Нормальные формы

Глава 2. Булева алгебра

Булева алгебра

Множество всех булевых в базисе S1 образуют *булеву алгебру*. Таким образом в булевой алгебре все формулы записываются при помощи трех связок:

- ✔ отрицание
- ✔ конъюнкция
- ✔ дизъюнкция

Нормальные формы

Нормальные формы являются синтаксически однозначным способом записи формулы, реализующей заданную функцию.

- *Если x - логическая переменная, а σ Є {0,1} то выражение*

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x & \text{если } \sigma = 1 \\ \bar{x} & \text{если } \sigma = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x^{\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{если } x = \sigma \\ 0 & \text{если } x \neq \sigma \end{cases},$$

*называется **литерой**.*

- *Литеры x и ¬x называются **контрарными**.*

Основные определения

- *Конъюнктом* называется конъюнкция литер.
- *Дизъюнктом* называется дизъюнкция литер.

Конъюнкт: $x \cdot y \cdot \bar{z}$ и $x \cdot y \cdot x \cdot \bar{x}$

Дизъюнкт: $x \vee y \vee \bar{z}$ и $x \vee y \vee \bar{x}$

Основные определения

- ✔ *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) называется дизъюнкция конечного числа конъюнктов.
- ✔ *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

Более просто: ДНФ - это сумма произведений, а КНФ - это произведение логических сумм.

Примеры

1. $x \cdot y \vee y \cdot z \vee x$ — это ДНФ (сумма произведений).
2. $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (x \vee y) \cdot z$ —это КНФ (произведение сумм).
3. $\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{w}$ — это ДНФ и КНФ (одновременно).
4. $\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot w$ — это ДНФ и КНФ (одновременно).
5. $(x \vee x \vee y) \cdot (y \vee z \vee x) \cdot z$ — это КНФ.
6. $x \cdot y \cdot \bar{z}$ и $x \cdot y \cdot x \cdot \bar{x}$ — это ДНФ.
7. $x \cdot (x \vee yz) \cdot \overline{x \cdot \bar{y} \cdot z}$ — это не нормальная форма (не ДНФ и не КНФ).

Задача

Пусть дана таблица истинности для некоторой логической функции F(X,Y).

Перейти от таблицы истинности к формуле, а на ее основе построить функциональную схему.

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Логическая функция

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ

**ФОРМУЛ
А**

**СХЕМ
А**

ПРОБЛЕМА:

Как от таблицы истинности перейти к формуле, чтобы построить функциональную схему?

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.

$$(X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$$

Не соответствует правилу

$$(\overline{X} \wedge X) \vee (Y \vee X \wedge Y)$$

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая конъюнктивная форма, у которой в каждую дизъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания), причем в одном и том же порядке.

$$(\overline{X} \vee Z \vee Y) \wedge (X \vee Z \vee Y)$$

Не соответствует правилу

$$(\overline{X} \vee X \vee Y) \wedge (Z \vee X)$$

Теорема алгебры логики

Любую функцию можно представить как в виде СДНФ, так и СКНФ, кроме

константы **0** $\overline{X} \wedge X = 0$

и константы **1** $\overline{X} \vee X = 1$

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

X	Y	F(X,Y)
0	0	1*
0	1	0
1	0	1*
1	1	1*

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят **1**:

2. Выписать для каждой отмеченной строки ***конъюнкцию*** всех переменных следующим образом: если значение в данной строке ***равно 1***, то в конъюнкцию включать ***саму эту переменную, если равно 0, то ее отрицание :***

для 1-й строки $\overline{X} \wedge \overline{Y}$, для 3-строки $X \wedge \overline{Y}$, для 4-строки $X \wedge Y$

3. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

$$F = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge Y)$$

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят **0:**

X	Y	F(X,Y)
0	0	1
0	1	0*
1	0	1
1	1	1

2. Выписать для каждой отмеченной строки ***дизъюнкцию*** всех переменных следующим образом: если значение в данной строке ***равно 0***, то в дизъюнкцию включать ***саму эту переменную, если равно 1, то ее отрицание :***

$X \vee \overline{Y}$ - для 2-й строки.

3. Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию:

$$X \vee \overline{Y}$$

Решение

Полученные по двум алгоритмам СДНФ и СКНФ эквивалентны. Преобразуем СКНФ по правилам алгебры логики:

$$F = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge Y) =$$

СДНФ = $\overline{X} \vee \overline{Y} \wedge X \vee \overline{Y} \wedge X \vee Y = X \vee \overline{Y}$

СКНФ = $X \vee \overline{Y}$

Примечание: Для нахождения формулы по таблице истинности рекомендуется использовать тот из двух алгоритмов, в котором в таблице помечается меньше строк.

Проверка

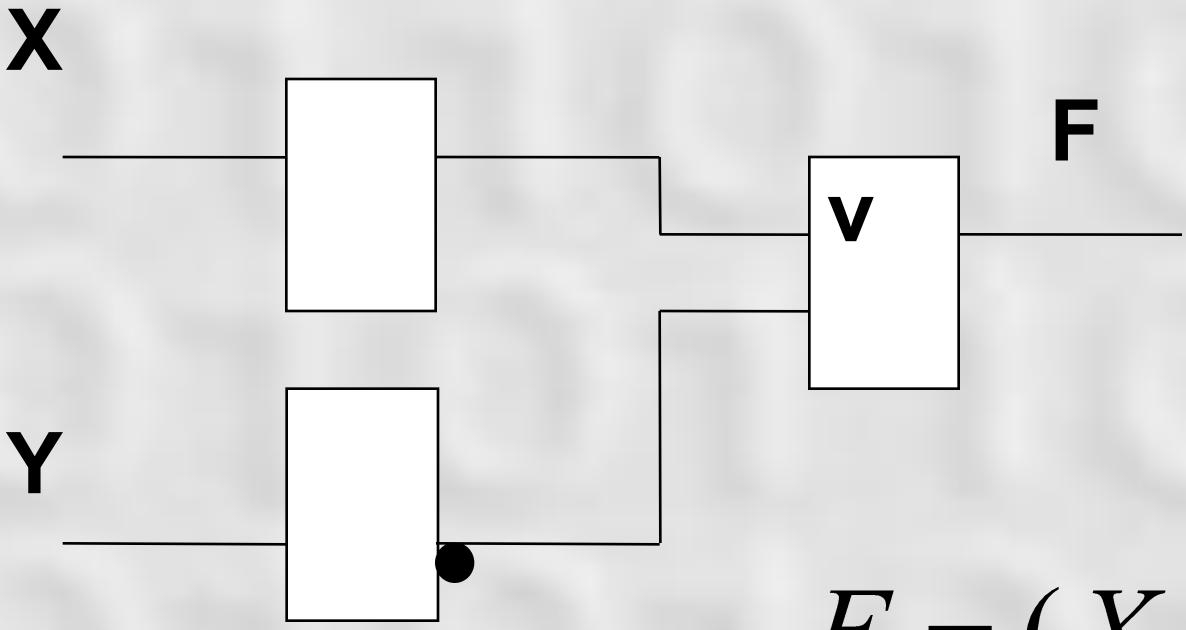
Покажем, что полученные по двум алгоритмам СДНФ и СКНФ эквивалентны.

СДНФ $F=(X\vee\overline{Y})$ и СКНФ $F=(X\vee\overline{Y})$

Можем проверить, построив таблицу истинности по найденной формуле.

X	Y	$\overline{Y}$	$F=(X\vee\overline{Y})$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Логическая схема



$$F = (X \vee \overline{Y})$$

Задача уровня B

Представить функцию в виде СДНФ и СКНФ

$$(a \to b) \to c$$

$$(a \to b) \to c =$$

$$= \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}bc \vee$$

$$a\bar{b}\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee abc$$

a	b	c	$(a \to b) \to c$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Обобщение

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо сами, либо их отрицания), причем в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входит ровно один раз (либо сама либо ее отрицание), то эта форма называется:

СОВЕРШЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ

Примеры

1. $\bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ – это

2. $(x \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$ – это

3. $(x \vee y) \cdot (x \vee z)$ – это

4. $x \cdot y \cdot z$ – это

ПРЕЗЕНТАЦИЯ ОКОНЧЕНА

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!