ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ №29

Репетитор по математике Фельдман Инна Владимировна

13. Решить уравнение:

$$27^{\arcsin x+\frac{1}{3}}+37\cdot 3^{\arcsin x}=31\cdot 9^{\arcsin x}+9$$

$$27^{\arcsin x+\frac{1}{3}}+37\cdot 3^{\arcsin x}-31\cdot 9^{\arcsin x}-9=0;$$

$$3^{3(\arcsin x+\frac{1}{3})}+37\cdot 3^{\arcsin x}-31\cdot 3^{2\arcsin x}-9=0;$$

$$3^{3\arcsin x+1}+37\cdot 3^{\arcsin x}-31\cdot 3^{2\arcsin x}-9=0;$$

$$3\cdot 3^{3\arcsin x}+37\cdot 3^{\arcsin x}-31\cdot 3^{2\arcsin x}-9=0;$$

Введем замену: $t=3^{\arcsin x}$.

$$3t^3+37\cdot t-31\cdot t^2-9=0;\quad 3t^3-31\cdot t^2+37\cdot t-9=0$$

$t=1$;

$$\begin{array}{r|l} 3t^3-31\cdot t^2+37\cdot t-9 & t-1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{3t^3-3t^2} & 3t^2-28t+9 \\ -28t^2+37t-9 & \\ -\ \underline{-28t^2+28t} & \\ 9t-9 & \\ -\ \underline{9t-9} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(t-1)(3t^2-28t+9)=0;$$

$$3t^2-28t+9=0;\quad \frac{D}{4}=196-27=169$$

$$t_1=\frac{14+13}{3}=9;\quad t_2=\frac{14-13}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\arcsin x}=1 \\ 3^{\arcsin x}=9 \\ 3^{\arcsin x}=\frac{1}{3} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} \arcsin x=0 \\ \arcsin x=2 \\ \arcsin x=-1 \end{array}\right.;$$

Арксинусом числа x $(x\in[-1;1])$ называется число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x

$$2>\frac{\pi}{2};\quad \left[\begin{array}{l} \arcsin x=0 \\ \arcsin x=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=\sin 0 \\ x=\sin(-1) \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sin 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0;-\sin 1\}$

14. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как 2: 1. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$.

а) Докажите, что площадь грани SAB относится к площади ее проекции на основание как $\sqrt{10}:1$.

б) Найдите объем пирамиды.

а) Найдем площадь треугольника AOB.

$\sin\alpha = 2\sin\beta$ (по условию).

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BO\cdot\sin\alpha; \qquad S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot BO\cdot\sin\beta;$$

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2; \quad S_{\Delta AOB} = 2S_{\Delta BOC}; \qquad S_{AOCB} = 3S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AOC}$$

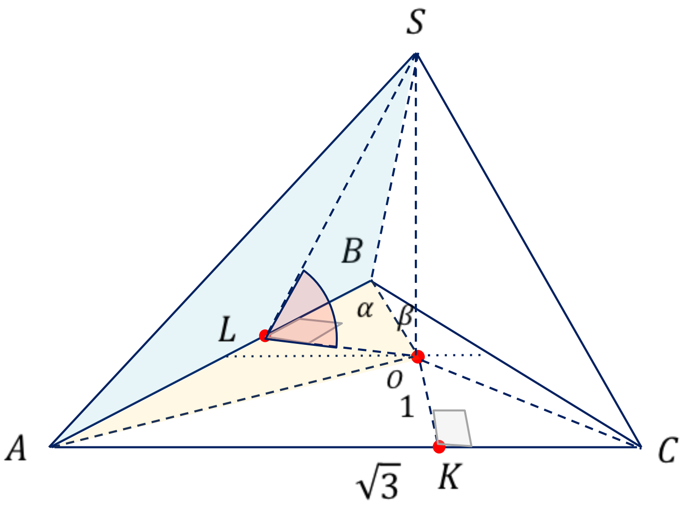
$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot OK = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \quad S_{AOCB} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{2}{3}S_{AOCB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$



б) Найдем высоту пирамиды.

$OL \perp AB$ (по построению), $SL \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах)

$$SO = SL\cdot\sin(\angle SLO), \ \cos(\angle SLO) = \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin(\angle SLO) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{10}}. \qquad SL = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \frac{2\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{3};$$

$$SO = \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = 1; \quad V = \frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

15. Решите неравенство

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x}4 \le 1.$$

Найдем ОДЗ: $\begin{cases}13-3\cdot 2^x>0\\ 13-3\cdot 2^x\ne 1\end{cases};$

$\begin{cases}2^x<\dfrac{13}{3};\\ 2^x\ne 4\end{cases}$ $\boxed{\begin{cases}x<\log_2\dfrac{13}{3};\\ x\ne 2\end{cases}}$

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2(13-3\cdot 2^x)}\le 1;$$

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{2}{\log_2(13-3\cdot 2^x)}\le 1;$$

$$\frac{2-x}{\log_2(13-3\cdot 2^x)}\le 1;$$

$$\frac{2-x}{\log_2(13-3\cdot 2^x)}-1\le 0;$$

$$\frac{2-x-\log_2(13-3\cdot 2^x)}{\log_2(13-3\cdot 2^x)}\le 0;$$

Найдем корни числителя: $2-x-\log_2(13-3\cdot 2^x)=0$

$2-x=\log_2(13-3\cdot 2^x);$

$2^{2-x}=13-3\cdot 2^x;$ $\quad 3\cdot 2^x+2^{2-x}-13=0;$ $\quad 3\cdot 2^x+\dfrac{4}{2^x}-13=0;$

$3\cdot 2^{2x}-13\cdot 2^x+4=0.$

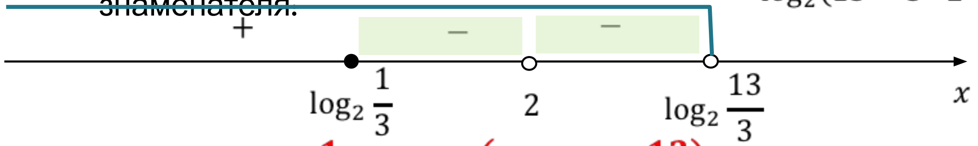
Введем замену: $2^x=t, t>0$: $\quad 3\cdot t^2-13\cdot t+4=0.$

$t_1=\dfrac{13+\sqrt{169-48}}{6}=\dfrac{13+11}{6}=4;$ $\quad t_2=\dfrac{13-11}{6}=\dfrac{1}{3};$

Обратная замена : $\left[\begin{array}{l}2^x=4\\ 2^x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.;$ $\quad \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\log_2\dfrac{1}{3}\end{array}\right.;$

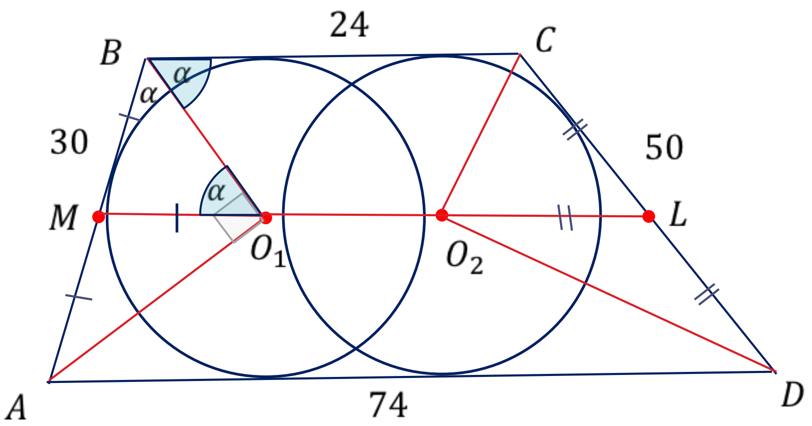
Найдем корни знаменателя: $x=2$

$x=0$: $\dfrac{2-0-\log_2(13-3\cdot 2^0)}{\log_2(13-3\cdot 2^0)}<0$



Ответ: $\left[\log_2\dfrac{1}{3};2\right)\cup\left(2;\log_2\dfrac{13}{3}\right)$

16. Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 50$, $AD = 74$.
а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2.



а) Точка O_1 — точка пересечения биссектрис углов ABC и BAD

$BO_1 \perp AO_1$ (по свойству биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне трапеции)

O_1M — медиана прямоугольного треугольника AO_1B

$O_1M = MB = MA$ (по свойству медианы прямоугольного треугольника)

ΔBO_1M равнобедренный $\Rightarrow \angle MBO_1 = \angle MO_1B$;

$\angle MBO_1 = \angle O_1BC$ (так как BO_1 — биссектриса)

$\Rightarrow \angle MO_1B = \angle O_1BC \Rightarrow MO_1 \parallel BC$,

$\Rightarrow$точка O_1 лежит на средней линии трапеции. Аналогично доказываем, что точка O_2 лежит на средней линии трапеции.

O_2L — медиана прямоугольного треугольника CO_2D; $O_2L = LC = LD$(по свойству медианы прямоугольного треугольника)

б) $O_1O_2 = ML - O_1M - O_2L$; $ML = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{24 + 74}{2} = 49$

$O_1M = \dfrac{1}{2}AB = 15$; $O_2L = \dfrac{1}{2}CD = 25$; $O_1O_2 = 49 - 15 - 25 = 9$

Ответ: 9

17. 15 июля планируется взять кредит на сумму 900 000 рублей. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты не должны превышать 180 000 рублей?

№ месяца	Остаток по долгу	Выплата по процентам	Выплата по долгу
1	900 000	18 000	180 000 – 18 000 = 162 000
2	900 000 – 162 000 = 738 000	14 760	180 000 – 14 760 = 165 240
3	738000 – 165 240 = 572 760	11 455,2	180 000 – 11 455,2 = 168 544,8
4	572 760 – 168 544,8 = 404 215,2	8084,304	180 000 – 8084,304 = 171 915,696
5	404 215,2 – 171 915,696 = 232 299,504	4645,99	180 000 – 4645,99 = 175534,01
6	232 299,504 – 175534,01 = 56765,494	…	

Ответ: 6

17. 15 июля планируется взять кредит на сумму 900 000 рублей. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии, что ежемесячные выплаты не должны превышать 180 000 рублей?

2 способ.

$$\underbrace{900\,000 \cdot 1{,}02 \quad -180\,000}$$

$$\underbrace{738\,000 \quad \cdot 1{,}02 \ -180\,000}$$

$$\underbrace{572\,760 \cdot 1{,}02 \ -180\,000}$$

$$\underbrace{404\,215{,}2 \cdot 1{,}02 \ -180\,000}$$

$$232\,299{,}504 \ \cdot 1{,}1$$

Ответ: 6

18. **При каких значениях параметра a точка минимума функции**

$$f(x)=x^3+(3a+3)x^2+(3a^2+6a)x-5a+2$$

лежит на интервале $(a+2;\,a+8)$?

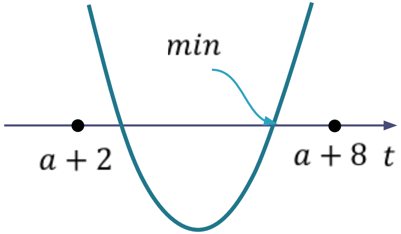
Найдем точку минимума функции.

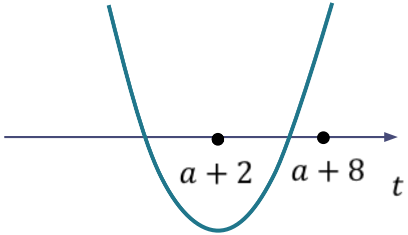
$$f(x)=x^3+(3a+3)x^2+(3a^2+6a)x-5a+2$$

$$f'(x)=3x^2+2(3a+3)x+(3a^2+6a)$$

$$3x^2+2(3a+3)x+(3a^2+6a)=0$$

$$x^2+2(a+1)x+(a^2+2a)=0$$





$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a^2+2a)=1$$

$$x_1=-(a+1)+1=-a$$

$$x_2=-(a+1)-1=-a-2$$

$x=-a$ - точка минимума

$$\begin{cases}-a>a+2\\-a<a+8\end{cases};\qquad \begin{cases}2a<-2\\2a>-8\end{cases};\qquad \begin{cases}a<-1\\a>-4\end{cases};$$

Ответ: $(-4;-1)$