Тема урока: Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

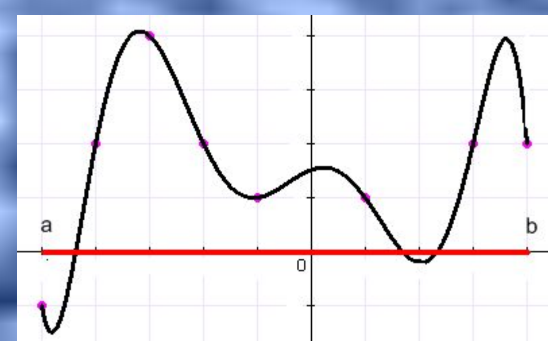
Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894), знаменитый русский математик, основатель Петербуржской математической школы

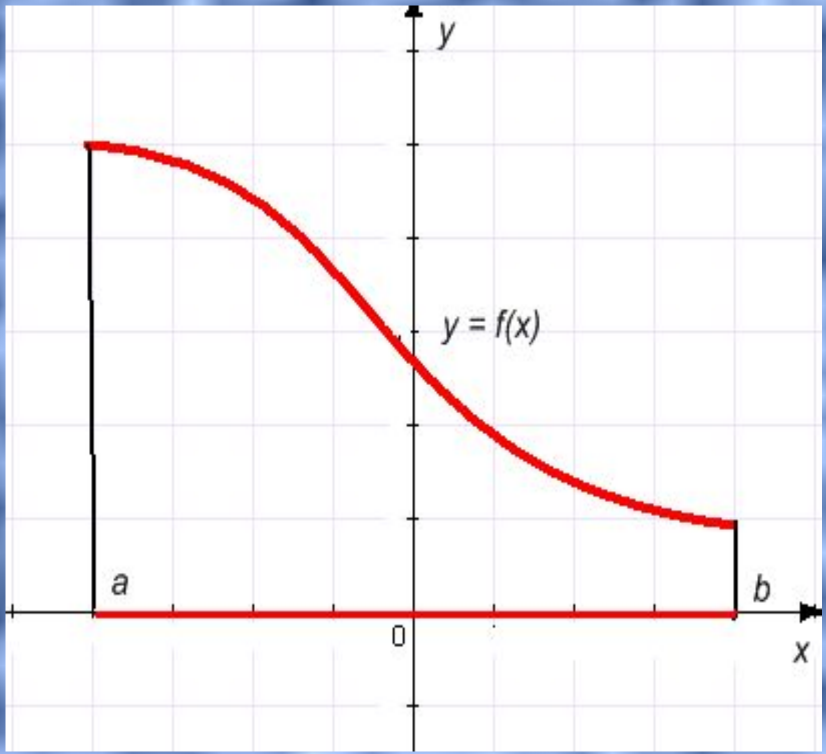
"…Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды".

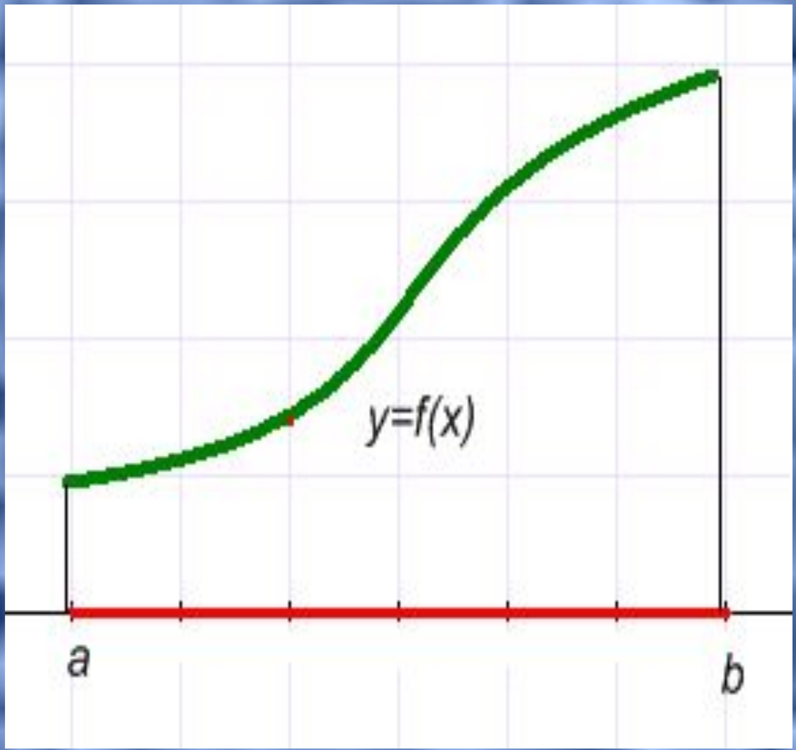
Теорема Вейерштрасса

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897 гг.) - немецкий математик

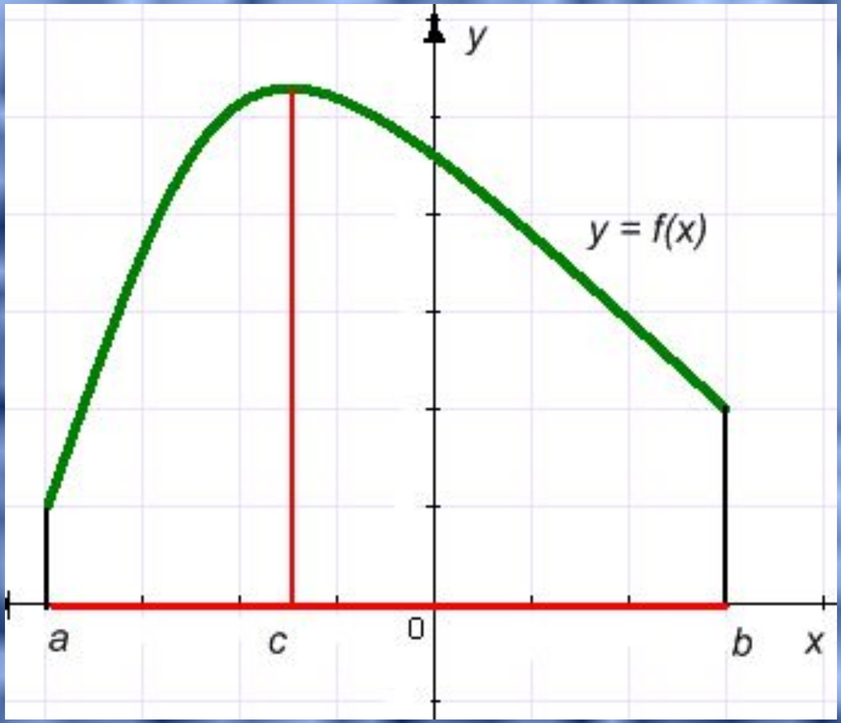
Непрерывная на отрезке [*a;b*] функция *f* принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

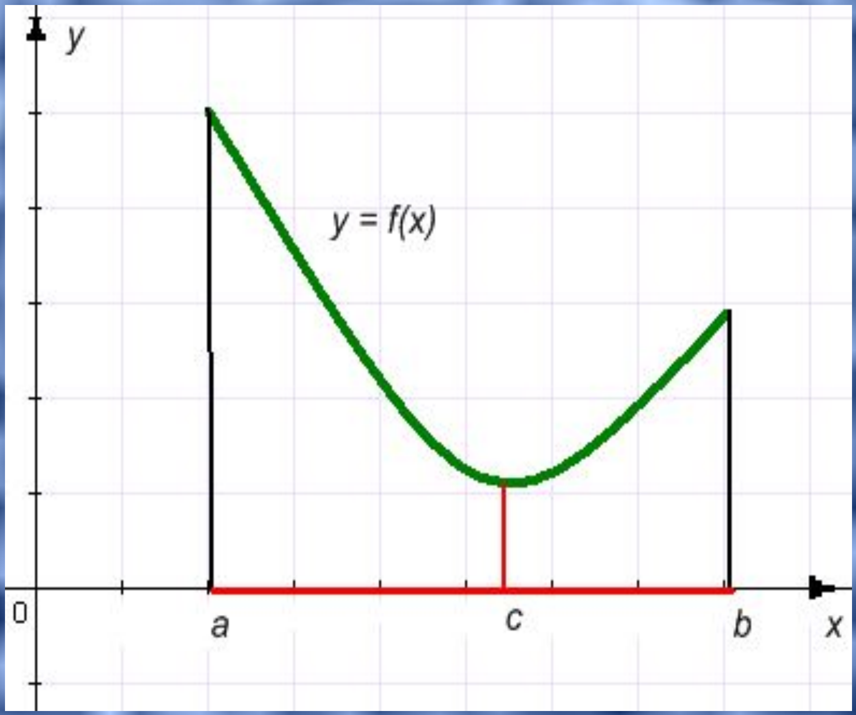






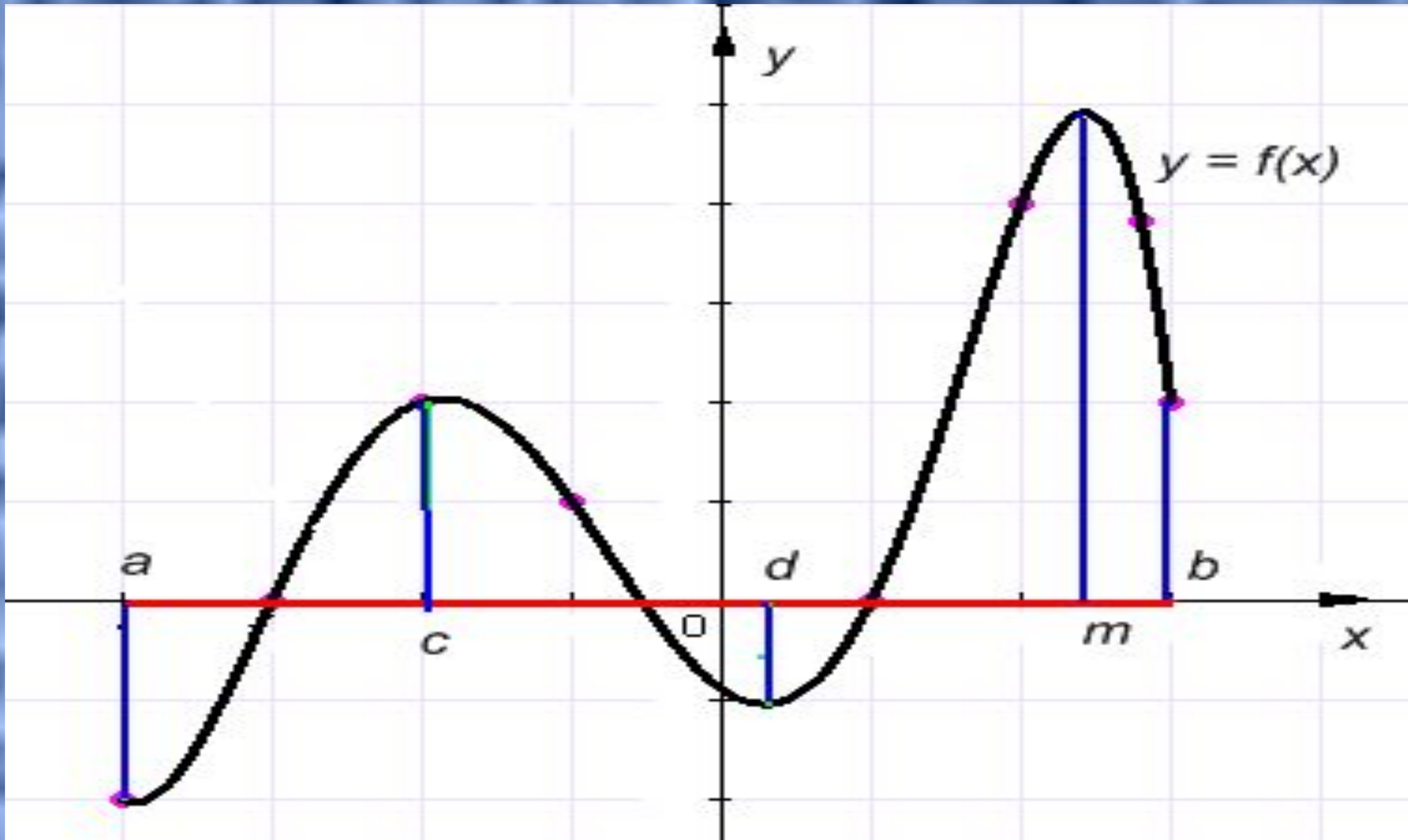
Если функция f(x) возрастает (убывает) на [a;b], то наибольшего или наименьшего значения она достигает на концах этого отрезка.





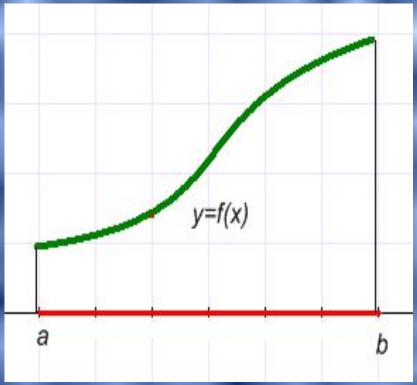
Если функция *y = f(x)* на отрезке [*a*; *b*] имеет лишь одну критическую точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение

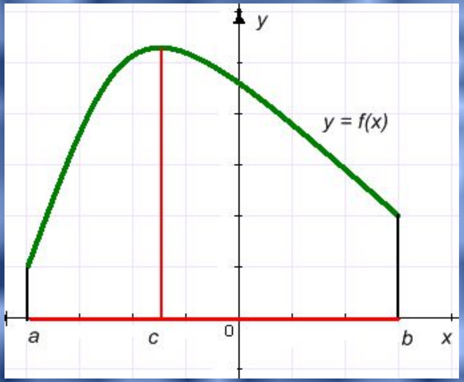
fmax = fнаиб. fmin = fнаим.

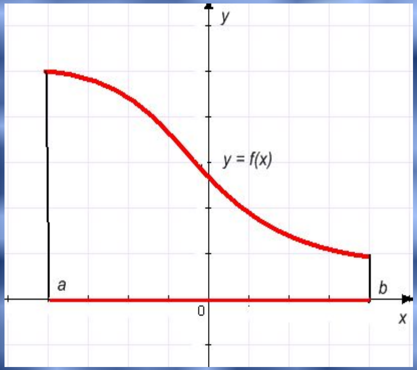


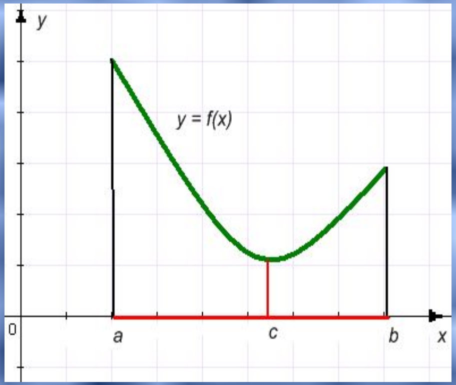
Наибольшего (наименьшего) значения непрерывная на [*a*; *b*] функция достигает либо на концах отрезка, либо в критических точках, лежащих на этом отрезке.

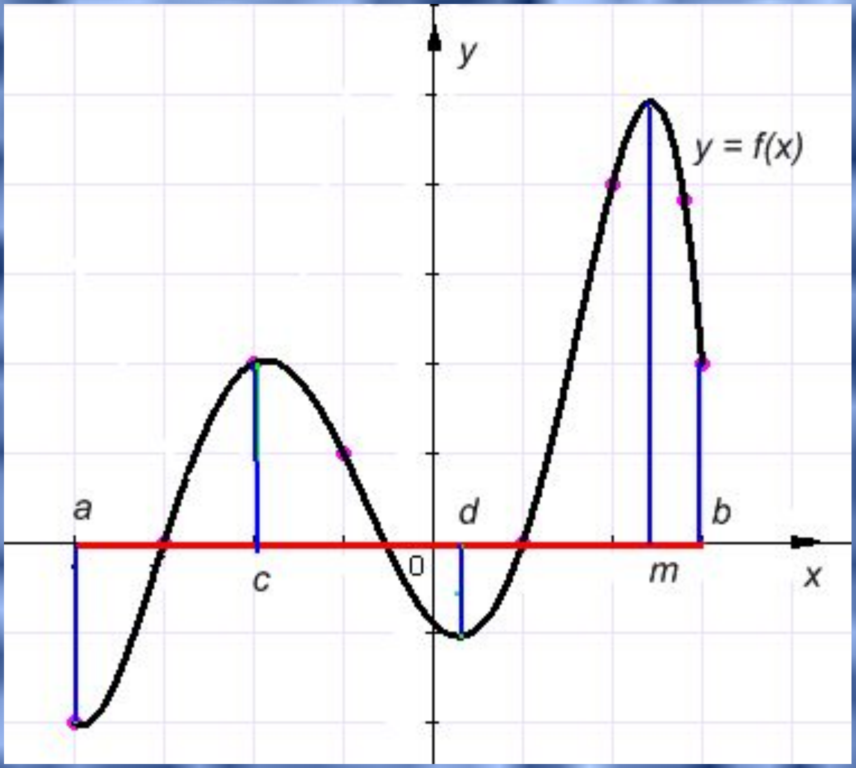
Проанализируйте все рассмотренные случаи. В каких точках функция достигает наибольшего (наименьшего) значений?











Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на [a;b]

1. Найти **критические точки** функции на интервале (*a*; *b*);
2. **Вычислить значения функции** в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$,
3. Среди всех вычисленных значениях функции **выбрать наибольшее и наименьшее**

Наибольшее значение

$$\max_{[a;b]} f(x)$$

Наименьшее значение

$$\min_{[a;b]} f(x)$$

Задача:

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x-2$$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение.

1. $D(f)=R$, значит функция непрерывна на рассматриваем отрезке.
2. Найдем критические точки функции: $f'(x)=x^2+2x-3$

   $f'(x)=0$, если $x^2+2x-3=0$, отсюда $x=-3$ или $x=1$.

   $x=-3$ не лежит на рассматриваем отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

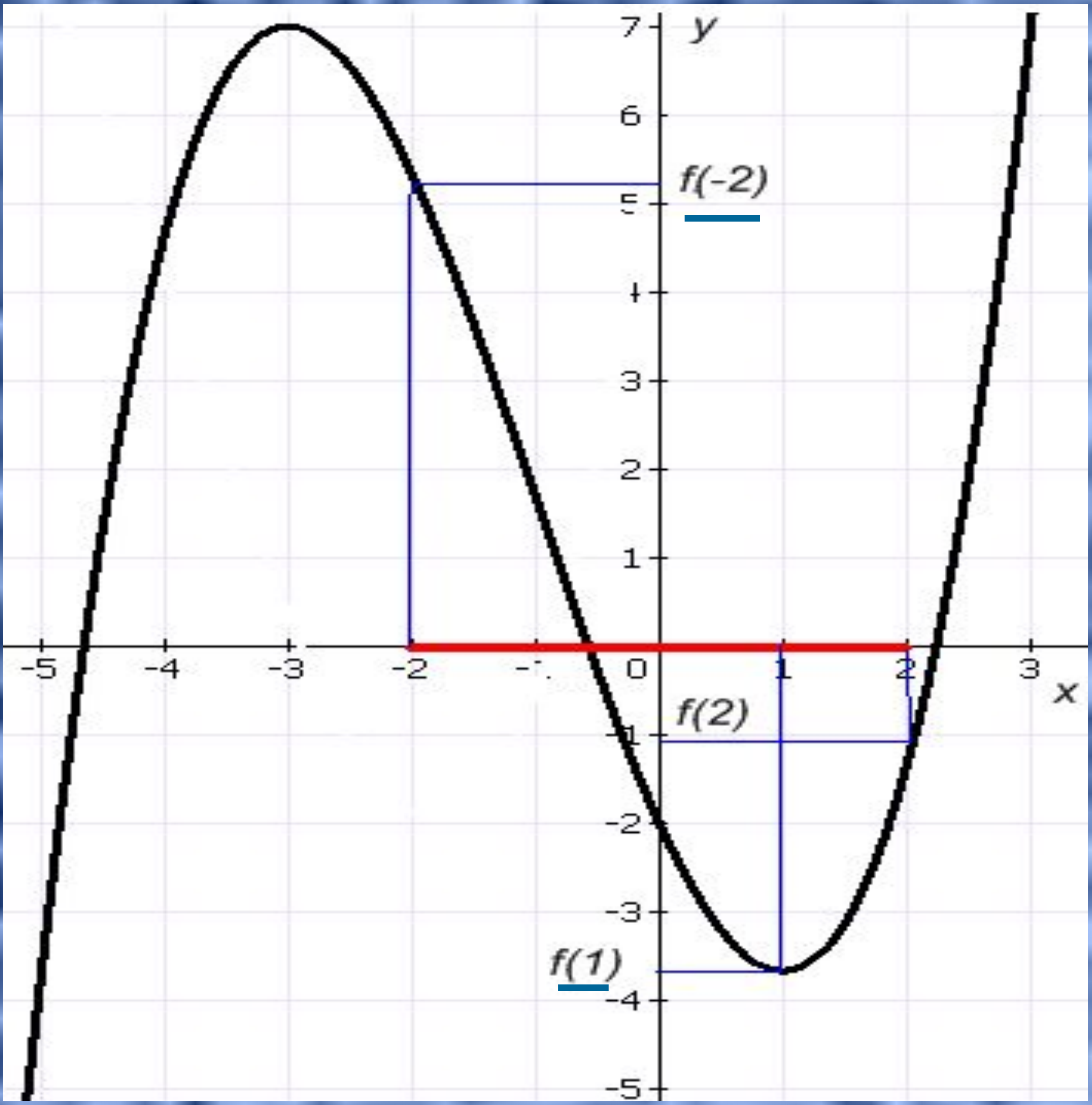
   $$f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2-3\cdot(-2)-2=-\frac{8}{3}+4+6-2=8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3};$$

   $$f(1)=\frac{1^3}{3}+1^2-3\cdot1-2=\frac{1}{3}-4=-3\frac{2}{3};$$

   $$f(2)=\frac{2^3}{3}+2^2-3\cdot2-2=2\frac{3}{3}-4=1\frac{1}{3}$$
4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

   $$\max_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=5\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \min_{[-2;2]} f(x)=f(1)=-3\frac{2}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$ - наибольшее, а $-3\frac{2}{3}$ - наименьшее значения функции на отрезке [-2;2].



y
x
f(-2)
f(2)
f(1)
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
1
2
3

Спасибо за урок!

Желаю всем здоровья и успехов!