

Решение неравенств

Разработал Рыжих С.А.



Виды неравенств

- **Линейные** $kx > b, \quad k \neq 0$

$$x > \frac{b}{k} \quad \text{если } k > 0$$

$$x < \frac{b}{k} \quad \text{если } k < 0$$

- **Квадратные** $ax^2 + bx + c > 0 \quad (a > 0, a < 0)$

$$\overbrace{\quad}^{+} \quad \overbrace{\quad}^{-} \quad \overbrace{\quad}^{+}$$

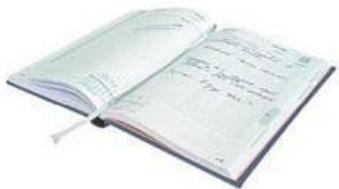
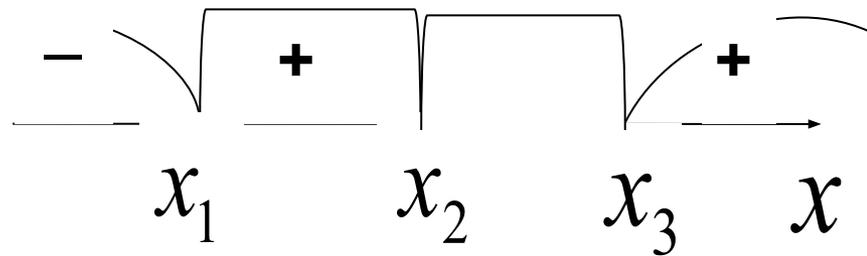
$x_1 \quad x_2 \quad x$



Виды неравенств

- Рациональные

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$



Виды неравенств

- Содержащие чётную степень $x^{2n} > b$

$$x < -\sqrt[2n]{b}, \quad x > \sqrt[2n]{b}, \quad \text{если } b > 0$$

$$x < 0, \quad x > 0, \quad \text{если } b = 0$$

$$x \in R, \quad \text{если } b < 0$$

- Содержащие нечётную степень $x^{2n+1} > b$

$$x > \sqrt[2n+1]{b}$$



Виды неравенств

- Иррациональные (корень чётной степени)

$$\sqrt[2n]{x} > b$$

$$x > b^{2n} \quad \text{если } b > 0$$

$$x > 0 \quad \text{если } b = 0$$

$$x \geq 0 \quad \text{если } b < 0$$

- Иррациональные (корень нечётной степени)

$$\sqrt[2n+1]{x} > b$$

$$x > b^{2n+1}$$



Виды неравенств

- Показательные

$$a^x > b \quad \text{если} \quad a > 1$$

$$x > \log_a b \quad \text{если} \quad b > 0$$

$$x \in R \quad \text{если} \quad b < 0$$

$$a^x > b \quad \text{если} \quad 0 < a < 1$$

$$x < \log_a b \quad \text{если} \quad b > 0$$

$$x \in R \quad \text{если} \quad b < 0$$



Виды неравенств

- Логарифмические

$$\log_a x > b \quad \text{если } a > 1 \quad x > a^b$$

$$\log_a x > b \quad \text{если } 0 < a < 1 \quad 0 < x < a^b$$

- Тригонометрические

Решаем неравенства, используя тригонометрическую окружность, либо с помощью графика соответствующей функции



Равносильность неравенств

1. Перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую;
2. Умножение (деление) обеих частей неравенства на положительное число;
3. Применение правил умножения многочленов и формул сокращённого умножения;
4. Приведение подобных членов многочлена;
5. Возведение неравенства в нечётную степень;
6. Логарифмирование неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$
т.е замена этого неравенства неравенством



$$f(x) > g(x) \text{ при } a > 1 \quad \text{или} \quad f(x) < g(x) \text{ при } 0 < a < 1$$

Равносильность неравенств на некотором множестве чисел

1. Возведение неравенства в чётную степень;
2. Потенцирование неравенства;
3. Умножение обеих частей неравенства на функцию;
4. Применение некоторых формул (логарифмических, тригонометрических и др.)



Равносильны ли неравенства?

$$x^2 \geq 9 \quad (x-3)(x+3) > 0$$

$$x^2 > x \quad x > 1$$

$$\log_3(2-x) > \log_3 x \quad 2-x > x$$



$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \geq 0 \quad x \geq -1$$

Методы решения неравенств

алгебраический

функциональ
ный

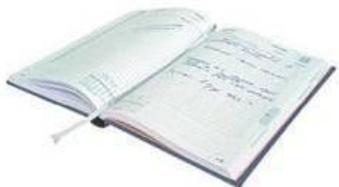
графический

геометрический



Алгебраические методы решения неравенств

- ✓ Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем
- ✓ Метод замены
- ✓ Разбиение области определения неравенства на подмножества



Сведение неравенства к равносильной совокупности систем неравенств

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq f(x) > 0 \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Решите неравенство

$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0$$

Решение

$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0$$

$$\begin{cases} 3x > 1 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 0 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < 3x < 1 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 0 \\ 42x^2 - 13x + 1 < 1 \end{cases}$$

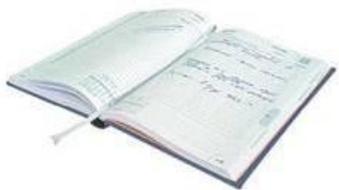


$$\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 42 \left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right) > 0 \\ 42x \left(x - \frac{13}{42}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ 42 \left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right) > 0 \\ 42x \left(x - \frac{13}{42}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{7}, \quad x > \frac{1}{6} \\ x < 0, \quad x > \frac{13}{42} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{7}, \quad x > \frac{1}{6} \\ 0 < x < \frac{13}{42} \end{cases}$$



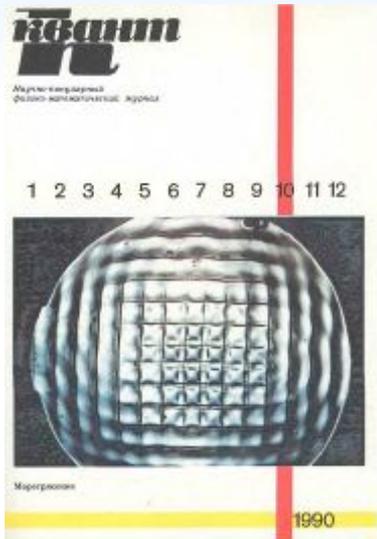
$$x > \frac{1}{3}$$

$$0 < x < \frac{1}{7};$$

$$\frac{1}{6} < x < \frac{13}{42}$$

“Некоторые полезные логарифмические соотношения”

Если



$\log_a b > 0$, то $(a-1) \cdot (b-1) > 0$, т. е. $(a-1)$ и $(b-1)$ — одного знака.

Действительно, если $\log_a b > 0$, то $\log_a b > \log_a 1$.

При $a > 1$ имеем $b > 1$, — утверждение верно.

При $0 < a < 1$ получаем, что $b < 1$, и наше утверждение опять верно, так как $(a-1) < 0$ и $(b-1) < 0$.

Аналогично можно доказать, что если

$\log_a b < 0$, то $(a-1) \cdot (b-1) < 0$



$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0$$

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ 3x \neq 1 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 0 \\ (42x^2 - 13x) \cdot (3x - 1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{7}; \quad x > \frac{1}{6} \\ 0 < x < \frac{13}{42}; \quad x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ



$$x > \frac{1}{3}$$

$$0 < x < \frac{1}{7}; \quad \frac{1}{6} < x < \frac{13}{42}$$

Заменяемое выражение	Используемое выражение
$\log_a f(x)$	$(a - 1)(f(x) - 1)$
$\log_a f(x) - 1$	$(a - 1)(f(x) - a)$
$\log_a f(x) - \log_a g(x)$	$(a - 1)(f(x) - g(x))$
$\log_{h(x)} f(x)$	$(h(x) - 1)(f(x) - 1)$
$\log_{h(x)} f(x) - 1$	$(h(x) - 1)(f(x) - h(x))$
$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$	$(h(x) - 1)(f(x) - g(x))$

Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$



Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

Решение.

$$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x + 3 - 1)(x^2 - 2x - 3) < 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 2x + 3 \neq 1 \\ x^2 > 0 \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} (2x + 2)(x^2 - 2x - 3) < 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 1)(x + 1)(x - 3) < 0 \\ x > -1,5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

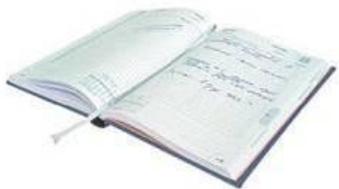


Ответ: $(-1,5; -1) \sqcup (-1; 0) \sqcup (0; 3)$

Домашнее задание

1. Решите неравенство:

$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$$



Литература

Затакавай В. Некоторые полезные показательные и логарифмические соотношения. Журнал Квант, 1990 №10

Математика: ЕГЭ: Учебно-справочные материалы. Ю.М. Нейман, Т.М. Королёва, Е.Г. Маркарян .- М.: СПб.: Просвещение. 2011

Сергеев И.Н. , Парфёнов В.С. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С3/ Под ред. А.Л. Семёнова и И.В. Яценко.- М.: МЦНМО, 2010

Яценко И.В., Шестаков С.А., Захаров П.И. Подготовка к ЕГЭ По математике в 2011 году. Методические указания._ М.: МЦНМО, 2011

www.alexlarin.narod.ru

