РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО АНАЛИЗУ ДАННЫХ (1 СЕМЕСТР)

Формулы комбинаторики

Учитывается ли порядок размещения элементов?

- Да → **Все ли элементы входят в комбинацию?**
  - Да → **Перестановки** $P_n = n!$
  - Нет → **Размещения** $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Нет → **Сочетания** $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

В пакете Microsoft Excel существуют функции для вычисления факториалов, числа перестановок и числа сочетаний:

$$P_n = n! = \text{ФАКТР}(<n>);$$

$$A_n^k = \text{ПЕРЕСТ}(<n>;\ <k>);$$

$$C_n^k = \text{ЧИСЛКОМБ}(<n>;\ <k>).$$

Пусть событие A состоит из $k = |A|$ элементарных событий ω_i (последние называются «благоприятными» для A). Тогда для определения вероятности события A применяется следующая формула (классический способ подсчета вероятностей):

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $n = |\Omega|$ – число всех элементарных исходов.

Размещениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \qquad (2.1.3)$$

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n, т. е. упорядоченные подмножества множества S, состоящие из всех элементов данного множества и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \qquad (2.1.4)$$

Сочетаниями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}. \qquad (2.1.5)$$

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \qquad (2.1.6)$$

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}. \qquad (2.1.7)$$

Пример. Классическими схемами являются следующие опыты.

1. Подбрасывание монеты. Элементарные события: появление «орла» и появление «решки» — равновозможные.

2. Подбрасывание правильного кубика. Равновозможными являются элементарные события, состоящие в выпадении любой конкретной цифры от 1 до 6.

3. Извлечение шара из урны. Появление любого из имеющихся в урне шаров являются событиями равновозможными.

Частным случаем классической вероятностной схемы является **урновая схема**: в урне содержится L шаров, среди которых K белых и $(L-K)$ черных. Из урны наугад извлекаются l шаров, и требуется вычислить вероятности $\mathbf{P}_{K,L}(k,l)$ того, что в выборке содержится ровно k белых шаров (и $(l-k)$ черных).

Если при этом шары из урны извлекаются без возвращения, то для вычисления вероятности $\mathbf{P}_{K,L}(k,l)$ того, что в выборке содержится ровно k белых шаров (и $(l-k)$ черных), применяется

Формула гипергеометрической вероятности:

$$\mathbf{P}_{K,L}(k,l)=\frac{C_K^k C_{L-K}^{l-k}}{C_L^l} \quad (k=0,1,2,\ldots,\min\{K;l\}). \qquad (2.2.15)$$

Если же шары из урны извлекаются с возвращением, то для вычисления вероятности $\mathbf{P}_{K,L}(k,l)$ того, что в выборке содержится ровно k белых шаров [и $(l-k)$ черных], используется

Формула Бернулли:

$$\mathbf{P}_{K,L}(k,l)=C_l^k\left(\frac{K}{L}\right)^k\left(\frac{L-K}{L}\right)^{l-k} \quad (k=0,1,2,\ldots,l). \qquad (2.2.16)$$

$$\mathbf{P}_{K,L}(k,l)=\text{ГИПЕРГЕОМ.РАСП}(<k>;<l>;<K>;<L>;\text{ЛОЖЬ})$$

и

$$\mathbf{P}_{K,L}(k,l)=\text{БИНОМ.РАСП}(<k>;<l>;<K>/<L>;\text{ЛОЖЬ}).$$

Тема: §1.Комбинации событий. Классический способ подсчета вероятностей

Задача №1. Независимо друг от друга 5 человек садятся в поезд, содержащий 13 вагонов. Найдите вероятность того, что все они поедут в разных вагонах.

Решение:

1. Количество способов рассадить 5 человек в 13 вагонов |Ω|=13^5
2. Искомое событие А (все поедут в разных вагонах) – А= 13*12*11*10*9 различных способов
3. Искомая вероятность равна:

$$P(A)== \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{154440}{371293} \approx 0,416.$$

Ответ:0,416.

Задача №2. Компания из n=16 человек рассаживается в ряд случайным образом.Найдите вероятность того, что между двумя определенными людьми окажутся ровно k=6человек.

Решение:

1. выбор 2 мест из 16 - C_{16}^{2}
2. Событию А, выбору 2 мест, так чтобы между ними было ровно 6, благоприятствует **16−6−1=9 способов**
3. Искомая вероятность равна:

$$P(A)== \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{120} \approx 0,075$$

Ответ:0,075

Задача №3. В группе учатся 13 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

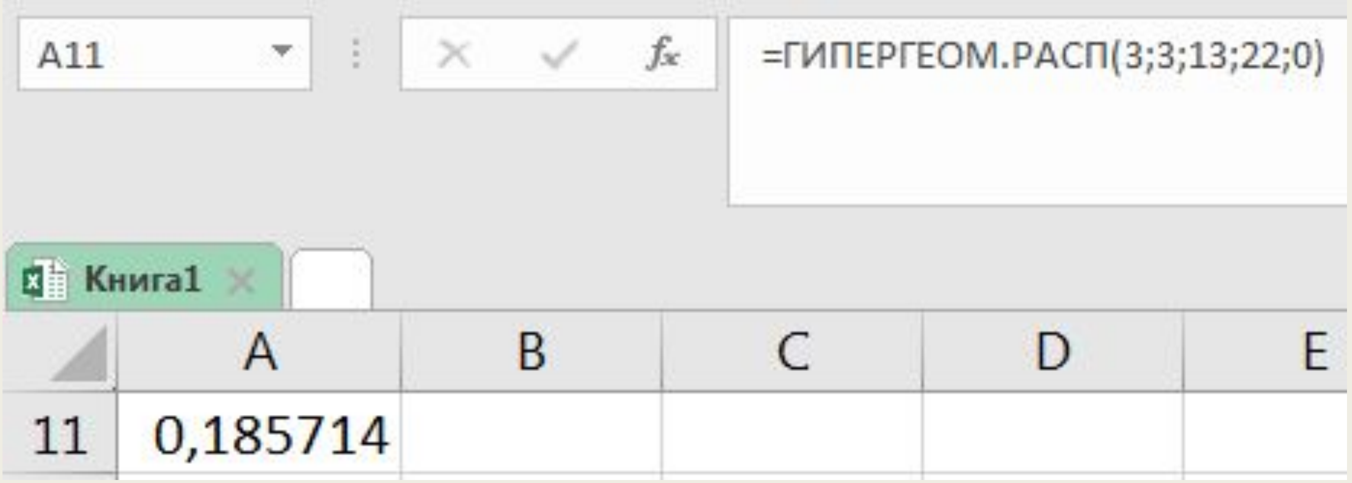
Решение:

1. Количество способов выбрать троих для дежурства из 22- $|\Omega| = C_{22}^{3}$
2. Событию А, что все окажутся юношами (13) благоприятствует $|A| = C_{13}^{3}$ так чтобы между ними было ровно 6, благоприятствует **16−6−1=9 способов**
3. Искомая вероятность равна:

$$P(A) == \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{13}^{3}}{C_{13}^{3}} = \frac{286}{1540} \approx 0{,}186$$

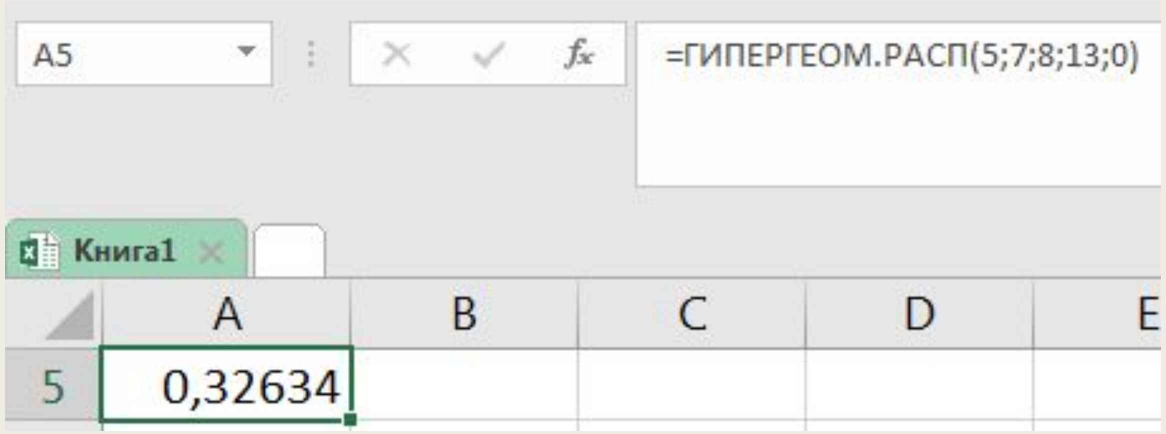
Ответ: 0,186

Excel



Задача №4. В партии из 13 деталей имеется 8 стандартных.Наудачу отобраны 7 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 5 стандартных.

Excel



Решение:

1. Количество способов отобрать 7 деталей из 13 - $|\Omega| = C_{13}^{7}$

2. Событию А, что среди 7 деталей окажется ровно 5 стандартных, а , следовательно, остальные 2– нестандартные, благоприятствует - $|A| = C_8^5 * C_5^2$

3. Искомая вероятность равна:

$$P(A) == \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_8^5 * C_5^2}{C_{13}^{7}} = \frac{560}{1716} \approx 0,326$$

Ответ: 0,326

Задача № 5. В киоске продается 9 лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет 3 штуки. Студент купил 4 билета. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше 2,но не больше 3.

Решение:

1.Количество способов выбрать 4 билета из 9 равно $|\Omega| = C_9^4$

2. Определить вероятность события А, что среди что среди 4 билетов окажется либо 2 (А1), либо 3 (А2) выигрышных билета.

3. Событию А1 благоприятствует $|A1| = C_3^2 * C_6^2$, а событию А2 - $C_3^3 * C_6^1$

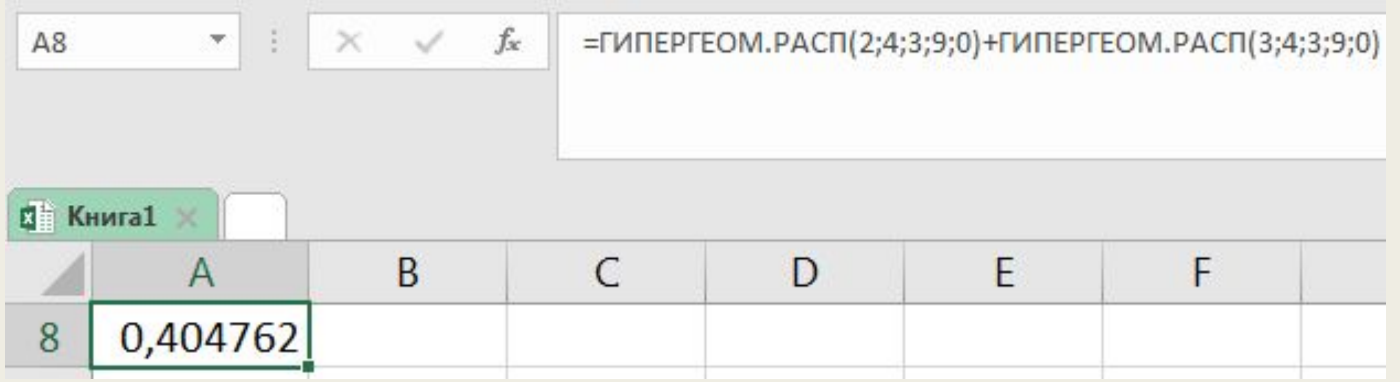
4. Искомая вероятность равна:

$$P(A) == \frac{|A1| + |A2|}{|\Omega|} = \frac{C_3^2 * C_6^2 + C_3^3 * C_6^1}{C_9^4}$$

$$= \frac{51}{126} \approx 0{,}405$$

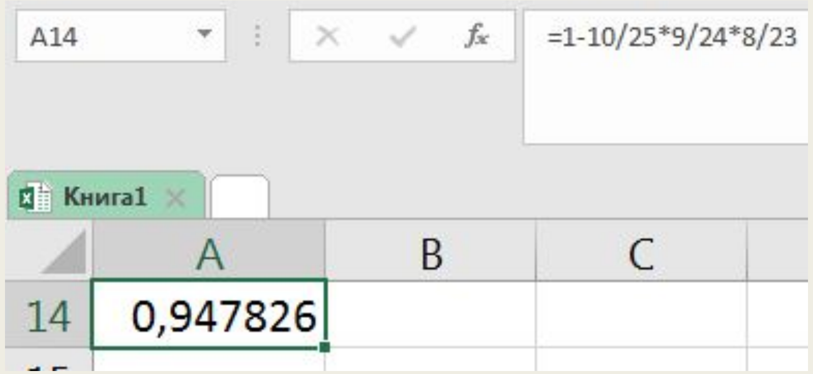
Ответ: 0,405

Excel



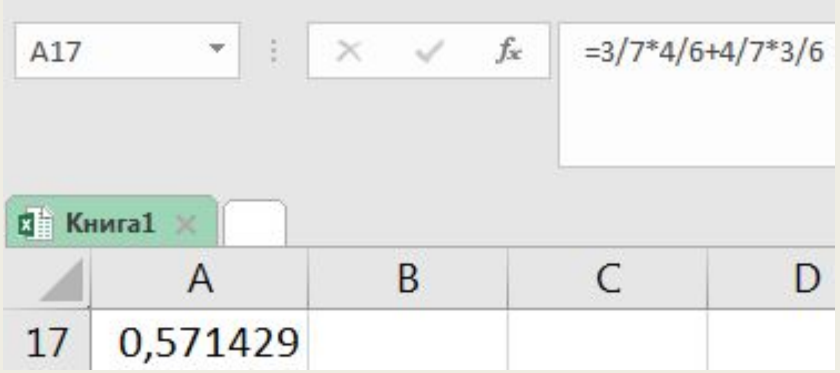
Задача №6

Имеется 25 экзаменационных билетов, на каждом из которых напечатано условие некоторой задачи. В 15 билетах задачи по статистике, а в остальных 10 билетах задачи по теории вероятностей. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из них не достанется задачи по теории вероятностей.



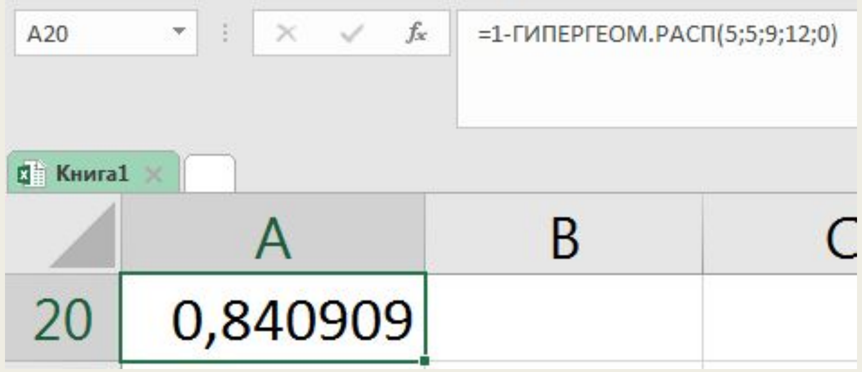
Задача №7

В ящике 3 белых и 4 черных шаров. Найдите вероятность того, что из двух вынутых наудачу шаров один белый, а другой черный. Вынутый шар в урну не возвращается.



Задача №8

В ящике 12 шаров, из них 3 белых, а остальные - черные. Из ящика наугад берут 5 шаров. Какова вероятность, что среди выбранных есть хотя бы один белый шар?



Тема: §2.Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности применяется в случае бесконечного множества элементарных событий Ω, когда Ω представляет собой отрезок прямой ($\Omega \subset \mathbb{R}$), или фигуру на плоскости ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), или тело в пространстве ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$).

Пусть событие A состоит в случайном попадании наугад «брошенной» точки в область G.

Определение. Вероятностью события A *называется отношение меры области* G *к мере всего пространства элементарных событий*:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|G|}{|\Omega|}. \tag{2.2}$$

В качестве меры выступает длина, площадь, объем, время и т. д.

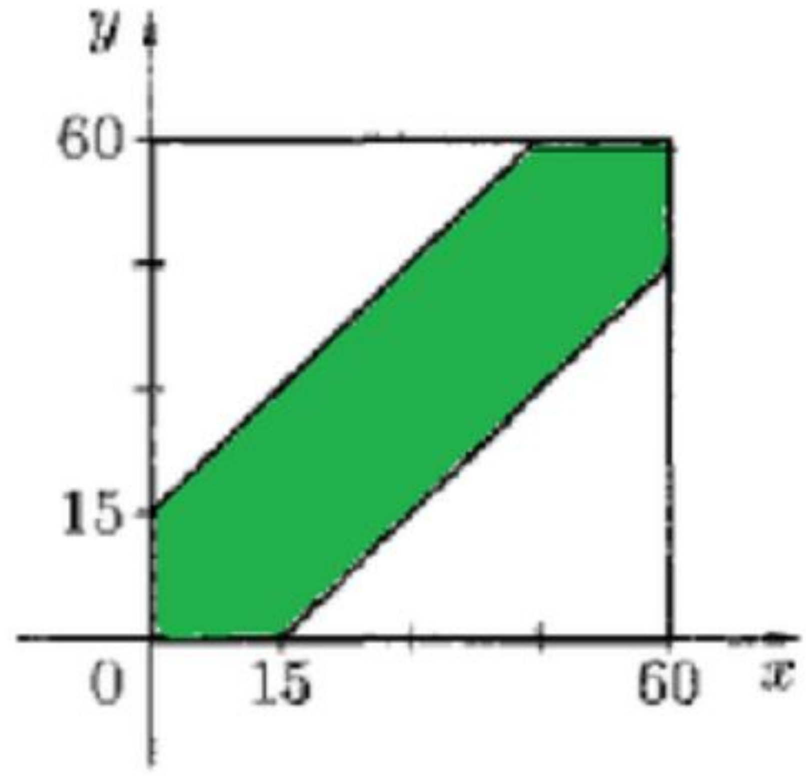
Задача о встрече:

Два человека договорились о встрече между **9 и 10** часами утра. Пришедший первым ждет второго **в течение 15 мин,** после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность того, что **встреча состоится,** если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

Решение:

x - время прихода первого,
y - второго.

$$0 \le x \le 60, \qquad 0 \le y \le 60$$



Исходы G равновозможны (поскольку лица приходят на удачу)

$$G = \{(x, y) : 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\};$$

Событие A - лица встретятся - произойдёт, если разность между моментами их прихода будет не более 15 минут (по модулю), т.е.

$$A = \{(x, y) : |y - x| \le 15\}$$

Как определить область, заштрихованную на рисунке, т. е. точки полосы, где сконцентрированы исходы, благоприятствующие встрече?

$$|y - x| \le 15,\ \text{т. е. } x - 15 \le y \le 15 + x$$

Необходимо определить площадь всей фигуры:
т.к. это квадрат, то площадь соответственно будет равна $|G|=60^2=3600$.
Площадь заштрихованной фигуры равна **разности всей фигуры и двух незаштрихованных прямоугольных треугольника:**

$$|D| = 60^2 - 2S_\Delta = 60^2 - 2\left(\frac{1}{2} * (60-15)^2\right) = 60^2 - 45^2 = 15 * 105 = 1575.$$

По формуле для геометрического определения вероятности, получим:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{|D|}{|G|} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16} \approx 0{,}44$$

Ответ: 0,44

Задача №2

На отрезок [0;1] наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток [0,4;0,7]?

Решение:

1. Событие А – брошенная на отрезок [0;1] точка попала в промежуток [0,4;0,7]
2. Общее число исходов - длиной большего отрезка: G=1-0=1 ед.,
3. Благоприятствующие событию А исходы – длиной вложенного отрезка: D=0,7-0,4=0,3 ед.

$$P(A) = \frac{|D|}{|G|} = \frac{0,3}{1} = 0,3$$

(Согласно геометрическому определению вероятности)

Тема: §3.Правила сложения и умножения вероятностей

Для любых двух событий A и B справедлива формула:

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB). \tag{3.1}$$

▷ Для доказательства используем формулу для вероятности суммы двух несовместных событий. Событие $A+B$ можно представить в виде суммы несовместных событий A и $B \setminus A$. Следовательно,

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A).$$

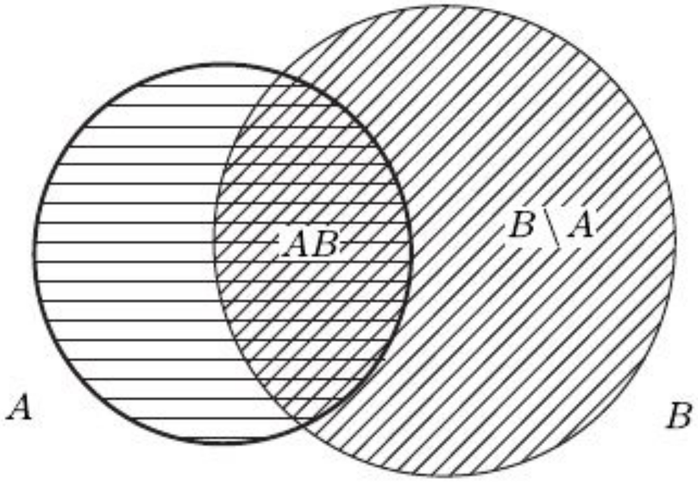


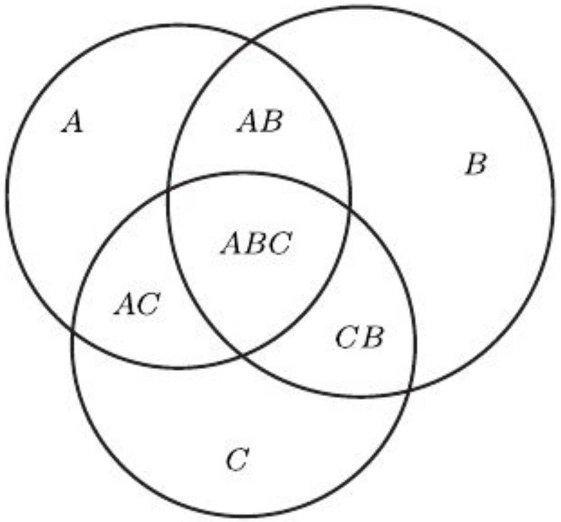
Рис. 3.1

В свою очередь, событие B можно представить в виде суммы несовместных событий AB и $B \setminus A$. Поэтому

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(B \setminus A).$$

Теорема сложения обобщается на произвольное число сомножителей. Так, для трех событий A, B, C справедливо соотношение

$$\mathsf{P}(A+B+C) = \\ = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(AB) - \mathsf{P}(AC) - \mathsf{P}(BC) + \mathsf{P}(ABC).$$



Формула для вероятности суммы независимых событий. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то справедлива формула*

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - [1 - \mathsf{P}(A_1)] \cdot [1 - \mathsf{P}(A_2)] \cdots [1 - \mathsf{P}(A_n)]\,.$$

$\triangleright$ Переходим к противоположному событию, используем формулу де Моргана и независимость событий.

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}) =$$
$$= 1 - \mathsf{P}(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A_1})\,\mathsf{P}(\overline{A_2}) \cdots \mathsf{P}(\overline{A_n}) =$$
$$= 1 - [1 - \mathsf{P}(A_1)] \cdot [1 - \mathsf{P}(A_2)] \cdots [1 - \mathsf{P}(A_n)]\,.$$

Определение. *Пусть B имеет ненулевую вероятность.* **Условной вероятностью** *события A при условии, что произошло событие B, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события B.*

Условная вероятность обозначается символом $\mathsf{P}(A \mid B)$ (используется также обозначение $\mathsf{P}_B(A)$).

Формула для условной вероятности. По определению,

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}, \quad \mathsf{P}(B) \neq 0. \tag{3.2}$$

Аналогично определяется $\mathsf{P}(B \mid A)$:

$$\mathsf{P}(B \mid A) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)}, \quad \mathsf{P}(A) \neq 0.$$

Определение. *События A и B называются* **независимыми (статистически независимыми)**, *если вероятность их произведения равна произведению вероятностей сомножителей,*

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B). \tag{3.3}$$

Теорема. *Два события A и B, такие, что $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$, независимы тогда и только тогда, когда условная вероятность одного из них относительно другого совпадает с безусловной вероятностью,*

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A); \quad \mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B).$$

Теорема умножения. *Для произвольных событий A и B имеют место следующие правила вычисления вероятности их произведения:*

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(A \mid B). \tag{3.4}$$

$\triangleright$ Формулы теоремы умножения непосредственно вытекают из формул для условных вероятностей $\mathsf{P}(B \mid A)$ и $\mathsf{P}(A \mid B)$. $\triangleleft$

Теорема умножения обобщается на произвольное число сомножителей. Так, для трех событий A, B, C справедливо соотношение

$$\mathsf{P}(ABC) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(BC \mid A) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B \mid A)\,\mathsf{P}(C \mid AB).$$

Тема: §4.Формула полной вероятности и формула Байеса

Определение. *Говорят, что события* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *составляют* **полную группу**, *если все они попарно несовместны и в сумме составляют все пространство элементарных событий*:

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega; \quad H_iH_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Формула полной вероятности. *Если события* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *образуют полную группу, то для вероятности любого события* A *справедлива формула*

$$\boxed{\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i).} \qquad (4.1)$$

Теорема. *Пусть имеются события* $H_1, H_2, \ldots, H_n$, *образующие полную группу, и произвольное событие* A, *такое, что* $\mathsf{P}(A) \neq 0$. *Тогда для любой гипотезы* H_k, $k = 1, \ldots, n$, *справедлива* **формула Байеса**

$$\boxed{\mathsf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_k)P(A \mid H_k)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}.} \qquad (4.2)$$

Формула Байеса позволяет пересчитывать имеющиеся априорные (доопытные) вероятности гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, когда становится известно, что произошло некоторое событие A.

$$\boxed{\mathsf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathsf{P}(AH_k)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(H_k)P(A \mid H_k)}{\mathsf{P}(A)}.}$$

28. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 23 белых шара, во втором – 9 белых и 14 черных шаров, в третьем – 23 черных шара. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность P того, что шар вынут из второго ящика.

(28) Пусть H_i – событие, что шар вытащили из i-го ящика, A – вытащили белый шар

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$

$P(A|H_1)=\frac{23}{23}$

$P(A|H_2)=\frac{9}{23}$

$P(A|H_3)=\frac{0}{23}$

$$P(H_2|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{23}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{23}{23}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{23}+\frac{1}{3}\cdot\frac{0}{23}}=\frac{9}{32}\approx 0{,}28125$$

29. В среднем из 100 клиентов банка 53 обслуживаются первым операционистом и 47 – вторым. Вероятности того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет $p_1=0.58$ и $p_2=0.88$ соответственно для первого и второго служащих банка. Какова вероятность, что клиент, для обслуживания которого потребовалась помощь заведующего, был направлен к первому операционисту?

(29) Пусть H_i – событие, что клиент будет обслужен i-ым операционистом

A – обслужен с пом. заведущего, $\bar{A}$ – без пом. заведущего, самим операционистом

$P(H_1)=\frac{53}{100}$ $P(H_2)=\frac{47}{100}$

> или сначала находим $P(\bar{A})$ по полной формуле, потом $1-P(\bar{A})=P(A)$

$P(A|H_1)=1-0{,}58=0{,}42$

$P(A|H_2)=1-0{,}88=0{,}12$

$$P(A)=\frac{53}{100}\cdot 0{,}42+\frac{47}{100}\cdot 0{,}12=\frac{53}{100}\cdot\frac{21}{50}+\frac{47}{100}\cdot\frac{3}{25}=$$

$$=\frac{1113}{5000}+\frac{141}{2500}=\frac{279}{1000}$$

$$P(H_1|A)=\frac{1113/5000}{279/1000}=\frac{371}{465}\approx 0{,}797849$$

30. Имеется 13 монет, из которых 3 штуки бракованные: вследствие заводского брака на этих монетах с обеих сторон отчеканен герб. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 9 раз, причем при всех бросаниях она ложится гербом вверх. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами.

30 Пусть H_1 - качественная монета, H_1 - бракованная
A - выпал герб

$P(H_1) = \frac{10}{13}$ $\quad$ $P(H_2) = \frac{3}{13}$

$P(A|H_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$

$P(A|H_2) = (1)^9 = 1$

$P(A) = \frac{10}{13} \cdot \frac{1}{512} + \frac{3}{13} \cdot 1 = \frac{773}{3328}$

$P(A|H_1) = \frac{3/13}{773/3328} = \frac{768}{773}$

31. Детали, изготовленные в цехе, попадают к одному из 2-х контролёров. Вероятность того, что деталь попадёт к 1-му контролёру, равна 0.8; ко 2-му – 0.2. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной 1-м контролёром равна 0.96; 2-м контролёром – 0.98. Годная деталь при проверке оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверял 1-й контролёр.

31 Пусть H_1 - деталь попала к 1ому контролеру, H_2 - ко 2ому контролеру. A - годная деталь оказалась стандартной

$P(H_1) = 0,8$ $\quad$ $P(H_2) = 0,2$

$P(A|H_1) = 0,96$

$P(A|H_2) = 0,98$

$P(A) = 0,8 \cdot 0,96 + 0,2 \cdot 0,98 = 0,964$

$P(A|H_1) = \frac{0,8 \cdot 0,96}{0,964} = \frac{192}{241} \approx 0,79668$

32. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трёх касс (A,B,C). Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно 0.4, 0.5 и 0.1 Вероятности того, что к моменту прихода пассажира, имеющиеся в кассе билеты распроданы равны соответственно 0.4, 0.3 и 0.1. Найдите вероятность того, что билет куплен. В какой из касс это могло произойти с наибольшей вероятностью?

(32) Пусть H_i - пассажир обратился в i-ую кассу, A-билет куплен, $\bar{A}$-билеты распроданы

$P(H_1) = 0,4 \quad P(H_2) = 0,5 \quad P(H_3) = 0,1$

$P(A) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,68$

$P(A|H_1) = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,68} = \frac{6}{17} \qquad P(A|H_2) = \frac{0,5 \cdot 0,7}{0,68} = \frac{35}{68} \qquad P(A|H_3) = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,68} = \frac{9}{68}$

33. В первой урне $m_1 = 7$ белых и $n_1 = 7$ черных шаров, во второй – $m_2 = 8$ белых и $n_2 = 6$ черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую два шара, после чего из первой урны берут один шар, который оказывается белым. Какова вероятность того, что два шара, переложенные из второй урны в первую, были разных цветов?

(33) Пусть H_1 - из 2й урны переложили 2 белых шара, H_2 - 2 черных шара, H_3 - 1 белый и 1 черный. A - из 1й урны взяли белый шар (после переложения).

$$P(H_1) = \frac{C_8^2 \cdot C_6^0}{C_{14}^2} = \frac{\frac{8!}{6!} \cdot \frac{6!}{6!}}{\frac{14!}{12!}} = \frac{7 \cdot 8}{13 \cdot 14}$$

$$P(H_2) = \frac{C_8^0 \cdot C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{\frac{6!}{4!}}{\frac{14!}{12!}} = \frac{5 \cdot 6}{13 \cdot 14}$$

$$P(H_3) = \frac{C_8^1 \cdot C_6^1}{C_{14}^2} = \frac{\frac{8!}{7!} \cdot \frac{6!}{5!}}{\frac{14!}{12!}} = \frac{8 \cdot 6}{13 \cdot 14}$$

$$P(A|H_1) = \frac{9}{16}$$

$$P(A|H_2) = \frac{7}{16}$$

$$P(A|H_3) = \frac{8}{16}$$

$$P(A) = \frac{9}{16} \cdot \frac{7 \cdot 8}{13 \cdot 14} + \frac{7}{16} \cdot \frac{5 \cdot 6}{13 \cdot 14} + \frac{8}{16} \cdot \frac{8 \cdot 6}{13 \cdot 14} = \frac{549}{1456}$$

$$P(A|H_3) = \frac{8/16 \cdot 8 \cdot 6/13 \cdot 14}{549/1456} = \frac{64}{183}$$

Тема: §5.Независимые испытания. Схема Бернулли. Приближенные формулы Лапласа и Пуассона.

Если в каждом отдельном испытании может быть только два исхода: «успех» с вероятностью p или «неудача» с вероятностью $q = 1 - p$, то повторные независимые испытания называются **схемой Бернулли** (или **биномиальной схемой испытаний**).

Примеры таких испытаний:

1. Последовательное подбрасывание n раз монеты («успех» — выпадение орла) или последовательное подбрасывание n раз правильного кубика («успех» — появление цифры «6»).

2. Испытания n изделий в течение заданного срока при контроле уровня их надежности («успех» — положительный результат испытания).

4.3.1. Формула Бернулли

Теорема. *Вероятность того, что при n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, «успех» происходит ровно k раз, где k принимает значения $0, 1, \ldots, n$, дается* **формулой Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Следствие. *Вероятность того, что успех в n испытаниях произойдет от k_1 до k_2 раз (включительно), равна*

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

В пакете Microsoft Excel для вычисления вероятности $\mathbf{P}_n(k)$ можно пользоваться функцией

$\mathbf{P}_n(k)$ = БИНОМ.РАСП(<k>; <n>; <p>; ЛОЖЬ).

Теорема Пуассона. *Если $n \to \infty, p \to 0$ так, что $np \to \lambda = \text{const}$, то*

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \mathbf{P}(k) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to\lambda}} \mathbf{P}_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

В пакете Microsoft Excel для вычисления $\mathbf{P}(k)$ можно пользоваться функцией

$\mathbf{P}(k)$ = ПУАССОН.РАСП(<k>; <λ>; ЛОЖЬ).

Локальная теорема Муавра–Лапласа. *При больших значениях n справедливо приближенное равенство*

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{4.5}$$

где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ — **функция Гаусса.**

Муавра-Лапласа: $P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, *где* $\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ $\varphi(x)$ – функция Гаусса	=НОРМ.РАСП(k;n*p;КОРЕНЬ(n*p*q);0)	n>100; $n \cdot p \cdot q \geq 9$ число "успехов" - ровно k
$P_n(k \le i \le m) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ *где* $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – *функцияЛапласа* $x_1 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$	=НОРМ.РАСП(m;n*p;КОРЕНЬ(n*p*q);1)- - НОРМ.РАСП(k-1;n*p;КОРЕНЬ(n*p*q);1)	n>100; $n \cdot p \cdot q \geq 9$ число "успехов" в интервале [k;m]

Формула Бернулли и приближенные формулы для вычисления вероятности *k* «успехов» в *n* испытаниях, когда вероятность успеха в одном испытании составляет р, а вероятность неудачи *q*=1-*p*.

Формула	Функция Excel	Когда используется
$P_n(\nu_n = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	=БИНОМ.РАСП(k;n;p;0)	число "успехов" - ровно k
$P_n(\nu_n \le k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}$	=БИНОМ.РАСП(k;n;p;1)	число "успехов" **не больше k**
$P_n(k_1 < \nu_n \le k_2) = \sum_{i=k_1+1}^{k_2} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}$	=БИНОМ.РАСП(k_2;n;p;1)- -БИНОМ.РАСП(k_1;n;p;1)	число "успехов" в интервале (k_1; k_2]
	Приближенные формулы	
Пуассона: $P_n(\nu_n = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ $\lambda = n \cdot p$	=ПУАССОН.РАСП(k;n*p;0)	P<0,1, n>100 число "успехов" - ровно k
$P_n(\nu_n \le k) \approx \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$	=ПУАССОН.РАСП(k;n*p;1)	P<0,1, n>100 число "успехов" **не больше k**
$P_n(k_1 < \nu_n \le k_2) \approx \sum_{i=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$	=ПУАССОН.РАСП(k_2;n*p;1)- - ПУАССОН.РАСП(k_1;n*p;1	P<0,1, n>100 число "успехов" в интервале (k_1; k_2]

34. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.18. Сделано 7 выстрелов. Найдите вероятность того, что в цель попали менее трех раз.

	C	D	E	F	G	H
3		n=7				
4	k	$P_7(k)$				
5	2	0,25225	=БИНОМ.РАСП(C5;7;0,18;ЛОЖЬ)			
6	1	0,38305	=БИНОМ.РАСП(C6;7;0,18;ЛОЖЬ)			
7	0	0,24929	=БИНОМ.РАСП(C7;7;0,18;ЛОЖЬ)			
8	$P_7(k<3)$	0,88459	=СУММ(D5:D7)			
9	ИЛИ					
10	$P_7(k<3)$	0,88459	=БИНОМ.РАСП(C5;7;0,18;ИСТИНА)			

35. Отрезок длины 6 поделен на две части длины 4 и 2 соответственно, 8 точек последовательно бросают случайным образом на этот отрезок. Найдите вероятность того, что количество точек, попавших на отрезок длины 4, будет больше или меньше 1.

	A	B	C	D	E	F
1		0,0024	=БИНОМРАСП(1;8;4/6;ЛОЖЬ)			
2	Ответ:	0,9976	=1-B1			

36. Вероятность попадания стрелком в цель равна $\frac{1}{12}$. Сделано 132 выстрелов. Определите наивероятнейшее число попаданий в цель.

	A	B	C	D	E	F
1		132				
2	0	1,028E-05	=БИНОМРАСП(A2;132;1/12;ЛОЖЬ)			
3	1	0,0001233	=БИНОМРАСП(A3;132;1/12;ЛОЖЬ)			
4	2	0,0007344	=БИНОМРАСП(A4;132;1/12;ЛОЖЬ)			
5	3	0,0028931	=БИНОМРАСП(A5;132;1/12;ЛОЖЬ)			
6	4	0,0084822	=БИНОМРАСП(A6;132;1/12;ЛОЖЬ)			
7	5	0,0197403				
8	6	0,0379851				
9	7	0,0621574				
10	8	0,0882918				
11	9	0,1105877				
12	10	0,1236572				
13	11	0,1246792		0,124679	=МАКС($B$2:$B$134)	
14	12	0,1142892				
15	13	0,095907				
16	14	0,07411				
17	15	0,0529999				

37. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0.4. Найдите вероятность того, что среди 104 выпущенных изделий ровно 62 изделий без брака.

	A	B	C	D	E	F	G
1	0,079596836	=НОРМ.РАСП(62;104*0,6;КОРЕНЬ(104*0,6*(1-0,6));ЛОЖЬ)					

38. Вероятность выпуска бракованного изделия равна $p = \frac{7}{20}$. Найдите вероятность P того, что среди $n = 108$ выпущенных изделий будет хотя бы одно, но не более $s = 37$ бракованных изделий.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	P_{104}(1<=k<=37)	0,4799126	=БИНОМ.РАСП(37;108;7/20;ИСТИНА)-БИНОМ.РАСП(1;108;7/20;ИСТИНА)							

39. Всхожесть семян данного растения равна 90%. Найдите вероятность P того, что из 1200 посаженных семян число проросших семян заключено между 1059 и 1099.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
5	P_{1200}(1059<k<1099)	0,9457625	=БИНОМ.РАСП(1099;1200;0,9;ИСТИНА)-БИНОМ.РАСП(1059;1200;0,9;ИСТИНА)							

40. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0.001 . Найдите вероятность P того, что в течение одной минуты обрыв произойдет более чем на 2 веретенах.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
9	P_{1000}(k>2)	0,0802093	=БИНОМ.РАСП(1000;1000;0,001;ИСТИНА)-БИНОМ.РАСП(2;1000;0,001;ИСТИНА)								

41. Завод отправил на базу 2000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0.001 . Какова вероятность P того, что на базу поступят 3 некачественных изделия?

	A	B	C	D	E	F
13	P_{2000}(k=3)	0,1805373	=БИНОМ.РАСП(3;2000;0,001;ЛОЖЬ)			

42. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99.99% случаях. Определите вероятность P того, что из 10000 вакцинированных детей заболеют 1.

	A	B	C	D	E
16	n*p	1	=10000*0,0001		
17	P	0,3678794	=ПУАССОН.РАСП(1;1;ЛОЖЬ)		

Тема §6.Распределение дискретной случайной величины

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество всех ее возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счетно. Вероятность попадания X в какое-либо множество $B \subseteq \mathbb{R}$ находится по формуле

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p_i,$$

где $p_i = P(X = x_i)$ − вероятность i-го возможного значения.

Определение. *Набор пар* $\{(x_k, p_k), k = 1, 2, \ldots\}$ *называется* **распределением вероятностей** (*или просто* **распределением**) *дискретной случайной величины.*

Законом распределения *случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.*

Задача №1. Случайная величина X принимает только целые значения 1,2,...28. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: P(X=k)=ck. Найдите значение константы c и вероятность P(X>2)

Решение. Имеем

$$1 = \sum_{k=1}^{28} P(X = k) = \sum_{k=1}^{28} c \cdot k = c\frac{28 \cdot 29}{2} = 406 \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{406}.$$

Далее, вероятность $P(X > 2)$ равна

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$1 - (c + 2c) = 1 - 3c = 1 - 3\frac{1}{406} = \frac{403}{406} \approx 0,993.$$

Ответ: $c = \frac{1}{406}; P(X > 2) = 0,993.$

Тема §7.Независимые дискретные случайные величины

Определение. *Дискретные случайные величины* X_1 *и* X_2 *называются* **независимыми**, *если для любых значений* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство*

$$\mathsf{P}\left(\{X_1 = a_1\} \cdot \{X_2 = a_2\}\right) = \mathsf{P}\left(\{X_1 = a_1\}\right) \cdot \mathsf{P}\left(\{X_2 = a_2\}\right).$$

Другими словами, независимость случайных величин означает, что для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ события $\{X_1 = a_1\}$ и $\{X_2 = a_2\}$ независимы.

Для независимых случайных величин закон распределения любой из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Задача №1. Независимые дискретные случайные величины X,Y принимают только целые значения: X от −6 до 5 с вероятностью 1 /12, Y от −6 до 9 с вероятностью 1/ 16. Найдите вероятность P(XY=0).

Решение. Используя: а) правило сложения вероятностей; б) независимость случайных величин X и Y, имеем

$$P(XY=0)\overset{\text{а}}{=}P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0,Y=0)=$$

$$\overset{\text{б}}{=}P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0)\cdot P(Y=0)=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{16}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{16}=\frac{9}{64}\approx 0,141.$$

Ответ: 0,141.

Задача №2. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X–от 1 до 13 с вероятностью 1 /13, Y–от 1 до 9 с вероятностью 1 / 9, Z–от 1 до 7 с вероятностью 1/ 7. Найдите вероятность P (X<Y<Z).

Решение. Используя: **а)** попарную несовместность событий $\{X = k, Y = l, Z = m\}$ при различных k, l, m; **б)** независимость событий $\{X = k\}$, $\{Y = l\}$, $\{Z = m\}$, находим

$$P(X < Y < Z) \overset{\text{а}}{=} \sum_{1 \leqslant k < l < m \leqslant 7} P(X = k, Y = l, Z = m) =$$

$$\overset{\text{б}}{=} \sum_{1 \leqslant k < l < m \leqslant 7} P(X = k) \cdot P(Y = l) \cdot P(Z = m) =$$

$$= C_7^3 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} = \frac{C_7^3}{13 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{35}{819} \approx 0{,}0427.$$

При подсчете количества слагаемых в последней сумме мы использовали тот факт, что число троек (k, l, m), для которых $1 \leqslant k < l < m \leqslant 7$, совпадает с числом способов выбора трех различных чисел из множества $\{1, 2, \ldots, 7\}$.

Ответ: $0{,}0427$.

Задача №3. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X–от 0 до 7, Y–от 0 до 10, Z–от 0 до 13. Найдите вероятность P(X+Y+Z= 4), если известно, что возможные значения X, Y и Z равновероятны

Решение. Поскольку возможные значения X, Y и Z равновероятны, имеем:

$$P(X=k)=\frac{1}{8}, k=0,1,\ldots,7,$$

$$P(Y=l)=\frac{1}{11}, l=0,\ldots,10,$$

$$P(Z=m)=\frac{1}{14}, m=0,\ldots,13.$$

С учетом: **а)** попарной несовместности событий $\{X=k, Y=l, Z=m\}$ при различных k,l,m; **б)** независимости событий $\{X=k\}$, $\{Y=l\}$, $\{Z=m\}$, находим

$$P(X+Y+Z=4)\overset{\text{а}}{=}\sum_{k+l+m=4}P(X=k,Y=l,Z=m)=$$

$$\overset{\text{б}}{=}\sum_{k+l+m=4}P(X=k)\cdot P(Y=l)\cdot P(Z=m)=$$

$$=C_6^2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{14}=\frac{C_6^2}{1232}=\frac{15}{1232}\approx 0{,}0122.$$

Тема §8.Математическое ожидание дискретной случайной величины

Основной характеристикой положения случайной величины на числовой оси является ее *математическое ожидание* $\mathsf{E}(X)$.

Определение. Математическим ожиданием *или* **средним значением** *дискретной случайной величины* X *с законом распределения*

X	x_1	x_2	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$

называется число

$$\mathsf{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots = \sum_i x_i p_i. \qquad (5.1)$$

Замечание. Для математического ожидания часто используется еще одно обозначение: $M(X)$.

Свойства математического ожидания:

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно ей самой*: $\mathsf{E}(C) = C$, *если C — константа.*

2. *Постоянный множитель C можно выносить за знак математического ожидания*: $\mathsf{E}(CX) = C \cdot \mathsf{E}(X)$.

$\triangleright$ Первые два свойства непосредственно следуют из определения математического ожидания. $\triangleleft$

3. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий*:

$$\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y).$$

4. *Если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению отдельных математических ожиданий*:

$$\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y).$$

Задача №1. Независимые случайные величины X1,X2,..., X 8 принимают только целые значения −9,−8,...,6,7. Найдите математическое ожидание E(X1*X2···*X8), если известно,что возможные значения равновероятны.

Решение. Сначала найдем математическое ожидание какой-нибудь одной случайной величины X_k:

$$E(X_k) = \frac{1}{17} \cdot (-9 - 8 - \ldots - 0 + 1 + 2 + \ldots 7) = -1.$$

Используя свойства математического ожидания, находим

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_8) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_8) = [E(X_k)]^8 = (-1)^8 = 1.$$

Ответ: 1.

Задача №2. Независимые случайные величины X1,...,X5 могут принимать только значения 0 и 1. При этом P(Xi=0)=0,4,i=1,...5. Найдите математическое ожидание $E[4^{X_1+\ldots+X_5}]$.

Решение. Для одной случайной величины X_k имеем

$$E[4^{X_k}] = 4^0 \cdot 0,4 + 4^1 \cdot 0,6 = 2,8.$$

Тогда, используя, что $4^{X_1}, \ldots, 4^{X_5}$ – независимые случайные величины, находим

$$E[4^{X_1+\ldots+X_5}] = E[4^{X_1}] \cdots E[4^{X_5}] = \left(E[4^{X_k}]\right)^5 = (2,8)^5 \approx 172,1.$$

Ответ: 172,1.

Тема §9.Дисперсия дискретной случайной величины

Основной характеристикой рассеяния (разброса, уклонения от среднего) случайной величины является ее *дисперсия*.

Определение. Дисперсией *случайной величины* X *называется число*

$$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left([X - \mathsf{E}(X)]^2\right) = \sum_i \left(x_i - \mathsf{E}(X)\right)^2 p_i. \tag{5.2}$$

Другими словами, дисперсия — это математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины.

Замечание. Еще одно используемое обозначение для дисперсии: $Var(X)$.

Свойства дисперсии:

1. *Дисперсия принимает только неотрицательные значения*:

$$\mathsf{D}(X) \geqslant 0.$$

2. *Дисперсия постоянной величины равна нулю*:

$$\mathsf{D}(C) = 0.$$

3. *Справедлива формула*

$$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2.$$

4. *При умножении случайной величины X на постоянное число C ее дисперсия умножается на C^2:*

$$\mathsf{D}(CX) = C^2\,\mathsf{D}(X).$$

5. *Если к случайной величине прибавить константу C, то дисперсия не изменится:*

$$\mathsf{D}(X + C) = \mathsf{D}(X).$$

6. *Если случайные величины X и Y независимы, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых,*

$$\mathsf{D}(X + Y) = \mathsf{D}(X) + \mathsf{D}(Y).$$

Теорема. *Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y вычисляется по формуле*

$$\mathsf{D}(XY) = \mathsf{D}(X)\,\mathsf{D}(Y) + [\mathsf{E}(X)]^2\,\mathsf{D}(Y) + [\mathsf{E}(Y)]^2\,\mathsf{D}(X).$$

Следствие. *Если случайные величины X и Y независимые и центрированные (т. е. $\mathsf{E}(X) = \mathsf{E}(Y) = 0$), то*

$$\mathsf{D}(XY) = \mathsf{D}(X)\,\mathsf{D}(Y).$$

Квадратный корень из дисперсии $\sigma_x = \sqrt{\mathsf{D}(X)} \geqslant 0$ имеет размерность самой случайной величины и носит название **стандартного отклонения** (или *среднего квадратического отклонения*).

Стандартизованные случайные величины. Случайная величина Y называется **стандартизованной**, если ее математическое ожидание равно нулю, а дисперсия — единице:

$$\mathsf{E}(Y) = 0; \quad \mathsf{D}(Y) = 1.$$

Закон распределения такой случайной величины называется **стандартным**.

От любой случайной величины X можно перейти к стандартизованной случайной величине Y с помощью линейного преобразования:

$$Y = \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sigma_x}.$$

Пример 29. *Распределение случайной величины X задано таблицей*

X	4	8	11	14	18
P	0,1	0,25	0,3	0,25	0,1

Найдите математическое ожидание $m = E(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $P(|X - m| < \sigma)$.

Решение. По определению математического ожидания и свойства дисперсии имеем:

$$m = E(X) = 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,25 + 11 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,25 + 18 \cdot 0,1 = 11;$$
$$E(X^2) = 4^2 \cdot 0,1 + 8^2 \cdot 0,25 + 11^2 \cdot 0,3 + 14^2 \cdot 0,25 + 18^2 \cdot 0,1 = 135,3;$$
$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 135,3 - 11^2 = 14,3.$$

Следовательно, стандартное отклонение равно

$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{14,3} \approx 3,782.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(|X - m| < \sigma) = P(|X - 11| < 3,782) = P(7,218 < X < 14,782) =$$
$$= P(X = 8) + P(X = 11) + P(X = 14) = 0,25 + 0,3 + 0,25 = 0,8.$$

Ответ: $m = 11$; $\sigma = 3,782$; $P(|X - m| < \sigma) = 0,8$.

Пример 30. *Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X=0)=0,9$, $P(Y=0)=0,3$. Найдите математическое ожидание $E[(X-Y)^2]$.*

Решение. Сначала найдем математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

$$E(X)=0\cdot 0,9+1\cdot 0,1=0,1;\quad E(Y)=0\cdot 0,3+1\cdot 0,7=0,7;$$
$$E(X^2)=0^2\cdot 0,9+1^2\cdot 0,1=0,1;\ E(Y^2)=0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,7=0,7;$$
$$D(X)=0,1-(0,1)^2=0,09;\quad D(Y)=0,7-(0,7)^2=0,21.$$

Тогда, используя свойства дисперсии, находим:

$$E[(X-Y)^2]=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2=$$
$$=D(X)+D(Y)+[E(X)-E(Y)]^2=$$
$$=0,09+0,21+(0,1-0,7)^2=0,66.$$

Ответ: 0,66.

Тема §10.Числовые характеристики основных дискретных законов распределения

Вырожденное распределение

Определение. *Случайная величина X имеет* **вырожденное распределение**, *если существует такая константа C, что*

$$\mathsf{P}(\{X = C\}) = 1.$$

Числовые характеристики:

$$\mathsf{E}(X) = C; \quad \mathsf{D}(X) = 0.$$

Распределение Бернулли

Определение. *Случайная величина X имеет* **распределение Бернулли с параметром** p, где $p \in (0; 1)$, *если она принимает два значения*: 1 — *с вероятностью p и 0 — с вероятностью $q = 1 - p$.*

Для бернуллиевской случайной величины с параметром p:

$$\mathsf{E}(X) = p; \quad \mathsf{D}(X) = pq.$$

Распределение Бернулли является математической моделью опыта с двумя исходами.

Биномиальное распределение

Определение. *Случайная величина* X *имеет* **биномиальный закон распределения с параметрами** n **и** p, где $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0; 1)$, *если она принимает значения* $0, 1, \ldots, n$ *с вероятностями*

$$\mathsf{P}\left(\{X = k\}\right) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n; \quad q = 1 - p. \tag{6.2}$$

Теорема. Для биномиальной случайной величины $X \sim Bin(n; p)$:

$$\mathsf{E}(X) = np; \quad \mathsf{D}(X) = npq.$$

Геометрическое распределение

Определение. *Случайная величина* X *имеет* **геометрическое распределение с параметром** p, где $p \in (0; 1)$, *если она принимает значения* $1, 2, \ldots, k, \ldots$ *с вероятностями*

$$\mathsf{P}\left(\{X = k\}\right) = q^{k-1} p, \quad q = 1 - p, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

1. Иногда под геометрическим распределением понимают закон распределения случайной величины, равной числу испытаний, которые необходимо провести, прежде чем появится первый успех (см. ниже задачу 6.6).

2. *Распределение Паскаля* (*отрицательное биномиальное распределение*). Это распределение дискретной случайной величины, равной числу испытаний, которые необходимо провести, прежде чем появится k-й успех (k — произвольное целое положительное число). (См. ниже задачу 6.17.)

Для случайной величины $X \sim Geom(p)$:

$$\psi_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}; \quad \mathsf{E}(X) = \frac{1}{p}; \quad \mathsf{D}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Распределение Пуассона

Определение. *Случайная величина имеет* **распределение Пуассона с параметром** λ, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, *если она принимает значения* $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ *с вероятностями*

$$\mathsf{P}\left(\{X = k\}\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.4}$$

Тот факт, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром λ, будем обозначать следующим образом: $X \sim \Pi(\lambda)$.

Для случайной величины $X \sim \Pi(\lambda)$:

$$\mathsf{E}(X) = \lambda; \quad \mathsf{D}(X) = \lambda.$$

Теорема. Наиболее вероятное значение k_0 случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром λ, удовлетворяет неравенствам:

$$\lambda - 1 \leqslant k_0 \leqslant \lambda.$$

6.8. Гипергеометрическое распределение

Гипергеометрический закон распределения представляет собой закон распределения числа удачных выборок из конечной совокупности.

Определение. *Случайная величина* X *имеет* **гипергеометрическое распределение с параметрами** N**,** M**,** n*, где* N, M, $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N$, *если она принимает значения* $1, 2, \ldots, k$ *с вероятностями*:

$$\mathsf{P}\left(\{X = m\}\right) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{6.5}$$

Тот факт, что случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами N, M, n, будем обозначать следующим образом: $X \sim GG(N; M; n)$.

Для случайной величины $X \sim GG(N; M; n)$:

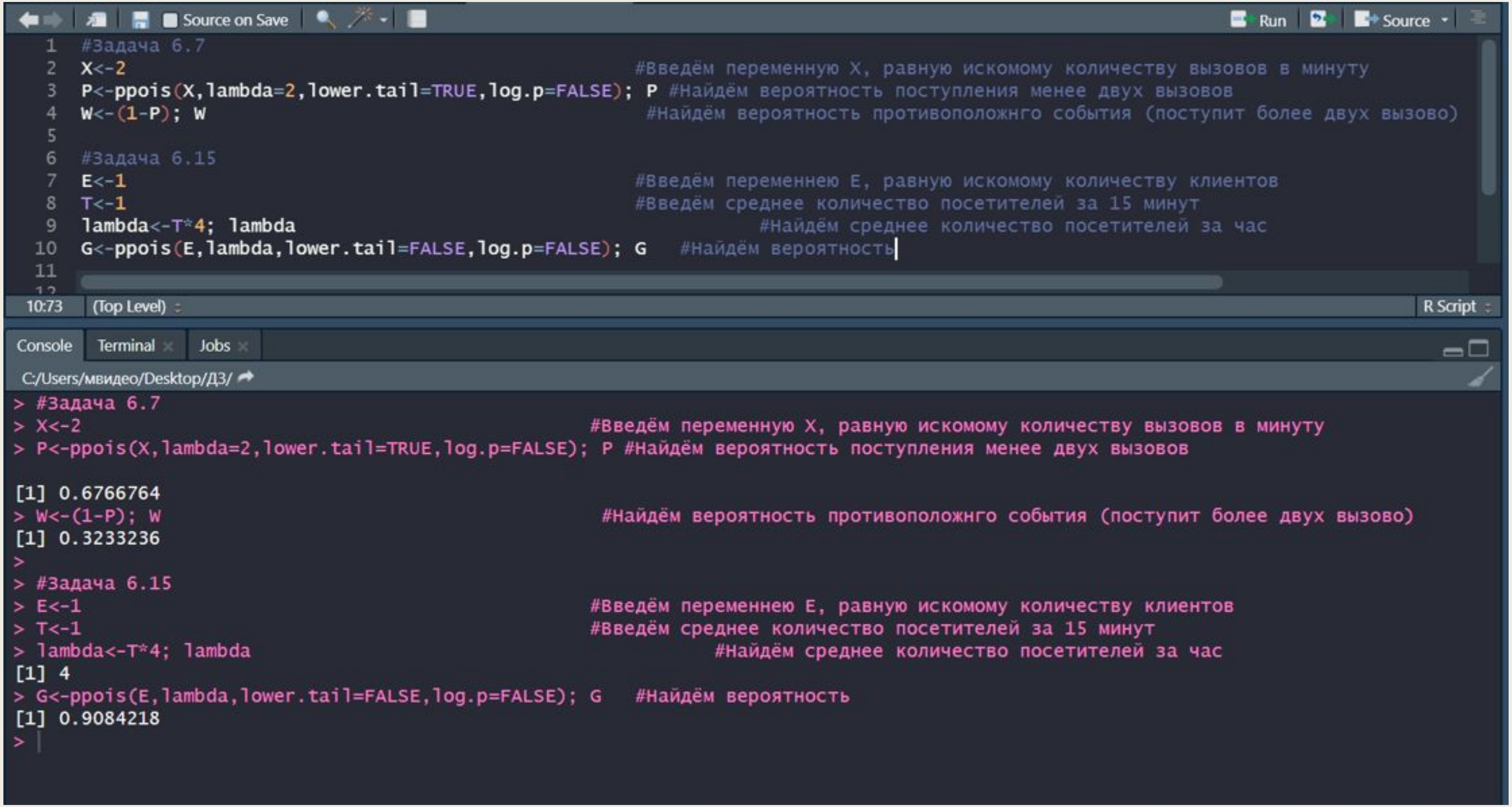
$$\mathsf{E}(X) = \frac{nM}{N}; \quad \mathsf{D}(X) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}. \tag{6.6}$$

6.7. На телефонную станцию в среднем поступает 2 вызова в минуту. Найдите вероятность того, что за минуту поступит более двух вызовов.

≈0,323

6.15. На станции автосервиса в среднем каждые 15 минут оформляет заказ один клиент. Какова вероятность р того, что в течение часа заказ сделают более одного клиента? Предполагается, что количество заказов, поступающих в единицу времени, имеет распределение Пуассона.

≈ 0,908


Source on Save
Run
Source
#Задача 6.7
X<-2 #Введём переменную X, равную искомому количеству вызовов в минуту
P<-ppois(X,lambda=2,lower.tail=TRUE,log.p=FALSE); P #Найдём вероятность поступления менее двух вызовов
W<-(1-P); W #Найдём вероятность противоположнго события (поступит более двух вызово)
#Задача 6.15
E<-1 #Введём переменнею E, равную искомому количеству клиентов
T<-1 #Введём среднее количество посетителей за 15 минут
lambda<-T*4; lambda #Найдём среднее количество посетителей за час
G<-ppois(E,lambda,lower.tail=FALSE,log.p=FALSE); G #Найдём вероятность
10:73
(Top Level)
R Script
Console
Terminal
Jobs
C:/Users/мвидео/Desktop/ДЗ/
> #Задача 6.7
> X<-2 #Введём переменную X, равную искомому количеству вызовов в минуту
> P<-ppois(X,lambda=2,lower.tail=TRUE,log.p=FALSE); P #Найдём вероятность поступления менее двух вызовов
[1] 0.6766764
> W<-(1-P); W #Найдём вероятность противоположнго события (поступит более двух вызово)
[1] 0.3233236
>
> #Задача 6.15
> E<-1 #Введём переменнею E, равную искомому количеству клиентов
> T<-1 #Введём среднее количество посетителей за 15 минут
> lambda<-T*4; lambda #Найдём среднее количество посетителей за час
[1] 4
> G<-ppois(E,lambda,lower.tail=FALSE,log.p=FALSE); G #Найдём вероятность
[1] 0.9084218
>

Тема §12. Абсолютно непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

Для описания закона распределения случайной величины любого типа используется *функция распределения*.

Определение. Пусть X — случайная величина произвольного типа. **Функцией распределения** *случайной величины* X *называется функция* $F(x)$, *значение которой в точке* x *равно вероятности события* $\{X < x\}$:

$$F(x) = \mathsf{P}\left(\{X < x\}\right). \tag{7.1}$$

Свойства функции распределения:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Это свойство выполняется в силу того, что число $F(x)$ представляет собой вероятность некоторого события. $\triangleleft$

2. $F(x)$ — *неубывающая функция, т. е.* $F(x_2) \geqslant F(x_1)$ *при* $x_2 > x_1$.

Определение. *Случайная величина* X *называется* **непрерывной**, *если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.*

Определение. Плотностью распределения (*или* **функцией плотности**) $f(x)$ *непрерывной случайной величины* X *называется производная ее функции распределения*

$$f(x) = F'(x). \tag{7.4}$$

Нахождение математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины X в общем случае сводится к вычислению несобственного интеграла

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

5. Показательное распределение

Для случайной величины $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ функция распределения $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$. Обратная функция:

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y).$$

Если выбирается псевдослучайное число $Y \sim U(0; 1)$, то случайная величина $F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$ будет подчиняться показательному закону с параметром λ.

1. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)=\frac{a}{e^{-2x}+e^{2x}}$.

Найдите константу a и вероятность $P(X>3)$.

Ответ: $a=\frac{4}{\pi}$, $P(X>3)=1-F(3)=1-\frac{2}{\pi}\arctan e^{6}\approx 0.001578$

```
A <- 1/integrate(f=function(x) {1/(exp(-2*x)+exp(2*x))},
lower=Inf, upper=Inf)$value;A
f <- function(x) {A/(exp(-2*x)+exp(2*x))}
P <- integrate(f=function(x) {A/(exp(-2*x)+exp(2*x))},
lower=3, upper=Inf)$value
P
```

2. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{18}x^2, \text{ если } |x|<a, \\ 0, \text{ если } |x|>a.\end{cases}$$

. Найдите a и $P(-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2})$.

Задание 2

Из условия нормированности находим

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{18}\int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{1}{18} * (\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3}) = \frac{1}{18} * \frac{2}{3} a^3 = \frac{1}{27} a^3$$

$=\gg a = 3$

Тогда искомая вероятность при а=3 равна:

$$P\left(-\frac{3}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{18}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 dx = \frac{1}{18} * \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3}\right) = \frac{1}{18} * (\frac{9}{8} + \frac{9}{8}) = \frac{1}{18} * \frac{9}{4} = \frac{1}{8}$$

3. Случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)=\begin{cases}1-e^{-8x}, & \text{если } x>0\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y=X^2$.

Задание 3

Выразим функцию распределения G(x) случайной величины Y=X^2 через функцию распределения F(x) случайной величины X.

$$G(x)=P(Y<x)=P(X^2<x)=\begin{cases}0, \text{если } x<0,\\ P(|X|)<\sqrt{x}), \text{если } x>0,\end{cases}=$$

$$\begin{cases}0, \text{если } x<0,\\ P(-\sqrt{x}<X<\sqrt{x}), \text{если } x>0,\end{cases}=$$

$$\begin{cases}0, \text{если } x<0,\\ F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x}), \text{если } x>0,\end{cases}=\begin{cases}0, \text{если } x<0,\\ (1-e^{-8\sqrt{x}})-0, \text{если } x>0,\end{cases}$$

Дифференцируя полученное равенство, находим плотность вероятности g(x) случайной величины Y=X^2.

$$g(x)=\frac{d}{d(x)}G(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<0,\\ \frac{4}{\sqrt{x}}e^{-8\sqrt{x}}, x>0\end{cases}$$