Лекция 8

Определённый интеграл.

1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

2. Определённый интеграл как предел интегральной суммы.

3. Свойства определённого интеграла.

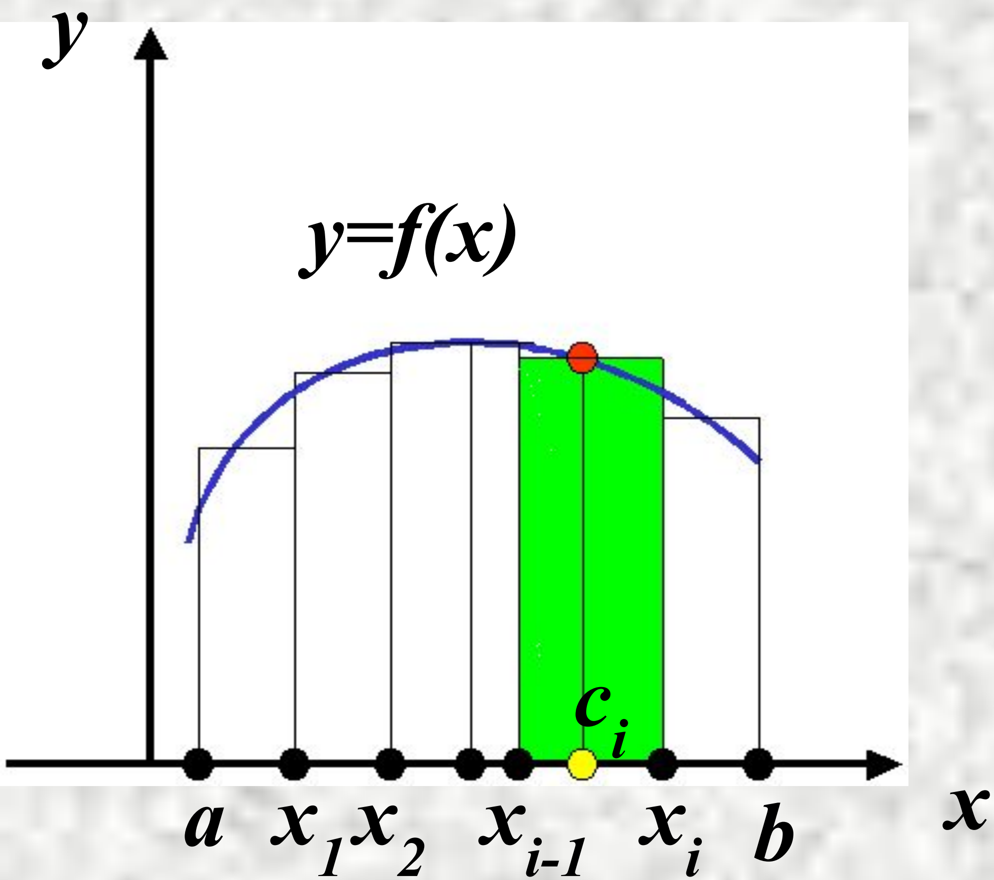
1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

Пусть *f(x)* - непрерывная на [*a, b*] функция.

Задача – вычислить площадь криволинейной трапеции.

Для её решения разобьём криволинейную трапецию на части точками деления:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$



$$\Delta x_1 = x_1 - x_0;$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1;$$

....

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};$$

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Площадь криволинейной трапеции будет равна приближённо сумме площадей прямоугольников:

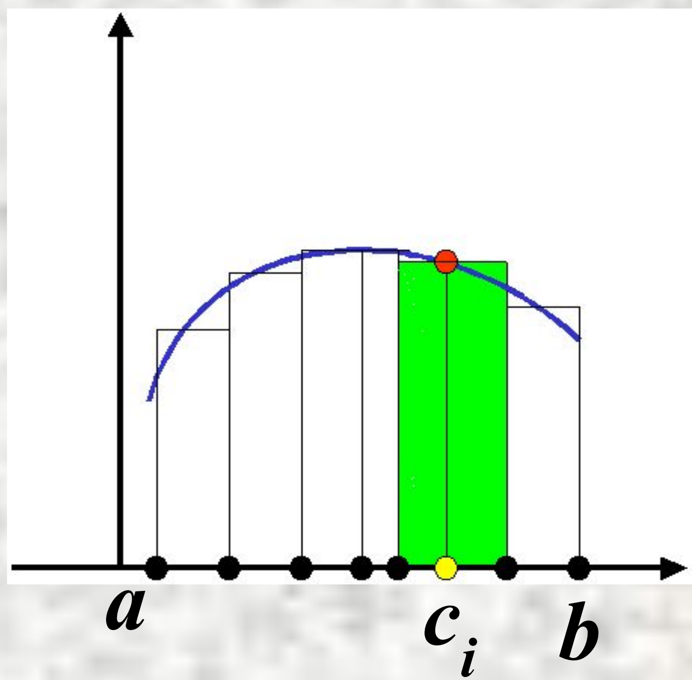
$$S \approx S_n$$

Обозначим $\max \Delta x_i$ - наибольшую из длин отрезков разбиения и рассмотрим такие разбиения отрезка [a,b], при которых $\max \Delta x_i \to 0$.

Тогда

$$S = \lim S_n = \lim \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

- точное значение площади криволинейной трапеции.



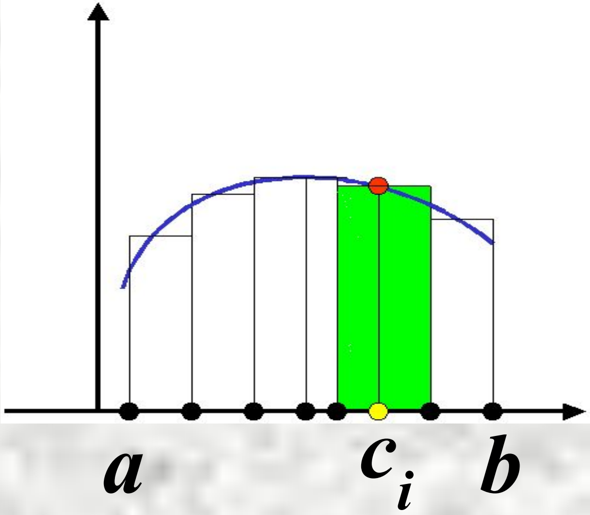
2. Определённый интеграл как предел интегральной суммы.

Построенные выше суммы вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

называются интегральными суммами для функции ***f(x)*** на отрезке [a,b].

S_n зависит от способа разбиения [a,b] на части и от выбора точек c_i на элементарном отрезке.



Выбирая разные способы разбиения и разные точки c_i , получаем последовательность интегральных сумм $\{S_n\}$.

Обозначив $\max \Delta x_i$ - наибольшую из длин отрезков разбиения, можно вычислить предел последовательности интегральных сумм при

$$\max \Delta x_i \to 0 .$$

Определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется число, равное пределу последовательности её интегральных сумм

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}$$

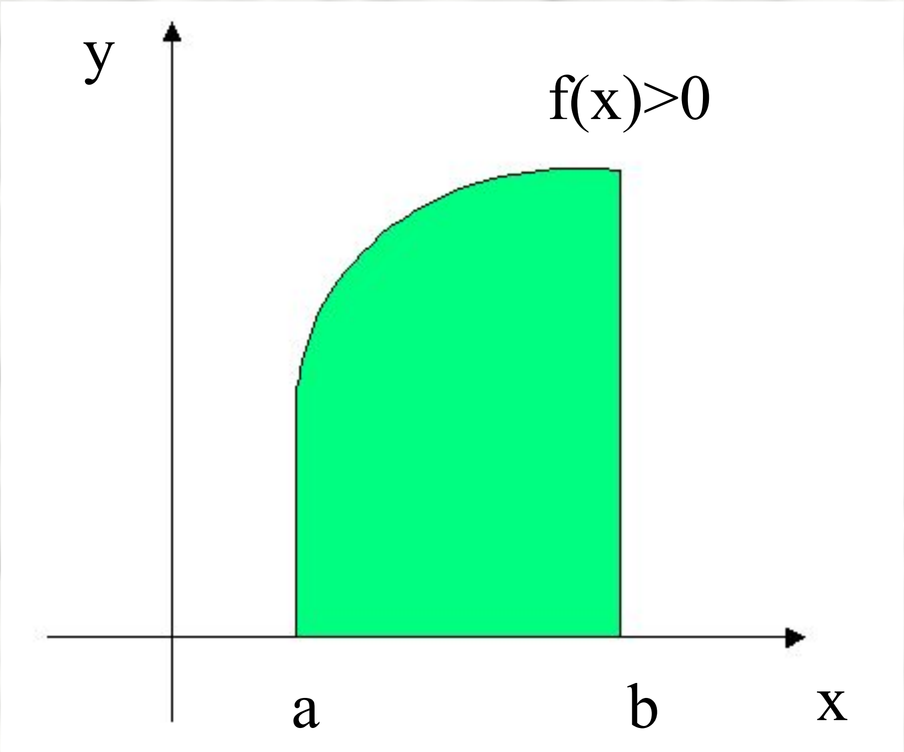
a - ***нижний предел***,

b - ***верхний предел*** интегрирования.

Если существует $\int_a^b f(x)dx$ то функция $f(x)$

называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a,b]$

Геометрический смысл определенного интеграла.



$$\int_a^b f(x)dx = S$$

Теорема существования :

T

Если $f(x)$ непрерывна на [a,b],

то $f(x)$ интегрируема на [a,b].

Замечания.

1. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Свойства определенного интеграла.

1. **Независимость** величины интеграла от обозначения переменной интегрирования.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt}$$

2. **Линейность.**

$$\boxed{\int_a^b \left[Af_1(x) + Bf_2(x)\right]dx = A\int_a^b f_1(x)dx + B\int_a^b f_2(x)dx}$$

3. <u>**Аддитивность**</u> (разбиение на сумму интегралов по частям отрезка).

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

(между ***а*** и ***в*** можно вставить любое число ***с***)

4. Сохранение знака интеграла .

T

Если

1) $f(x)$ интегрируема на [a,b],

2) $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b],$

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \geq 0}$$

5. Интегрирование неравенств.

Т

Если

1) $f(x), g(x)$ интегрируемы на [a,b],

2) $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$,

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx}$$

6. Теорема об оценке интеграла.

Т

Если

1) $f(x)$ интегрируема на [a,b],

2) m, M - наименьшее и наибольшее значения функции на [a,b],

то

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

7. Теорема о среднем.

Т

Если

$f(x)$ непрерывна на [a,b],

то $\exists c \in [a, b]$ такое что

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)}$$

***Доказательство*:** Из теоремы об оценке

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = A, \qquad m \le A \le M$$

$f(x)$ непрерывна $\Rightarrow$ принимает все промежуточные значения между m и M.

Следовательно, на отрезке [a,b] существует точка ***c*** в которой ***f(c)=A:***

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(c).$$

<u>Замечание</u>.

Средним значением функции ***f(x)*** на отрезке [a,b] называется число, определяемое по формуле:

$$\boxed{f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}}$$