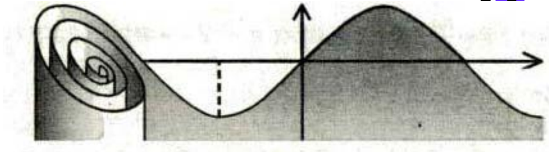
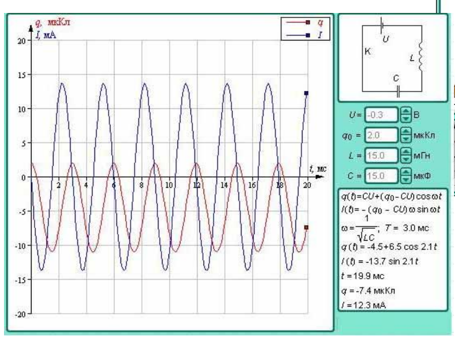
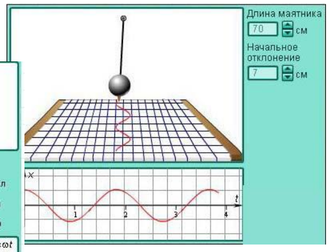
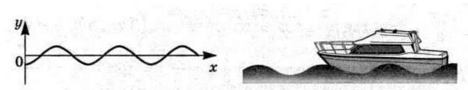
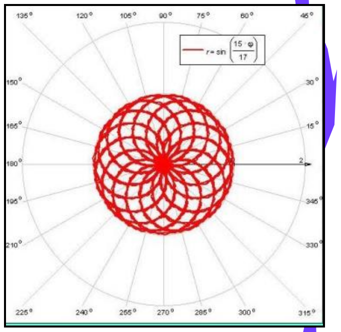
Тема урока: «Геометрический смысл определённого интеграла

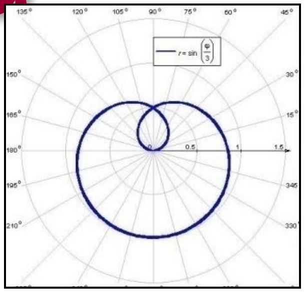


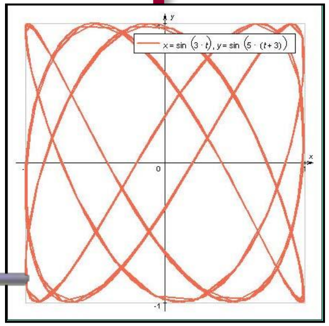












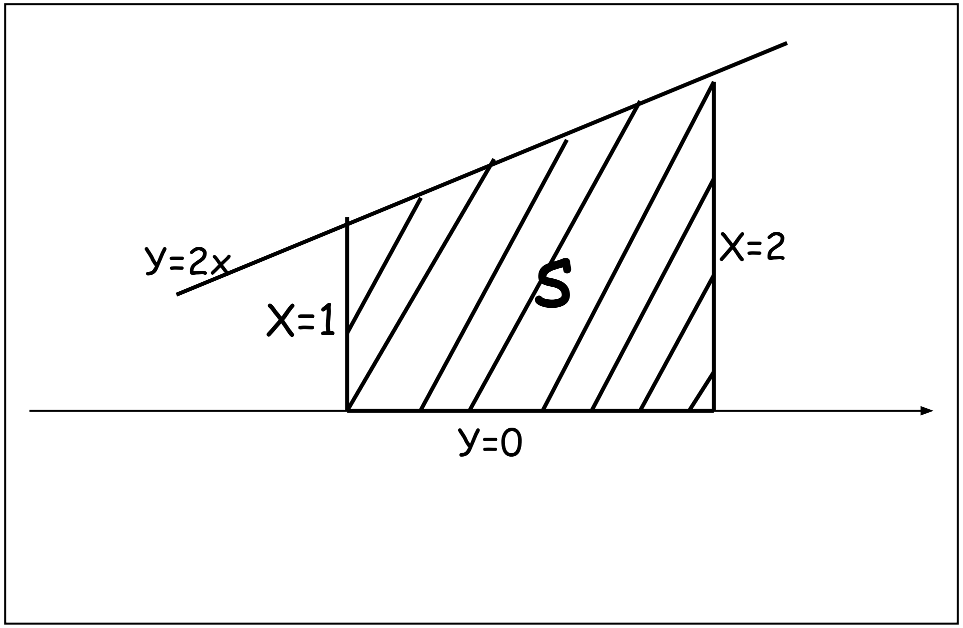
План урока.

1. Понятие криволинейной трапеции.
2. Геометрический смысл определённого интеграла.
3. Способы вычисления площадей криволинейных трапеций с помощью определённого интеграла.

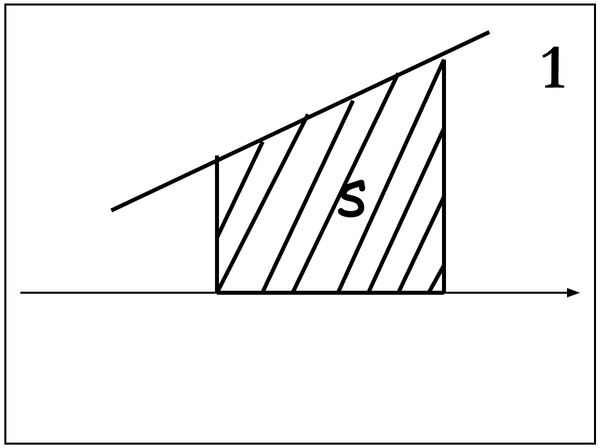
Задача:

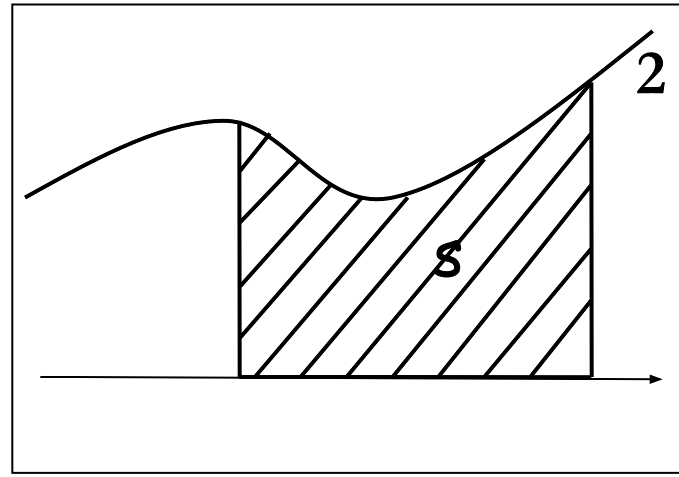
Вычислить площадь земельного участка, если он ограничен линиями $y=2x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Как вычислить площадь данной фигуры?



Как вычислить площадь данной фигуры?

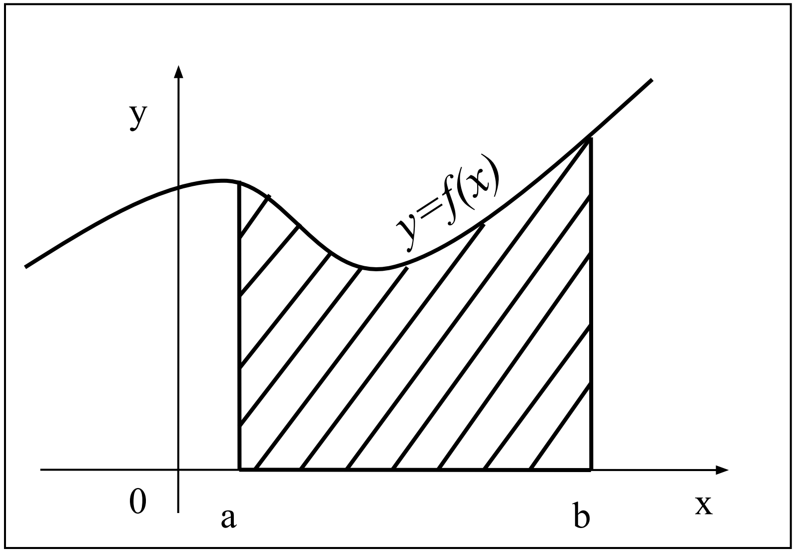


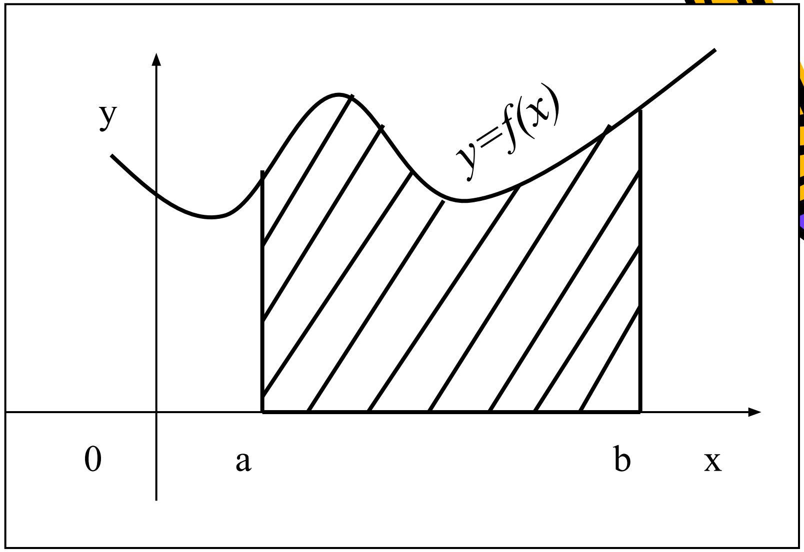


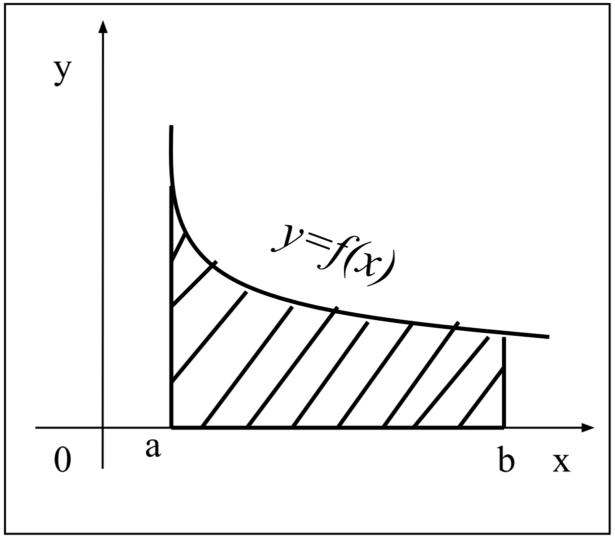
Площадь равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту.

?

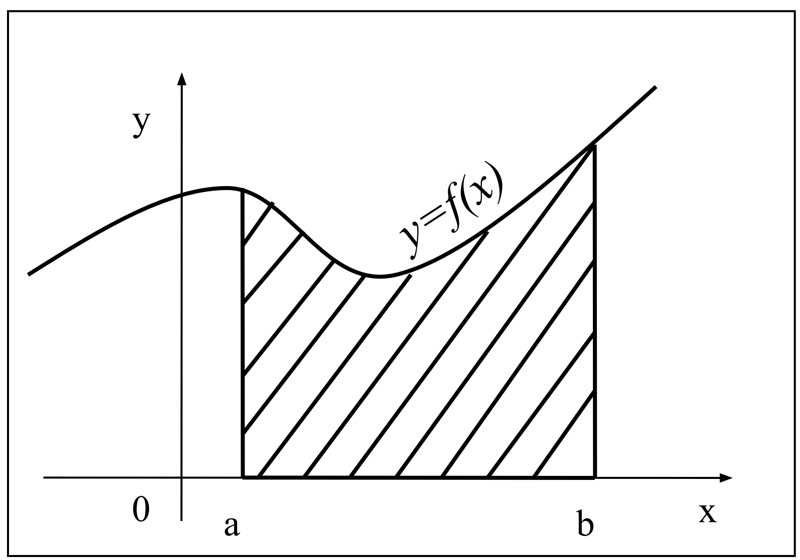
Рассмотрим следующие чертежи



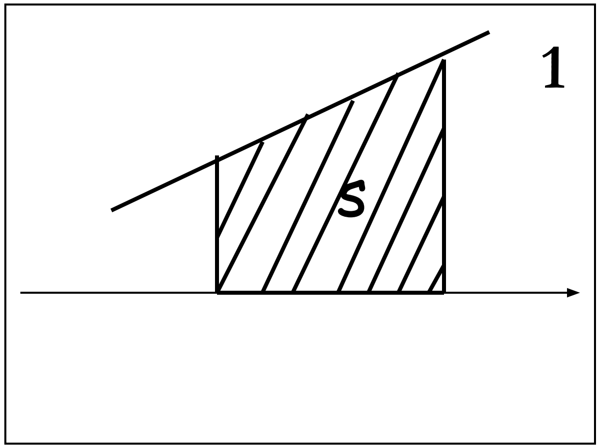


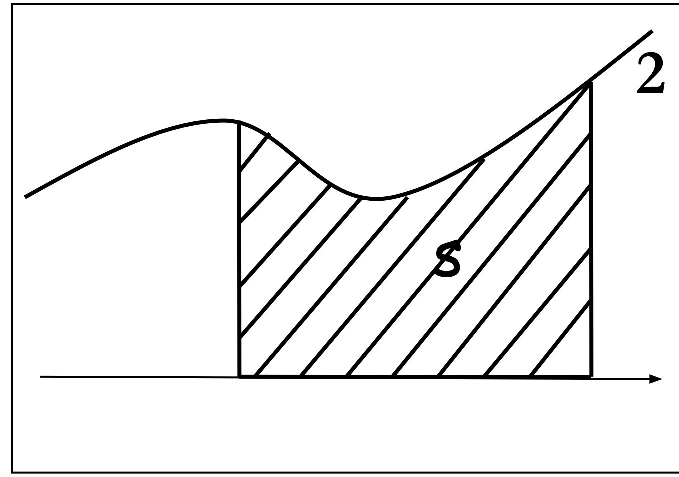


Определение: фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке [*a*; *b*] функции, прямыми *x*=*a*, *x*=*b* и отрезком [*a*; *b*] называется *криволинейной трапецией.*



Как вычислить площадь данной фигуры?

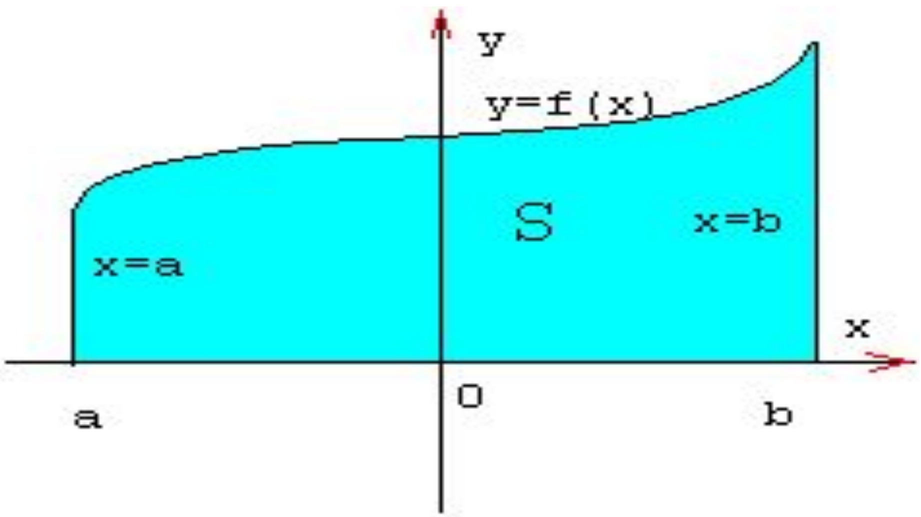




Площадь равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту.

?

Геометрический смысл определённого интеграла.

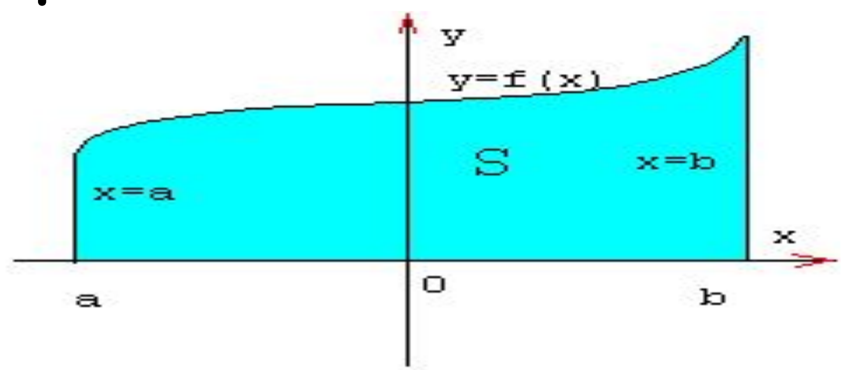


f(x)>=0 на [a,b]

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определённого интеграла.

Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке [*a; b*] функции, прямыми *x=a*, *x=b* и отрезком [*a; b*]



вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Задача:

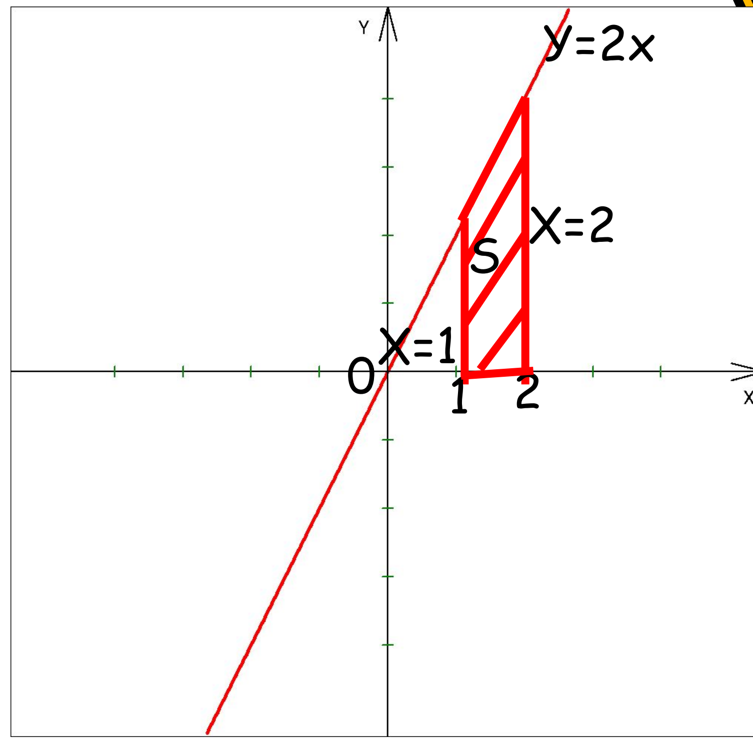
Вычислить площадь земельного участка, если он ограничен линиями $y=2x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции:

1. Изобразить чертеж и убедится, является ли данная фигура криволинейной трапецией
2. Вычислить площадь криволинейной трапеции согласно геометрическому смыслу определённого интеграла.

Задача: вычислить площадь земельного участка, ограниченного линиями
$y=2x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение:



$$S=\int_{1}^{2}2x\,dx=2\frac{x^{2}}{2}\Big|_{1}^{2}=x^{2}\Big|_{1}^{2}=2^{2}-1^{2}=4-1=3\,\textit{кв.ед.}$$

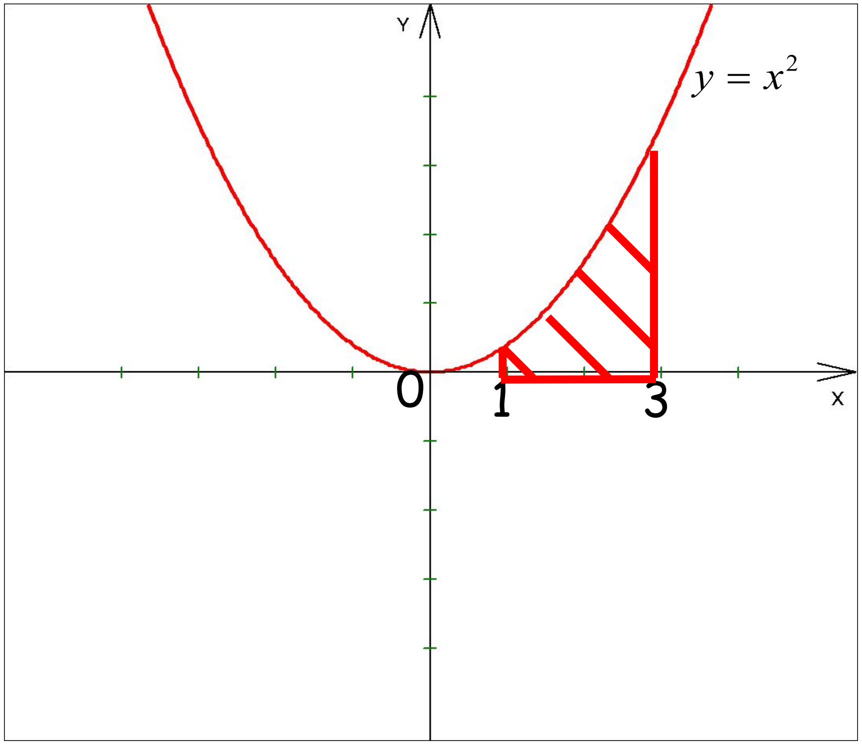
$$\textit{Ответ}: S=3\ \textit{кв. ед.}$$

Задание.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, y = 0, x = 1, x = 3$$

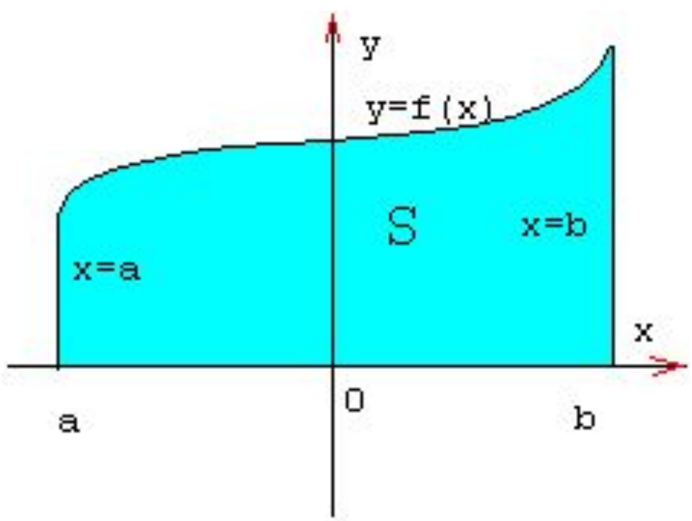
Решение:



$$S = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ кв. ед.}$$

Ответ: S= $8\frac{2}{3}$ *кв. ед.*

Возможные случаи расположения криволинейных трапеций.



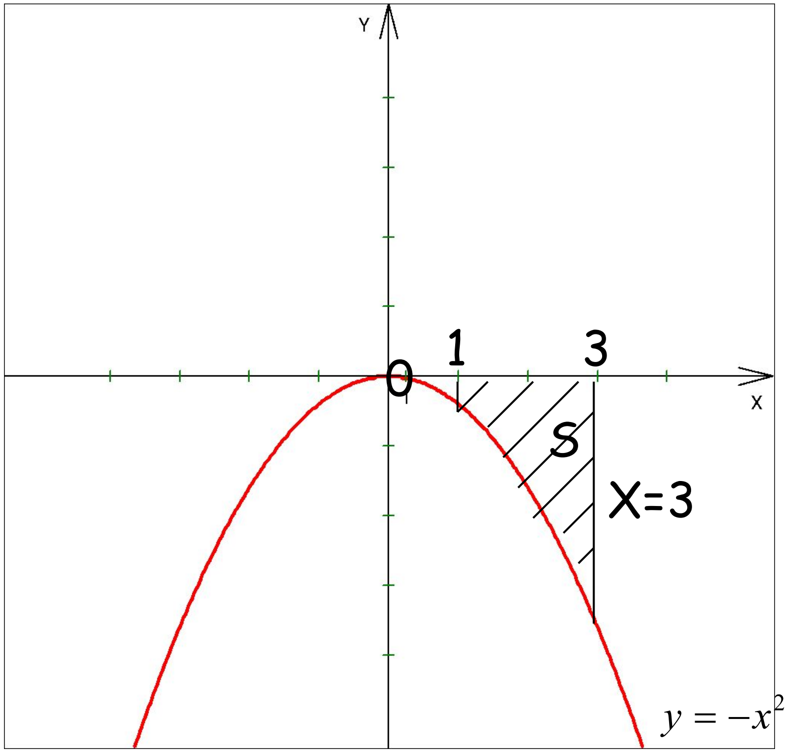
Каким образом может располагаться график функции
y=f(x) относительно оси OX?

Задание.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -x^2, y = 0, x = 1, x = 3$$

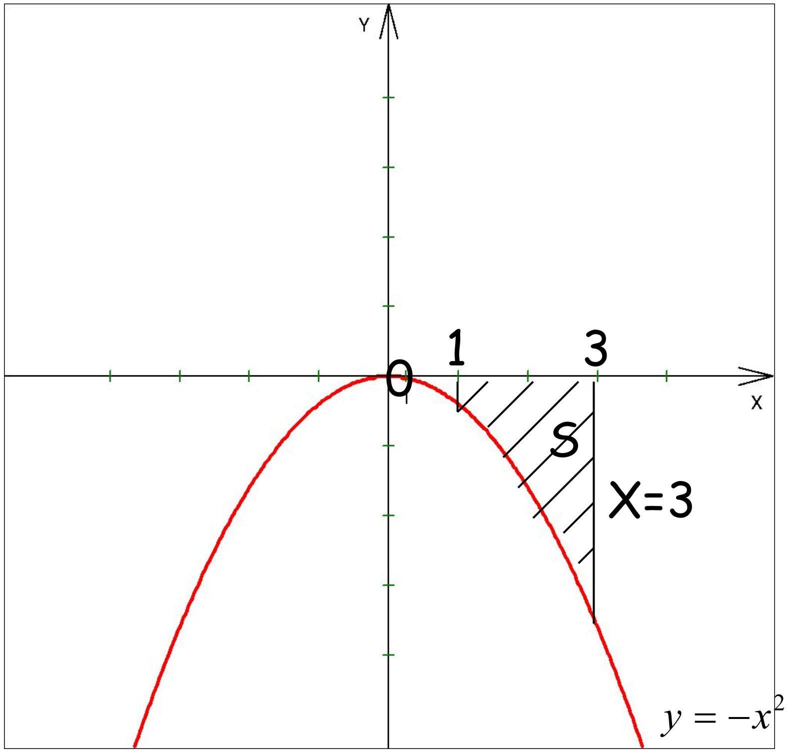
Решение:



$$S=\int_1^3 -x^2dx=-\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=-\frac{3^3}{3}-\left(-\frac{1^3}{3}\right)=-\frac{27}{3}+\frac{1}{3}=$$

$$=-\frac{26}{3}=-8\frac{2}{3}\ \text{кв. ед.}$$

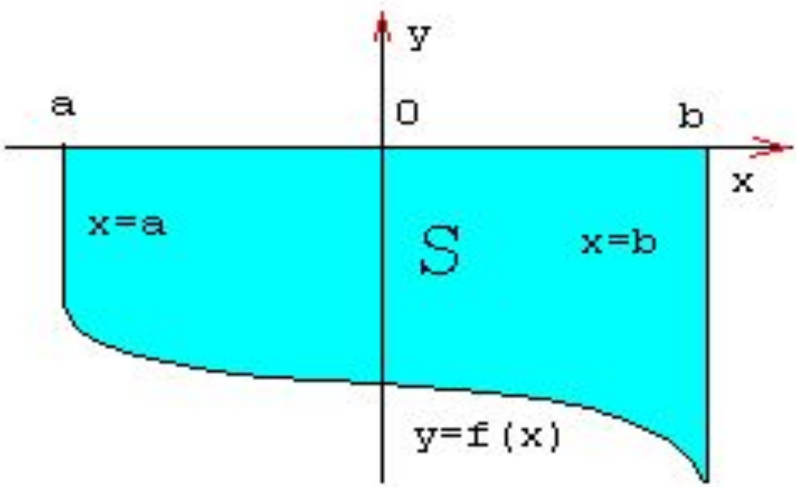
Решение:



$$S=\left|\int_1^3 -x^2dx\right|=\left|-\frac{x^3}{3}\Big|_1^3\right|=\left|-\frac{3^3}{3}-\left(-\frac{1^3}{3}\right)\right|=\left|-\frac{27}{3}+\frac{1}{3}\right|=\left|-\frac{26}{3}\right|=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}\ \text{кв.}$$

Ответ: S= $8\frac{2}{3}$ *кв. ед.*

Если f(x)<0 на [a,b]



$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

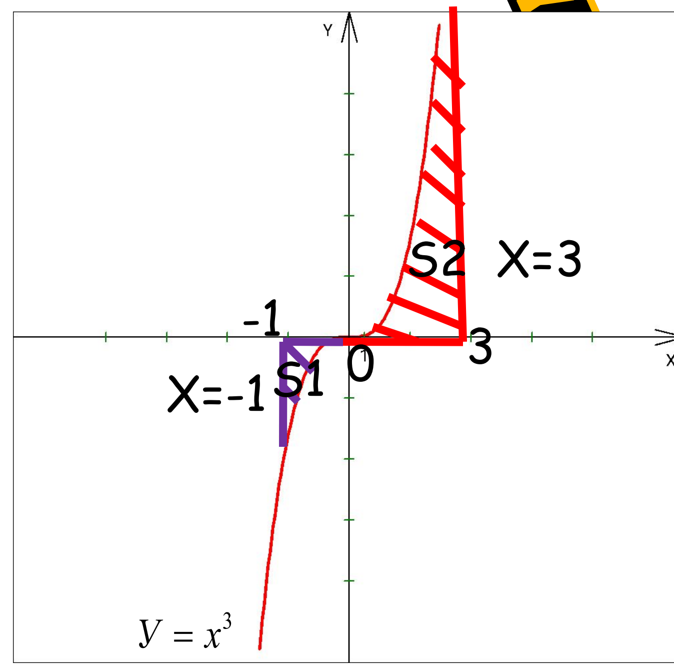
Задание.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3, y = 0, x = -1, x = 3$$

Решение

График функции $y = x^3$ пересекает ось ОХ.

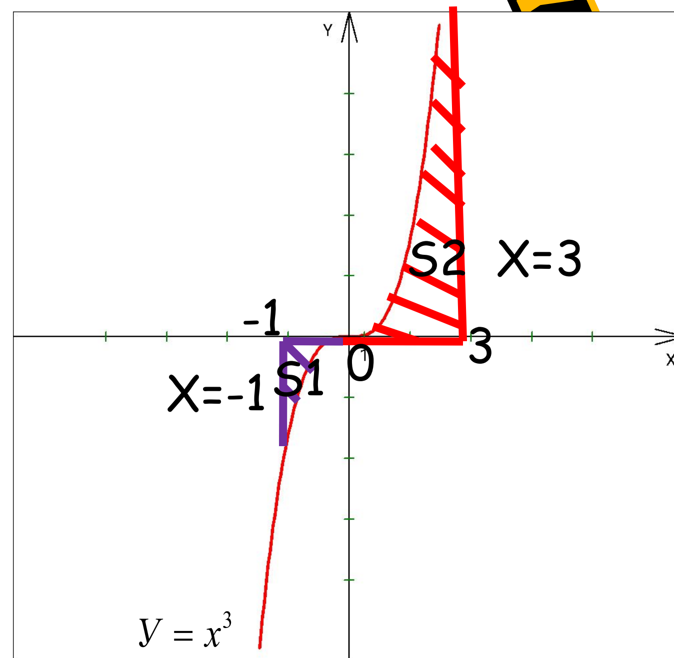


Найдём точки пересечения графика функции с осью ОХ:

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

Решение

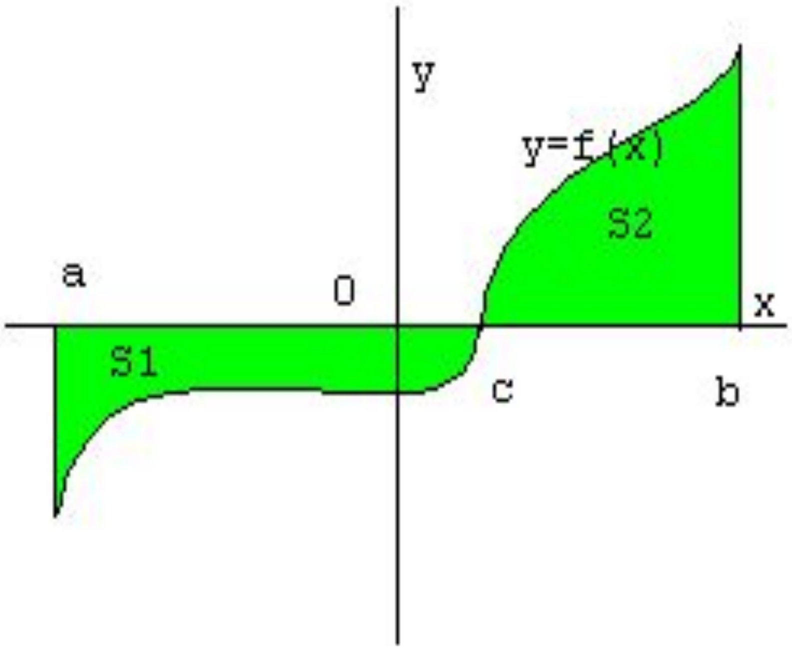


$$S_1 = \left|\int_{-1}^{0} x^3 dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}\right| = \left|\frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \text{ кв. ед.}$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4} \text{ кв. ед.}$$

$$S = \frac{1}{4} + 20\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{26}{4} = 6\frac{1}{2} \text{ кв. ед.}$$

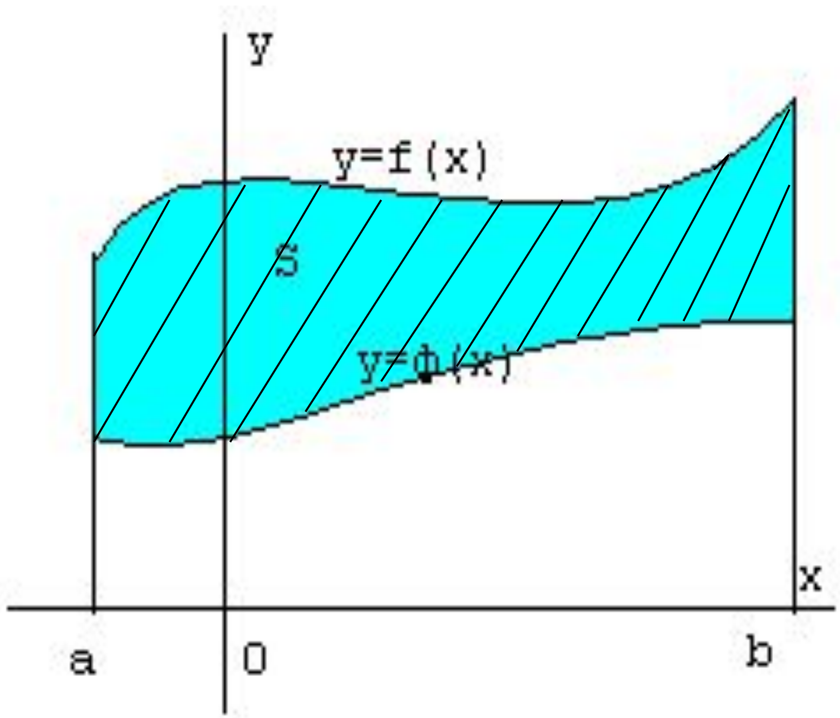
График функции y=f(x) пересекает ось OX в точке $c \in [a,b]$



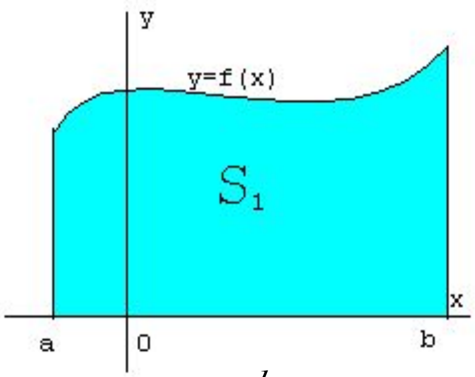
$S=S_1+S_2$

$$S=\left|\int_a^c \mathrm{f(x)dx}\right|+\int_c^b f(x)dx$$

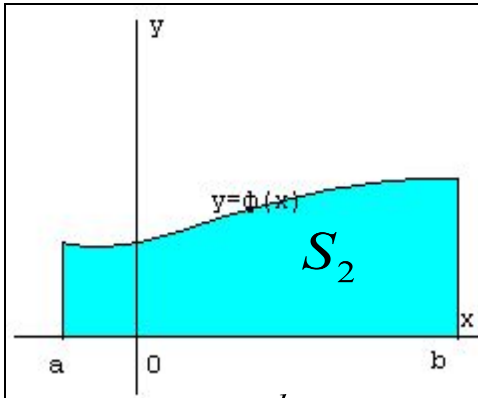
Если две функции y=f(x) и y= Φ (x) непрерывны на отрезке [a,b] и их графики не имеют общих точек на [a,b]



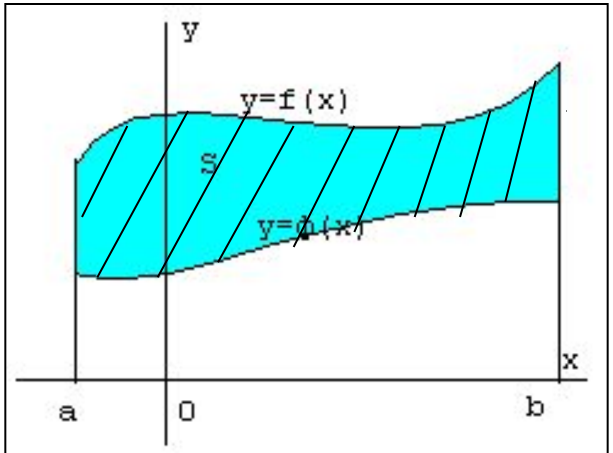
Если две функции y=f(x) и y= Ф (x) непрерывны на отрезке [a,b] и их графики не имеют общих точек на [a,b]



$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$



$$S_2 = \int_a^b \Phi(x)dx$$



$$S = \int_a^b \bigl(f(x) - \varphi(x)\bigr)dx$$

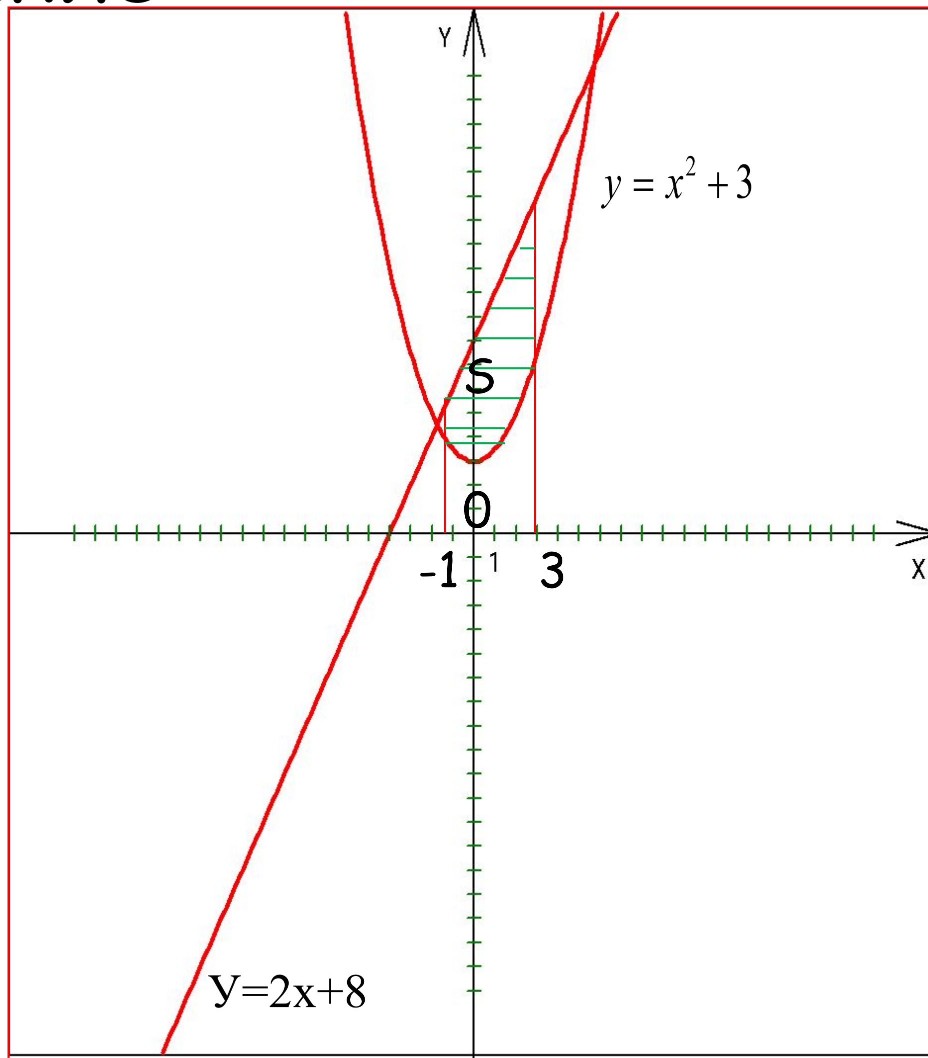
Задание.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 3,\;\; y = 2x + 8,\;\; x = -1,\; x = 3$$

Решение:

$$S=\int_{-1}^{3}(2x+8-(x^2+3))dx$$



Решение:

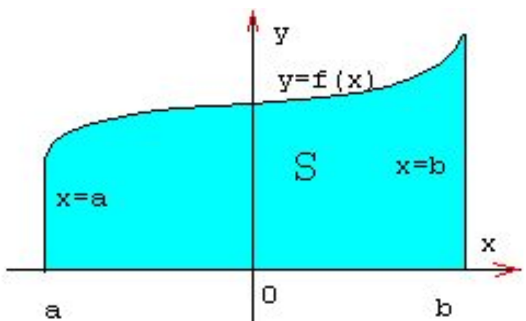
$$S=\int_{-1}^{3}(2x+8-(x^2+3))dx=\int_{-1}^{3}(2x+8-x^2-3)dx=\int_{-1}^{3}(2x-x^2+5)dx=(2\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+5\cdot x)\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=2\frac{3^2}{2}-\frac{3^3}{3}+5\cdot 3-(2\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+5\cdot(-1))=2\cdot\frac{9}{2}-\frac{27}{3}+15-(2\cdot\frac{1}{2}-\frac{-1}{3}-15)=$$

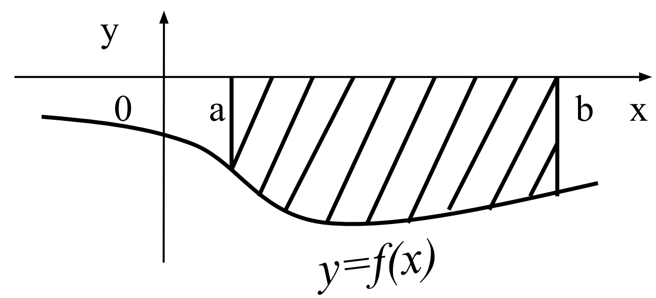
$$-3+14-\frac{1}{3}=\frac{-9+42-1}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}\ \textit{кв. ед.}$$

$$\textit{Ответ}:\ \mathrm{S}=10\frac{2}{3}\ \textit{кв. ед.}$$

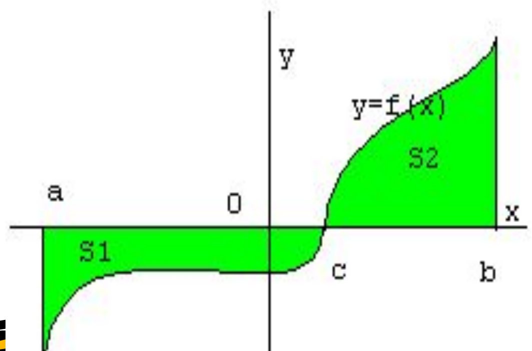
Площадь криволинейной трапеции. Вывод:



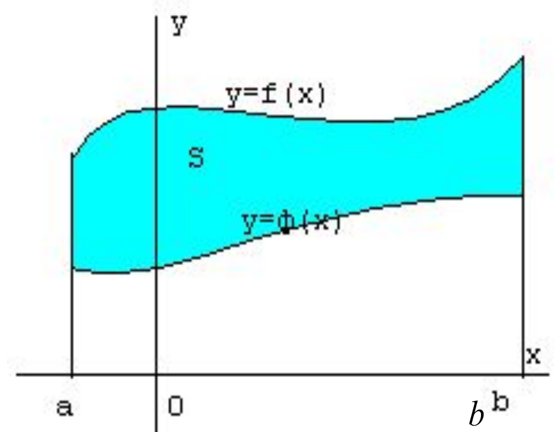
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

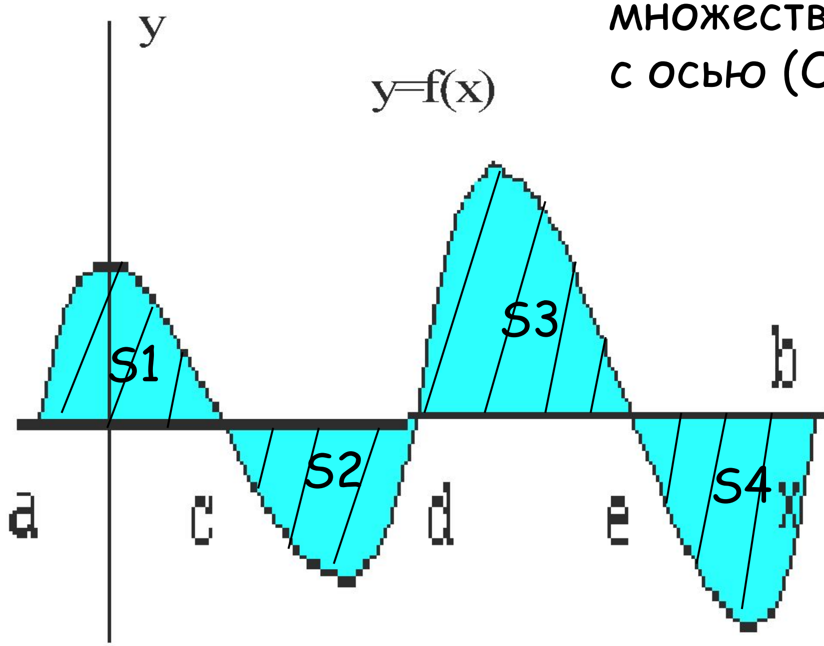


$$S=\left|\int_a^c \mathrm{f(x)dx}\right|+\int_c^b f(x)dx$$



$$S=\int_a^b \big(f(x)-\varphi(x)\big)dx$$

Графики функции y=f(x) имеет множество точек пересечения с осью (OX)



Графики функции y=f(x) имеет множество точек пересечения с осью (OX)

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^d f(x)dx\right| + \int_d^e f(x)dx + \left|\int_e^b f(x)dx\right|$$

Тест.

Тема: «Геометрический смысл определённого интеграла».

1. Криволинейная трапеция это….
   а) фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знака функции f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b]
   б) фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знака функции f(x), прямыми x=a, x=b
   в) фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знака функции f(x), отрезком [a;b]

2. Какие из фигур являются криволинейными трапециями? Перечислите

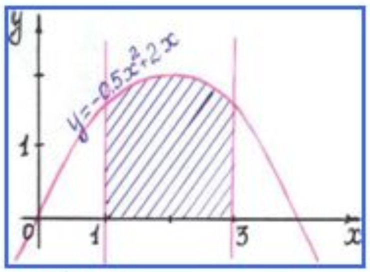


Рис.1

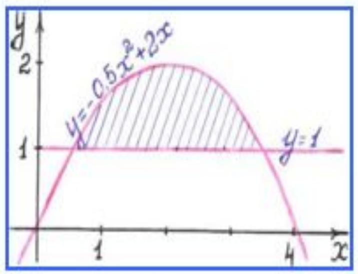


Рис.2

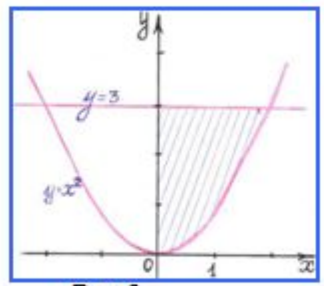


Рис.3

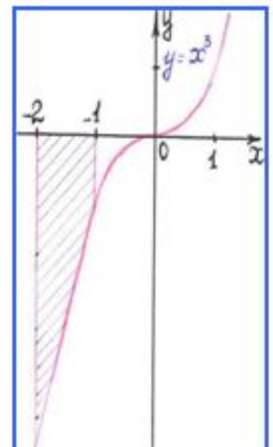


Рис.4

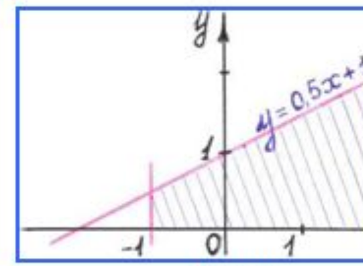


Рис.5

3. Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

а) $S=\int_a^x f(x)dx$

б) $S=\int_a^b f(x)dx$

в) $S=\int f(x)dx$

Ну, кто говорил, что всё сложно и постичь это всё невозможно?

Всё оказалось доступным, полезным, а также достаточно интересным