Иррациональные уравнения

23 АПРЕЛЯ

АЛГЕБРА 11 КЛАСС

Определение

Иррациональным называют уравнения, в которых переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень.

Для таких уравнений, как правило, ищут только действительные корни.

Основной метод решения иррациональных уравнений

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и туже степень.

Важно! Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же

- нечетную степень – равносильное преобразование;
- четную степень – неравносильное преобразование (обязательна проверка корней!).

Пример 1. *Решить уравнение* $\sqrt[6]{x^2-5x}=\sqrt[6]{2x-6}$

- $$\sqrt[6]{x^2-5x}=\sqrt[6]{2x-6};$$

Возведем обе части уравнения в 6-ю степень

$$x^2-5x=2x-6;$$

$$x^2-7x+6=0;$$

$$x_1=1, x_2=6.$$

Проверка:

Если $x=1$, то $\sqrt[6]{1^2-5\cdot 1}=\sqrt[6]{2\cdot 1-6}$; $\sqrt[6]{-4}=\sqrt[6]{-4}$ не имеет смысла;

Если $x=6$, то $\sqrt[6]{6^2-5\cdot 6}=\sqrt[6]{2\cdot 6-6}$; $\sqrt[6]{6}=\sqrt[6]{6}$ истина

Ответ: 6

Пример 2. *Решить уравнение* $(x^2+2x)^{\frac{1}{3}}=x$

- $$(x^2+2x)^{\frac{1}{3}}=x;$$

Возведем обе части уравнения в 3-ю степень

$$x^2+2x=x^3;$$
$$x^3-x^2-2x=0;$$
$$x(x^2-x-2)=0;$$
$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-x-2=0; \end{array}\right.$$
$$x_1=0, x_2=2, x_3=-1$$

Ответ: $-1; 0; 2.$

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$$

- $$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21};$$

Введем новую переменную $t = x^2 - x$

$$\sqrt{t + 2} + \sqrt{t + 7} = \sqrt{2t + 21};$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{t + 2} + \sqrt{t + 7}\right)^2 = \left(\sqrt{2t + 21}\right)^2;$$

$$t + 2 + t + 7 + 2\sqrt{(t + 2)(t + 7)} = 2t + 21;$$

$$\sqrt{(t + 2)(t + 7)} = 6;$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$t^2 + 9t + 14 = 36;$$

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$$

- $$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21};$$

Введем новую переменную $t = x^2 - x$

$$\sqrt{t + 2} + \sqrt{t + 7} = \sqrt{2t + 21};$$

$$t^2 + 9t - 22 = 0;$$

$$t_1 = 2, t_2 = -11$$

Выполним проверку:

Если $t = 2,\text{то}\ \sqrt{2 + 2} + \sqrt{2 + 7} = \sqrt{2 \cdot 2 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{25} \Leftrightarrow 5 = 5$ (и)

Если $t = -11,\text{то}\ \sqrt{-11 + 2} + \sqrt{-11 + 7} = \sqrt{2 \cdot (-11) + 21} \Leftrightarrow \sqrt{-9} + \sqrt{-4} = \sqrt{-1}$

Итак, $t = 2$

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$$

- $$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21};$$

Введем новую переменную $t = x^2 - x$

Итак, $t = 2$

Вернемся к замене:

$$x^2 - x - 2 = 0;$$
$$x_1 = 2, x_2 = -1.$$

Ответ: 2; -1.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1{,}5(x + 4)$$

- $$x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1{,}5(x + 4);$$
$$x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 1{,}5x - 6 = 0;$$
$$x^2 - 1{,}5x - 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 0;$$

Умножим обе части уравнения на 2:

$$2x^2 - 3x - 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 0;$$
$$\underline{2x^2 - 3x + 2} - 2\sqrt{\underline{2x^2 - 3x + 2}} - 8 = 0;$$

Введем новую переменную $u = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$

$$u^2 - 2u - 8 = 0$$
$$u_1 = 4, u_2 - 2$$

Пример 4. *Решить уравнение*

$$x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1{,}5(x + 4)$$

- Введем новую переменную $u = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$

$$u_1 = 4, u_2 - 2$$

Вернемся к замене:

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4; \qquad \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = -2;$$

$$x_1 = 3{,}5; x_2 - 2$$

решений нет

Ответ: -2; 3,5.

Задания для самостоятельной работы

Задания выполнить в тетради и отправить мне во Вконтакте до **20.00 24 апреля**

№30.7, 30.8(б) - 30.10(б)

№30.12, №30.13 – 30.14(б), 30.16-30.18(б)