Лекция 2.

Тема. Решение уравнений с одной переменной.

Цель лекции. Изучить методы нахождения корней уравнения с одной переменной.

Общие сведения и основные определения.

Наиболее общий вид нелинейного уравнения:

$$F(x) = 0, \qquad (2,1)$$

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a,b]$.

Определение 2.1.

Всякое число $\xi \in [a,b]$, обращающее функцию $F(x)$ в нуль, называется <u>корнем уравнения (2,1).</u>

Определение 2.2.

Число ξ называется корнем κ -ой кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $F(x)$ равны нулю ее производные до $(\kappa - 1)$-го порядка включительно:

$$F(\xi) = F'(\xi) = \ldots = F^{(\kappa-1)}(\xi) = 0. \qquad (2.2)$$

Определение 2.3.

Однократный корень называется простым.

Определение 2.4.

Уравнения $F(x)=0$ и $G(x)=0$ называются равносильными (эквивалентными), если множества решений данных уравнений совпадают.

Нелинейные уравнения с одной переменной подразделяются на *алгебраические* и *трансцендентные*.

Определение 2.5.

Уравнение (2.1) называется алгебраическим, если функция $F(x)$ является алгебраической.

Путем алгебраических преобразований из всякого уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n, \qquad (2.3)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ -действительные коэффициенты уравнения, x -неизвестное.

Из алгебры известно, что всякое

алгебраическое уравнение имеет, по крайней

мере, один вещественный или два комплексно

сопряженных корня.

Определение 2.6.

Уравнение (2.1) называется трансцендентным, если функция $F(x)$ не является алгебраической.

Определение 2.7.

Решить уравнение (2.1) означает:

1. Установить имеет ли уравнение корни.
2. Определить число корней уравнения.
3. Найти значение корней уравнения с заданной точностью.

Отделение корней

Определение 2.8.

Отделение корней – процедура нахождения отрезков, на которых уравнение (2.1) имеет только одно решение.

В большинстве случаев отделение корней можно провести графически. Для этого достаточно построить график функции $F(x)$ и определить отрезки, на которых эта функция имеет только одну точку пересечения с осью абсцисс.

В сомнительных случаях графическое отделение корней необходимо подкреплять вычислениями. При этом можно использовать следующие очевидные положения:

- если непрерывная функция принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения разных знаков (т. е. $F(a)\cdot F(b)<0$), то уравнение (2.1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень;

- если функция $F(x)$ к тому же и строго монотонна, то корень на отрезке единственный.

Метод половинного деления

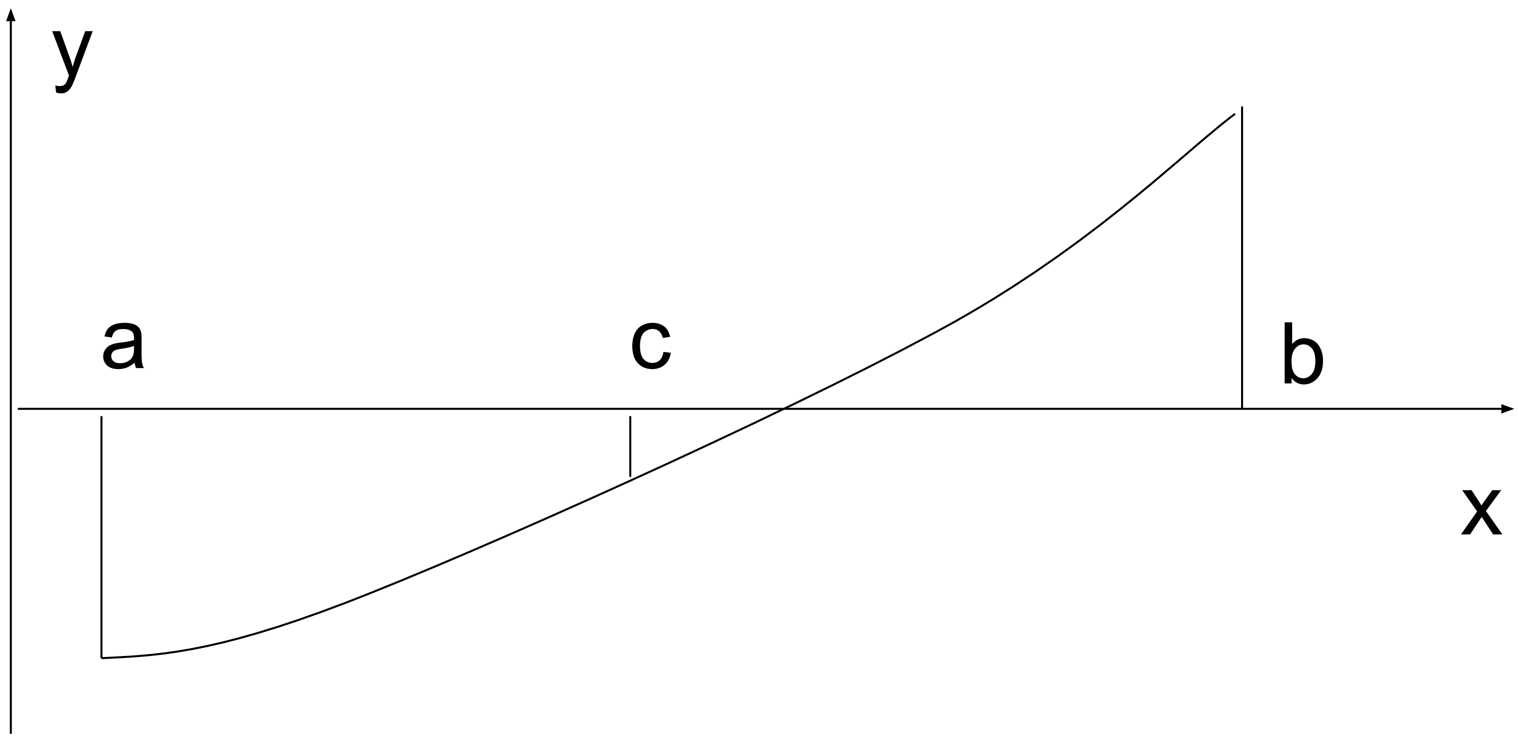
Пусть уравнение (2.1) имеет на отрезке $[a,b]$ единственный корень, причем функция $F(x)$ на данном отрезке непрерывна (рис. 2.1.)

Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой $c=(a+b)/2$. Если $F(c)\neq 0$, то возможны два случая:

1. Функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[a,c]$.

2. Функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[c,b]$.

Выбирая в каждом случае тот отрезок, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.



Пример. Отделить корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

Составляем схему:

x	f(x)	x	f(x)
$-\infty$	-	1	-
-3	-	3	+
-1	+	$+\infty$	+
0	+		

Анализ схемы показывает, что исходное уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах $(-3,-1), (0,1), (1,3).$

Если существует непрерывная производная и корни уравнения $f'(x) = 0$ легко вычисляются, то достаточно подсчитать лишь знаки функции в точках корней её производной и в граничных точках.

Пример. Отделить точки уравнения

$$f(x) = x^4 - 4x - 1 = 0.$$

Имеем $f'(x) = 4(x^3 - 1),$ поэтому $f'(x) = 0$

при $x = 1.$ Имеем

$$f(-\infty) > 0(+), f(1) < 0(-), f(\infty) > 0(+).$$

Следовательно, наше уравнение имеет только два действительных корня: один в интервале $(-\infty, 1),$ а другой- в интервале

$$(1, +\infty).$$

Дадим оценку погрешности приближенного корня.

Теорема. Пусть λ -точный, а x — приближенный корни уравнения $f(x) = 0,$ находящиеся на одном и том же отрезке $[\alpha, \beta],$ причем $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ при $\alpha \leq x \leq \beta.$

В таком случае оценка погрешности приближенного корня

$$\left|\bar{x}-\alpha\right| \le \frac{\left|f(\bar{x})\right|}{m_1}.$$

За m_1 можно взять наименьшее значение $\left|f'(x)\right|$ при $\alpha \le x \le \beta.$

Пример. Приближенным корнем уравнения

$f(x)=x^4-x-1=0$ является $\bar{x}=1{,}22.$

Оценить абсолютную погрешность этого корня.

имеем $f(x) = 2{,}2153 - 1{,}22 - 1 = -0.0047.$

Т.к. при $x = 1{,}23$ получаем

$$f(x) = 2{,}2888 - 1{,}23 - 1 = +0{,}0588,$$

то точный корень λ содержится в

интервале $(1{,}22 - 1{,}23).$

Производная $$f'(x) = 3x^3 - 1$$

монотонно возрастает. Поэтому её наименьшим значением в данном интервале является

$$m_1 = 3 \cdot 1{,}22^3 - 1 = 3 \cdot 1{,}816 - 1 = 4{,}448.$$

$$\left| x - \alpha \right| \le \frac{\left| f(x) \right|}{m_1} = \frac{0{,}0047}{4{,}488} \approx 0{,}001.$$

Графическое решение уравнений

Действительные корни уравнения $f(x)=0$

приближенно можно определить как абсциссы точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью $Ox.$

На практике выгодно исходное уравнение заменить равносильным ему уравнением

$$\varphi(x)=\psi(x),$$

где $\varphi(x),\psi(x)-$ более простые, чем $f(x).$

Пример. Графически решить уравнение

$$x \lg x = 1.$$

Запишем исходное уравнение в виде

$$\lg x = \frac{1}{x}.$$

Сразу видно, что корни исходного уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения кривых

$y = \lg x$ и $y = \dfrac{1}{x}.$

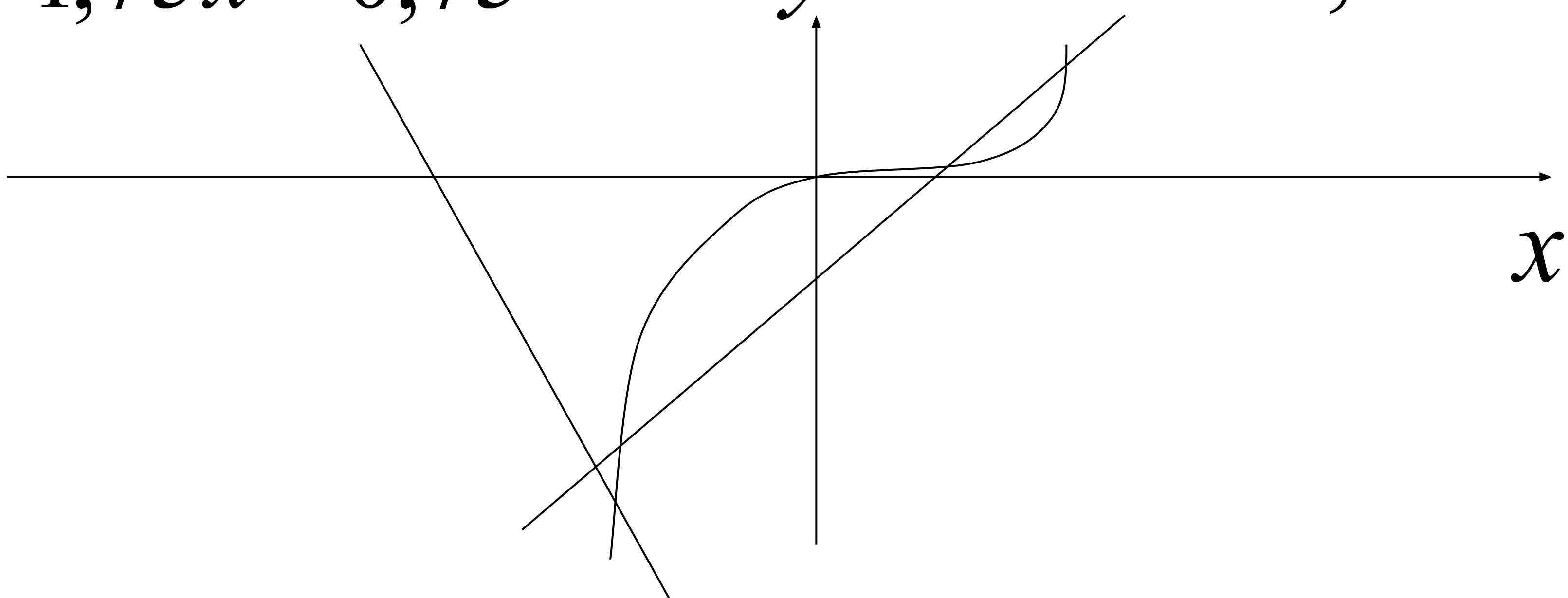
Пример. Решить кубические уравнения

$x^3 - 1{,}75x + 0{,}75 = 0$ и $x^3 - 1{,}75x + 0{,}75 = 0$

Построим кубическую параболу $y = x^3$.

Искомые корни находятся как абсциссы точек пересечения этой параболы прямыми

$y = 1{,}75x - 0{,}75$ и $y = -2x - 7{,}8.$



По чертежу видно, что первое уравнение имеет три действительных корня: $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 1,$ а второе уравнение - лишь один действительный корень $x_1 = -1{,}65.$

Метод хорд

Рассмотрим более быстрый способ нахождения корня уравнения $f(x) = 0,$ лежащего на заданном отрезке $[a, b]$

таком, что $f(a)f(b) < 0.$

Пусть $f(a) < 0, f(b) > 0.$ Тогда, вместо

деления отрезка $\left[a, b\right]$ пополам,

разделим его в отношении - $f(a) / f(b),$

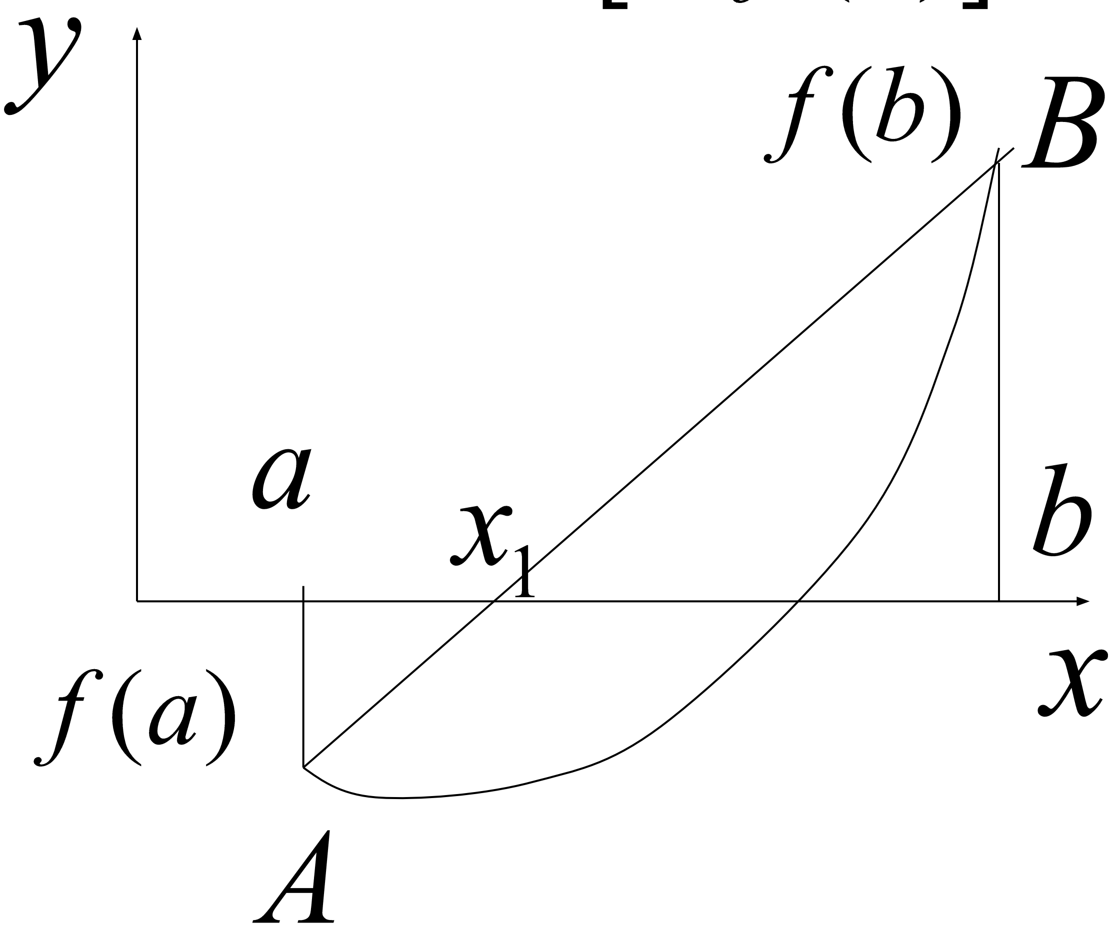
что даст приближенное значение корня

$x_1 = a + h_1,$ где $h_1 = \dfrac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b-a) =$

$$= -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b-a).$$

Далее, применяя этот приём к тому из отрезков $\left[a, x_1\right]$ или $\left[x_1, b\right]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, получим второе приближение корня x_2 и т.д.

Геометрически способ хорд эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордой, проходящей через точки $A[a, f(a)]$ и $B[b, f(b)]$.



Т.к. уравнение хорды

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)},$$ получаем

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

при $x = x_1, y = 0.$

Пример. Найти положительный корень уравнения $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$

с точностью до $0{,}002.$

Прежде всего отделим корень. Так как

$$f(1) = -0{,}6 < 0, f(2) = 5{,}6 > 0,$$

То искомый корень лежит в интервале $(1,2)$.

Полученный интервал велик, поэтому разделим его пополам. $f(1,5) = 1,425$ и

$1 < \xi < 1,5.$ Тогда

$$x_1 = 1 + \frac{0,6}{1,425 + 0,6}(1,5 - 1) = 1,15$$ и

$$f(x_1) = -0,173$$

$$x_2 = 1,15 + \frac{0,173}{1,425 + 0,173}(1,5 - 1,15) = 1,190$$

$$f(x_2) = -0,036$$

$$x_3 = 1{,}190 + \frac{0{,}036}{1{,}425 + 0{,}036}(1{,}5 - 1{,}90) = 1{,}198$$

$$f(x_3) = -0{,}0072.$$

Т.к. $$f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$$

и при $x_3 < x < 1{,}5$ имеем

$$f'(x) \geq 3 \cdot 1{,}198^2 - 0{,}4 \cdot 1{,}5 - 0{,}2 = 3{,}49,$$

то можно принять $0 < \xi - x_3 < \dfrac{0{,}0072}{3{,}49} \approx 0{,}002.$

Т.е. $\xi = 1{,}198 + 0{,}002\theta,$ где $0 < \theta < 1.$

Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть корень ξ уравнения $f(x)=0$ отделен на отрезке $[a,b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $a \le x \le b$.

Найдя какое-нибудь приближенное значение корня $x_n, (a \le x_n \le b)$, мы можем уточнить его по методу Ньютона.

Пусть $\xi = x_n + h_n,$ где $h_n -$ малая величина. Применяя формулу Тейлора,

получим: $0 = f(x + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n).$

Следовательно, $$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Внося эту поправку в $\xi = x_n + h_n,$

найдем следующее (по порядку) приближение

корня $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой. Применяя метод Ньютона, следует применять правило: в качестве исходной точки выбирается тот конец интервала, которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.

Метод итераций

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) -$ непрерывная функция. Заменим исходное уравнение равносильным $x = \varphi(x)$. Выберем любым способом приближенное значение корня x_0 и подставим его в правую часть уравнения

$x = \varphi(x)$. Получим некоторое число

$x_1 = \varphi(x_0)$, подставляя которое в правую

часть равенства $x_1 = \varphi(x_0)$, вместо x_0

число x_1, получим новое число $x_2 = \varphi(x_1)$.

Повторяя этот процесс, получим

последовательность чисел $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

Если эта последовательность имеет предел $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$, то, переходя к пределу в равенстве $x_n = \varphi(x_{n-1})$ и предполагая функцию $\varphi(x)$ непрерывной, найдем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})$$ или $\xi = \varphi(\xi)$.

Таким образом, предел ξ является корнем уравнения и может быть вычислен с любой степенью точности.

Пример. Решить приближенно уравнение

$$y = f(x) = 15\ln x + 0{,}5x^2 - 5x.$$

Подберем возможно меньший отрезок, у

которого значения функции имеют разные:

$$f(1) = -4{,}5 < 0, f(4) = 8{,}7944 > 0.$$

Попробуем уменьшить интервал:

$$f(2) = 2{,}3973 > 0.$$

Следовательно, искомый корень находится

в интервале $\left[a,b\right]=\left[1,2\right]$. Так как

$f''(2)=4{,}75>0,$ то $x=2$ можно

принять в качестве исходной точки x_0.

Получаем: $15\ln x+0{,}5x^2-5x=0.$

$$f'(x)=15/x+x-5, x_1=2-\left[f(2)/f'(2)\right].$$

Далее $f(2) = 2{,}3973,\ f'(2) = 4{,}5.$

$$x_1 = 2 - (2{,}3973)/4{,}5 = 1{,}4673.$$

Проверяем точность решения, для чего

устанавливаем значение функции в точке

$1{,}4673.$ Оно равно $-0{,}5087.$

Повторяем расчет для точки $(1{,}4673).$

Значение производной в точке $6{,}6902,$

$$x_2 = 1{,}4673 - \left[\frac{-0{,}5987}{6{,}6902} \right] = 1{,}5433.$$

Функция для этого значения равна

$$f(1{,}5433) = -0{,}0166.$$

Выполняя аналогичные вычисления, мы

получим значения корня $x = 1{,}545980.$

Для дифференцируемых функций метод Ньютона имеет более высокую скорость сходимости.