Y)$.

Перейти от **таблицы истинности** к **формуле**, а на ее основе построить функциональную **схему**.

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Логическая функция



ПРОБЛЕМА:

Как от таблицы истинности
перейти к формуле, чтобы построить
функциональную схему?

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.

$$(X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$$

**Не соответствует
правилу**

$$(\overline{X} \wedge X) \vee (Y \vee X \wedge Y) \quad 9$$

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая конъюнктивная форма, у которой в каждую дизъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.

$$(\overline{X} \vee Z \vee Y) \wedge (X \vee Z \vee Y)$$

**Не соответствует
правилу**

$$(\overline{X} \vee X \vee Y) \wedge (Z \vee X)$$

Теорема алгебры логики

Любую функцию можно представить как в виде СДНФ, так и СКНФ, кроме

константы **0** $\overline{X} \wedge X = 0$

и константы **1** $\overline{X} \vee X = 1$

Алгоритм получения СДНФ по таблице ИСТИННОСТИ

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят **1**:

X	Y	F(X,Y)
0	0	1*
0	1	0
1	0	1*
1	1	1*

2. Выписать для каждой отмеченной строки **конъюнкцию** всех переменных следующим образом: если значение в данной строке **равно 1**, то в конъюнкцию включать **саму эту переменную, если равно 0, то ее отрицание** :

для 1-й строки $\bar{X} \wedge \bar{Y}$, для 3-строки $X \wedge \bar{Y}$, для 4-строки $X \wedge Y$

3. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

$$F = (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge Y)$$

Алгоритм получения СКНФ по таблице ИСТИННОСТИ

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят **0**:

X	Y	F(X,Y)
0	0	1
0	1	0*
1	0	1
1	1	1

2. Выписать для каждой отмеченной строки **дизъюнкцию** всех переменных следующим образом: если значение в данной строке **равно 0**, то в дизъюнкцию включать **саму эту переменную, если равно 1, то ее отрицание** :

$X \vee \bar{Y}$ - для 2-й строки.

3. Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию:

$$X \vee \bar{Y}$$

Решение

Полученные по двум алгоритмам СДНФ и СКНФ эквивалентны. Преобразуем СКНФ по правилам алгебры логики:

$$\begin{aligned} \text{СДНФ} = F &= (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge Y) = \\ &= \overline{X} \vee \overline{Y} \wedge X \vee \overline{Y} \wedge X \vee Y = \underline{X \vee \overline{Y}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{СКНФ} &= \underline{X \vee \overline{Y}} \end{aligned}$$

Примечание: Для нахождения формулы по таблице истинности рекомендуется использовать тот из двух алгоритмов, в котором в таблице помечается меньше строк.

Проверка

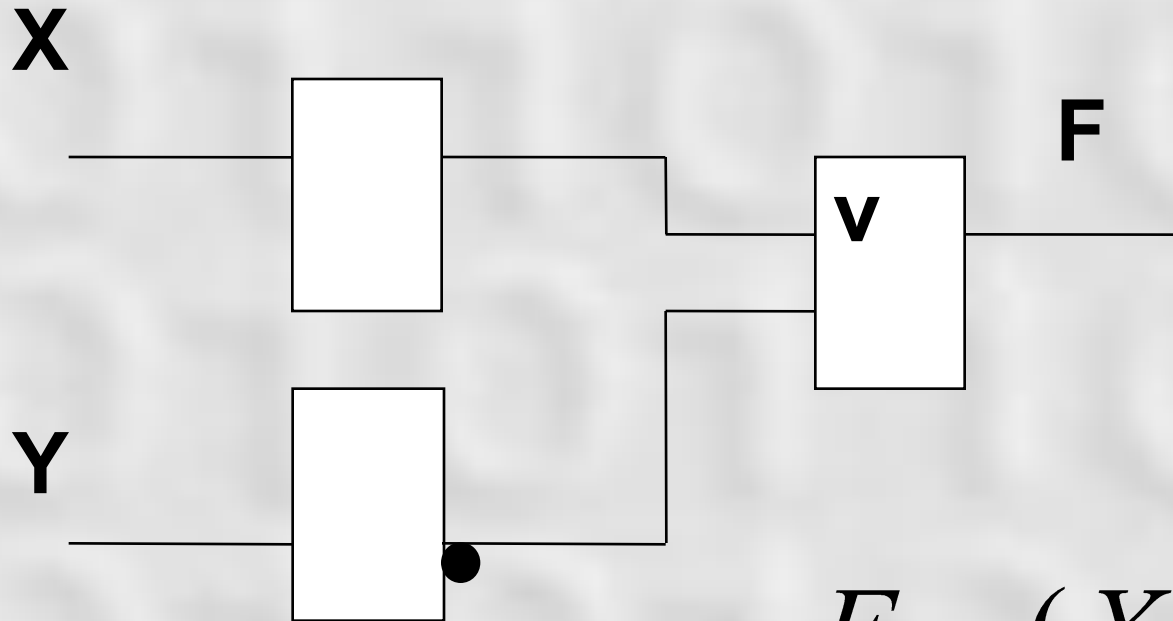
Покажем, что полученные по двум алгоритмам
СДНФ и СКНФ эквивалентны.

СДНФ $F = (X \vee Y)$ и СКНФ $F = (X \vee \bar{Y})$

Можем проверить, построив таблицу истинности по
найденной формуле.

X	Y	\bar{Y}	$F = (X \vee \bar{Y})$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Логическая схема



$$F = (X \vee \bar{Y})$$

Задача уровня В

Представить функцию в виде СДНФ и СКНФ

$$(a \rightarrow b) \rightarrow c$$

$$(a \rightarrow b) \rightarrow c =$$

$$= \overline{a}bc \vee \overline{a}b\overline{c} \vee$$

$$\overline{a}\overline{b}c \vee a\overline{b}\overline{c} \vee abc$$

a	b	c	$(a \rightarrow b) \rightarrow c$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Обобщение

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо сами, либо их отрицания), причем в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входит ровно один раз (либо сама либо ее отрицание), то эта форма называется:

**СОВЕРШЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ
ФОРМОЙ**

Примеры

1. $\bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ – это
2. $(x \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ – это
3. $(x \vee y) \cdot (x \vee z)$ – это
4. $x \cdot y \cdot z$ – это

ПРЕЗЕНТАЦИЯ ОКОНЧЕНА



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!