БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

Решение краевых задач для уравнения теплопроводности

3. Решение краевых задач уравнения теплопроводности для ограниченного стержня.

3.1. Область: $0 \le x \le l$. Первая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u(0,t) = \psi_1(t), & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Решение задачи выражается формулой:

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} sin(\lambda_n x)\, exp\left(-\lambda_n{}^2 a^2 t\right) M_n(t)\,, \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \;, \; (3.1.1)$$

$$M_n(t) = \int_0^l \varphi(s) sin(\lambda_n s) ds \; + a^2 \lambda_n \int_0^t exp\left(\lambda_n{}^2 a^2 \tau\right)[\psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau)] d\tau \,.$$

Замечание.

Используя соотношения для сумм бесконечных рядов [А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Матричев. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 799 с. (см. стр. 726)]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(ns)}{n}=\frac{\pi-s}{2}\quad(0<s<2\pi),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(ns)}{n}=\frac{s}{2}\quad(-\pi<s<\pi),$$

решение задачи можно преобразовать к следующему виду:

$$u(x,t)=\psi_1(t)+\frac{x}{l}[\psi_2(t)-\psi_1(t)]+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\lambda_n x)\exp\left(-a^2\lambda_n^2 t\right)R_n(t)\,,\qquad(3.1.2)$$

где

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{l}\ ,$$

Функция $R_n(t)$ **имеет вид:**

$$R_n(t) = \int_0^l \varphi(s)\sin(\lambda_n s)ds - \frac{1}{\lambda_n}exp\left(a^2{\lambda_n}^2 t\right)[\psi_1(t) - (-1)^n\psi_2(t)] +$$

$$+ a^2\lambda_n \int_0^t exp\left(a^2{\lambda_n}^2\tau\right)[\psi_1(\tau) - (-1)^n\psi_2(\tau)]d\tau = \qquad (3.1.2a)$$

$$= \int_0^l \varphi(s)\sin(\lambda_n s)ds - \frac{1}{\lambda_n}[\psi_1(0) - (-1)^n\psi_2(0)] -$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t exp\left(a^2{\lambda_n}^2\tau\right)[\psi_1'(\tau) - (-1)^n\psi_2'(\tau)]d\tau.$$

Штрих в ψ_1' **и** ψ_2' **означает производную по времени** τ**.**

Пример 1. **Область: $0 \le x \le l$. Первая краевая задача.**

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = u_0, & x \in [0; l]; \\ u(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t) = 0, & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Решение: Применим формулу (3.1.1):

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t\right) M_n(t),$$

Находим интеграл $M_k(t)$:

$$M_k(t) = u_0 \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) ds = -\frac{l\, u_0}{\pi n}\left[\cos(\pi k) - 1\right] = \frac{l\, u_0}{\pi k}\left[1 - (-1)^k\right] = \frac{2l\, u_0}{\pi k}\, \delta_{k,2n+1}$$

Вклад дают только нечётные множители. Подставляя в $u(x,t)$, получаем:

$$u(x,t) = \frac{4\,u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\,sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{l}\,x\right]\,exp\left[-\frac{\pi^2(2n+1)^2a^2}{l^2}\,t\right],$$

Пример 2. Область: $0 \le x \le l$. Первая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0,+\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0\,, & x \in [0;l]; \\ u(0,t) = \psi_1(t) = u_1, & t \in [0,+\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t) = u_2, & t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Решение. Применим формулу (3.1.2) с интегралом $R_n(t)$:

$$u(x,t) = \psi_1(t) + \frac{x}{l}[\psi_2(t) - \psi_1(t)] + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} sin(\lambda_n)\,exp(-a^2\lambda_n^2 t)\,R_n(t)\,,\quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}$$

Находим интеграл $R_n(t)$:

$$R_n(t) = \int_0^l \varphi(s) sin(\lambda_n s) ds - \frac{1}{\lambda_n}[\psi_1(0) - (-1)^n \psi_2(0)] -$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t exp(a^2 {\lambda_n}^2 \tau)[\psi_1'(\tau) - (-1)^n \psi_2'(\tau)] d\tau =$$

Так как $\varphi(x) = 0$, а производные и тоже равны нулю, т.к. функции и постоянны во времени, то имеем:

$$R_n(t) = 0 - \frac{1}{\lambda_n}[u_1 - (-1)^n u_2] - 0 = \frac{l}{\pi n}[(-1)^n u_2 - u_1]$$

Подставляя в $u(x,t)$, получаем:

$$u(x,t) = u_1 + \frac{x}{l}[u_2 - u_1] + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n u_2 - u_1]}{n} sin(\lambda_n)\, exp(-a^2 \lambda_n^2 t), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}$$

3.2. Область: $0 \le x \le l$. Вторая краевая задача.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) & t \in [0, +\infty), \\ u_x(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

<u>Решение</u> :

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s)\, G(x,s,t)ds - a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) G(x,0,t-\tau)d\tau + a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) G(x,l,t-\tau)d\tau$$

где

$$G(x,s,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_n s) \exp\left(-\lambda_n^2 a^2 t\right), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}$$

3.3. Область: $0 \le x \le l$. Третья краевая задача ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$).

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u_x(0,t) - k_1\, u(0,t) = \psi_1(t) & t \in [0, +\infty), \\ u_x(l,t) - k_2\, u(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Решение :

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s)\, G(x,s,t)ds - a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) G(x,0,t-\tau)d\tau + a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) G(x,l,t-\tau)d\tau$$

Здесь

$$G(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(s) exp\left(-\mu_n^2\, a^2 t\right),$$

где

$$y_n(x) = cos(\mu_n x) + \frac{k_1}{\mu_n} sin(\mu_n x)\,, \qquad \|y_n\|^2 = \frac{k_2}{2\mu_n^2}\frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2}\right)$$

μ_n – положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{tg(\mu l)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}$$

3.4. Область: $0 \le x \le l$. Смешанные краевые задачи.

Вариант 1.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u(0,t) = \psi_1(t) & t \in [0, +\infty), \\ u_x(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Решение :

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s)\, G(x,s,t) ds + a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) \Lambda(x, t-\tau) d\tau + a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) G(x, l, t-\tau) d\tau$$

где

$$G(x,s,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} sin(\lambda_n x)\, sin(\lambda_n s) exp\left(-\lambda_n^2\, a^2 t\right), \qquad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}$$

$$\Lambda(x,t) = \frac{\partial}{\partial s} G(x,s,t)\Big|_{s=0}.$$

3.4. Область: $0 \le x \le l$. Смешанные краевые задачи.

Вариант 2.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0; l]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t), & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Решение :

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(s)\, G(x,s,t) ds - a^2 \int_0^t \psi_1(\tau) G(x,0,t-\tau) d\tau - a^2 \int_0^t \psi_2(\tau) H(x,t-\tau) d\tau$$

где

$$G(x,s,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} cos(\lambda_n x)\, cos(\lambda_n s) exp\left(-\lambda_n^2\, a^2 t\right), \qquad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}$$

$$H(x,t) = \frac{\partial}{\partial s} G(x,s,t)|_{s=l}.$$

Смешанные краевые задачи. Домашнее задание.

Пример 3-1.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l),\ t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = A, & x \in [0; l]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Пример 3-1.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l),\ t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0, & x \in [0; l]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) = A, & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Пример 3-1.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < l),\ t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0, & x \in [0; l]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t) = A, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Контрольная работа.

Решить следующие краевые (I и II -го рода) задачи для уравнения теплопроводности.

№ 1.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < \pi), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = u_0 + u_1 x, & x \in [0; \pi]; \\ u(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u(l,t) = \psi_2(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < \pi), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = u_0 + u_1 x, & x \in [0; \pi]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u_x(l,t) = \psi_2(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Решить следующие смешанные краевые задачи для уравнения теплопроводности.

№ 3А.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < \pi), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = u_0 + u_1 x, & x \in [0; \pi]; \\ u(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u_x(\pi,t) = \psi_2(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

№ 3В.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0 < x < \pi), \quad t \in (0, +\infty); \\ u(x,0) = \varphi(x) = u_0 + u_1 x, & x \in [0; \pi]; \\ u_x(0,t) = \psi_1(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u(\pi,t) = \psi_2(t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ