

Тема. Интерполирование и численное дифференцирование функций

Приближение функций – замена на интервале $[a, b]$ исходной функции $f(x)$ некоторой другой функцией $P(x)$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$$

Например: $\varphi_i(x) = \sin^i(x)$, $\varphi_i(x) = x^i$, и т.д.

Исходные данные: $x_i \in [a, b]$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, p$, $x_0 = a$, $x_p = b$.

Приближение функций

Тогда

$$f(x) = P(x) + R(x),$$

где $R(x)$ – остаточный член.

Применение: возможность вычислить $f(x) \approx P(x)$ при $x \neq x_i$, если:

1. аналитический вид $f(x)$ неизвестен;
- функция $f(x)$ имеет сложный вид.

Приближение функций

Классификация:

- Интерполяция. Критерий для определения c_i выглядит как $P(x_i) = y_i$ ($p \geq n$, обычно $p = n$);
- Аппроксимация ($p < n$). Критерий для определения c_i выглядит как

$$\frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2} \xrightarrow{c_i} \min$$

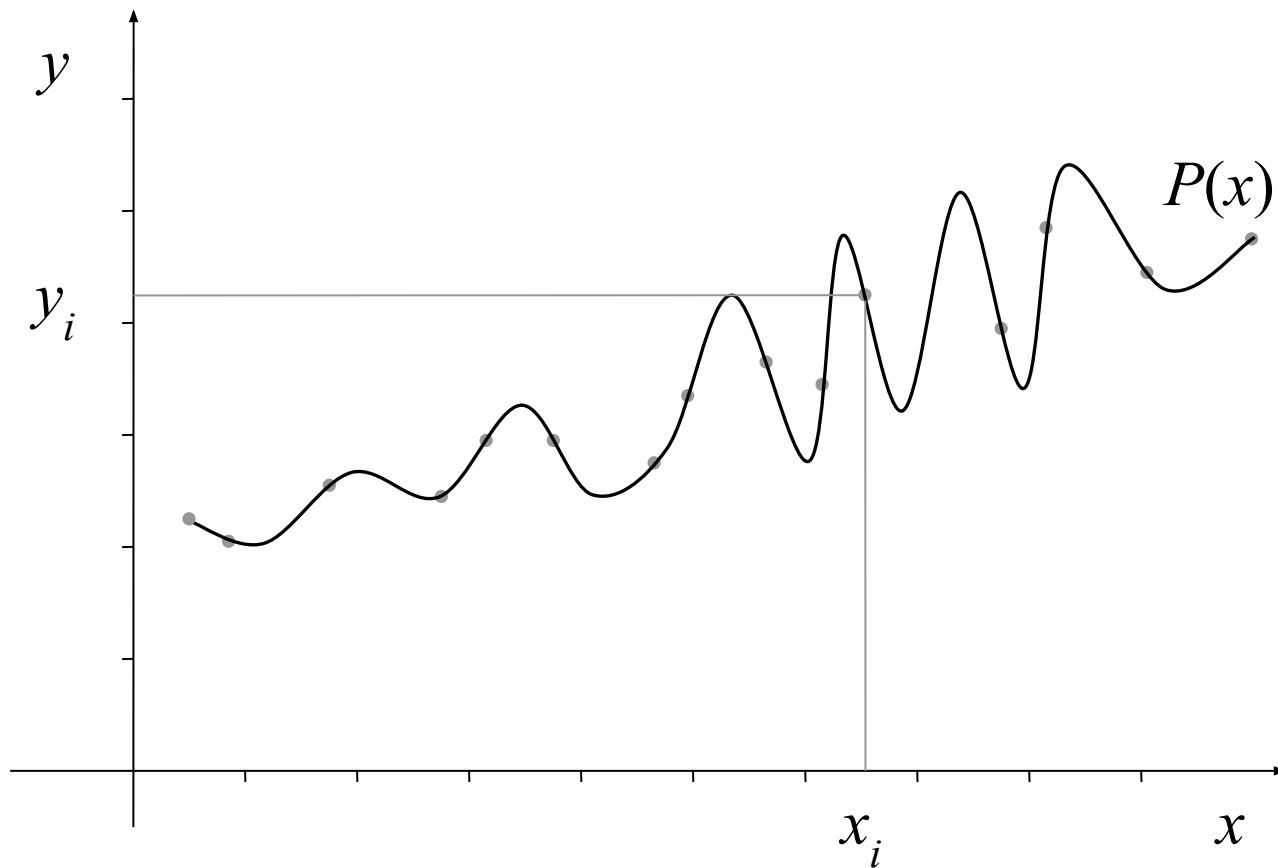
Приближение функций

Классификация:

- Экстраполяция – возможность вычислить $f(x) \approx P(x)$ при $x \notin [a, b]$.

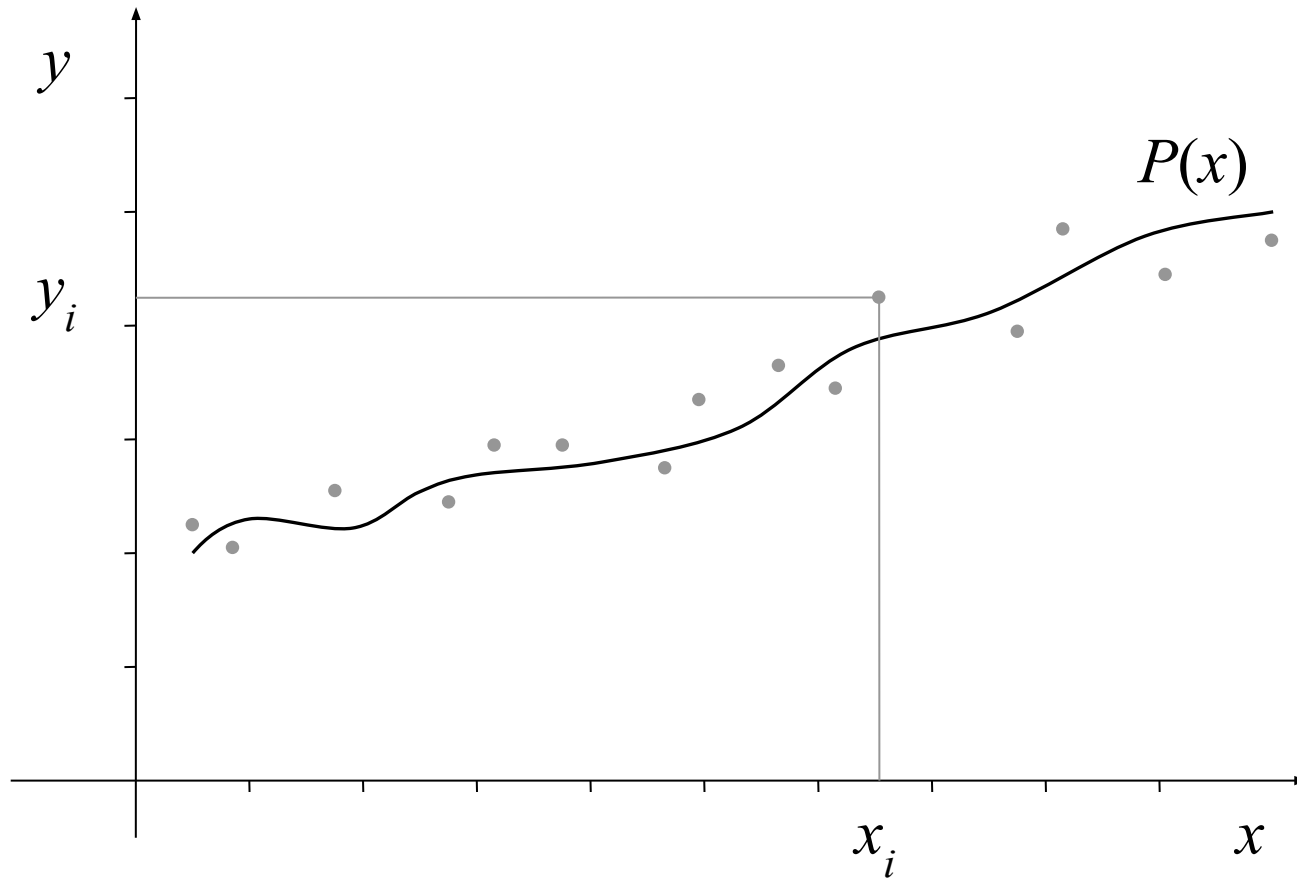
Приближение функций

Интерполяция:



Приближение функций

Аппроксимация:



Интерполирование функций

Постановка задачи:

$$p = n$$

Сетка (табличные значения функции):

$$\{x_i\}: x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n$$

$$x_0 = a, x_n = b$$

$$\{y_i\}: y_i = f(x_i)$$

Количество узлов – $n + 1$.

Интерполирование функций

Постановка задачи:

Равномерная сетка:

$$\{x_i\}: x_i = x_0 + i \cdot h, i = 0, 1, \dots, n$$

$$x_0 = a, x_n = b$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b - a}{n}.$$

Система линейно-независимых функций:

$$\varphi_i(x)$$

Интерполирование функций

Постановка задачи:

Требуется определить коэффициенты

$$c_i, i = 0, 1, \dots, n$$

таким образом, чтобы

$$P_n(x_i) = y_i$$

Для решения будем использовать степенные полиномы:

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i.$$

Интерполирование функций

Постановка задачи:

Для равномерной сетки

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

поэтому

$$\varphi_i(q) = q^i, \quad P_n(q) = \sum_{i=0}^n c_i q^i.$$

Полином Ньютона

$$c_i = [x_0, \dots, x_i], \quad \varphi_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0}^n \left([x_0, \dots, x_i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

Здесь $[x_i, \dots, x_j] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_j] - [x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$ —
разделенные разности $j-i$ -го порядка,

$$[x_i] = y_i$$

Полином Ньютона

Для равномерной сетки

$$c_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!}, \quad \varphi_i(q) = \prod_{j=0}^{i-1} (q - j),$$

$$\Rightarrow P_n(q) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (q - j) \right)$$

Здесь $\Delta^i y_j = \Delta^{i-1} y_{j+1} - \Delta^{i-1} y_j$, $\Delta^0 y_j = y_j$ — конечные разности $j-i$ -го порядка.

Полином Лагранжа

$$c_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}, \quad \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j),$$

$$\Rightarrow L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right) = \sum_{i=0}^n \left(y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Полином Лагранжа

Для равномерной сетки

$$c_i = (-1)^{n-i} \frac{y_i}{i!(n-i)!}, \quad \varphi_i(q) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (q-j),$$

$$\Rightarrow L_n(q) = \sum_{i=0}^n \left((-1)^{n-i} \frac{y_i}{i!(n-i)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (q-j) \right)$$

Численное дифференцирование функций

Постановка задачи:

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$$

Определить:

$$f^{(k)}(x) = (P(x) + R(x))^{(k)} = P^{(k)}(x) + R^{(k)}(x)$$

$$P^{(k)}(x) = \left(\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) \right)^{(k)} = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i^{(k)}(x)$$

Полином Ньютона

Первая производная для неравномерной сетки:

$$P'_n(x) = \sum_{i=0}^n \left([x_0, \dots, x_i] \cdot \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)' \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left([x_0, \dots, x_i] \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{i-1} (x - x_k) \right)$$

Полином Ньютона

Первая производная для равномерной сетки:

$$P'_n(q) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \left(\prod_{j=0}^{i-1} (q - j) \right)' \right) =$$
$$= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{i-1} (q - k) \right)$$

Полином Ньютона

Вторая производная для неравномерной сетки:

$$P_n''(x) = \sum_{i=0}^n \left([x_0, \dots, x_i] \cdot \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)'' \right) =$$
$$= \sum_{i=2}^n \left([x_0, \dots, x_i] \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{i-1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k \\ l \neq j}}^{i-1} \prod_{l=0}^{i-1} (x - x_l) \right)$$

Полином Ньютона

Вторая производная для равномерной сетки:

$$P_n''(q) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \left(\prod_{j=0}^{i-1} (q-j) \right)'' \right) =$$
$$= \frac{1}{h^2} \sum_{i=2}^n \left(\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{i-1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k \\ l \neq j}}^{i-1} \prod (q-l) \right)$$

Полином Лагранжа

Первая производная для неравномерной сетки:

$$L'_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right)' \right) =$$
$$= \sum_{i=0}^n \left(\frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n (x - x_k) \right)$$

Полином Лагранжа

Первая производная для равномерной сетки:

$$L'_n(q) = \sum_{i=0}^n \left((-1)^{n-i} \frac{y_i}{i!(n-i)!} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (q-j) \right)' \right) =$$
$$= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \left((-1)^{n-i} \frac{y_i}{i!(n-i)!} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n (q-k) \right)$$

Полином Лагранжа

Вторая производная для неравномерной сетки:

$$L_n''(x) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right)'' \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^n \left(\frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i \\ l \neq j \\ l \neq k}}^n (x - x_l) \right)$$

Примеры

Полином Ньютона.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

i	0	1	2	3
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Результатирующая сетка: $\{1/4, 9/4, 25/4\}$

Далее строим полином $P_3(x)$.

Примеры

Полином Ньютона.

Разделенные разности:

i	X	y	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, \dots, x_{i+2}]$	$[x_i, \dots, x_{i+3}]$
0	0	0	1	-1/6	1/60
1	1	1	1/3	-1/60	
2	4	2	1/5		
3	9	3			

$$[x_i, \dots, x_j] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_j] - [x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

Примеры

Полином Ньютона.

i	x	y	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, \dots, x_{i+2}]$	$[x_i, \dots, x_{i+3}]$
0	0	0	1	$-1/6$	$1/60$
1	1	1	$1/3$	$-1/60$	
2	4	2	$1/5$		
3	9	3			

Результат:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0 + 1 \cdot (x - 0) - \frac{1}{6}(x - 0)(x - 1) + \frac{1}{60}(x - 0)(x - 1)(x - 4) = \\ &= x - \frac{1}{6}x(x - 1) + \frac{1}{60}x(x - 1)(x - 4) \end{aligned}$$

Примеры

Полином Ньютона.

$$P_3(x) = x - \frac{1}{6}x(x-1) + \frac{1}{60}x(x-1)(x-4)$$

Проверка:

$$P_3(0) = 0; \quad P_3(1) = 1; \quad P_3(4) = 4 - \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 = 4 - 2 = 2;$$

$$P_3(9) = 9 - \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 8 + \frac{1}{60} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 = 9 - 12 + 6 = 3$$

Примеры

Полином Ньютона.

$$P_3(x) = x - \frac{1}{6}x(x-1) + \frac{1}{60}x(x-1)(x-4)$$

Значения в узлах результирующей сетки:

$$P_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) + \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 4\right) = \frac{75}{256} \approx 0.293$$

$$P_3\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{9}{4} - 1\right) + \frac{1}{60} \cdot \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{9}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{9}{4} - 4\right) = \frac{435}{256} \approx 1.699$$

$$P_3\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{25}{4} - 1\right) + \frac{1}{60} \cdot \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{25}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{25}{4} - 4\right) = \frac{515}{256} \approx 2.012$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

i	0	1	2	3
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Результирующая сетка: $\{1/4, 9/4, 25/4\}$

Далее строим полином $L_3(x)$.

Примеры

Полином Лагранжа.

i	0	1	2	3
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

$$c_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

$$c_0 = \frac{0}{(0-1)(0-4)(0-9)} = 0; \quad c_1 = \frac{1}{(1-0)(1-4)(1-9)} = \frac{1}{24};$$

$$c_2 = \frac{2}{(4-0)(4-1)(4-9)} = -\frac{1}{30}; \quad c_3 = \frac{3}{(9-0)(9-1)(9-4)} = \frac{1}{120}$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$c_0 = 0; \quad c_1 = \frac{1}{24}; \quad c_2 = -\frac{1}{30}; \quad c_3 = \frac{1}{120}$$

Результат:

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 0(x-1)(x-4)(x-9) + \frac{1}{24}(x-0)(x-4)(x-9) - \\ &\quad - \frac{1}{30}(x-0)(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}(x-0)(x-1)(x-4) = \\ &= \frac{1}{24}x(x-4)(x-9) - \frac{1}{30}x(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}x(x-1)(x-4) \end{aligned}$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$L_3(x) = \frac{1}{24}x(x-4)(x-9) - \frac{1}{30}x(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}x(x-1)(x-4)$$

Проверка:

$$L_3(0) = \frac{1}{24}0(0-4)(0-9) - \frac{1}{30}0(0-1)(0-9) + \frac{1}{120}0(0-1)(0-4) = 0$$

$$L_3(1) = \frac{1}{24}1(1-4)(1-9) - \frac{1}{30}1(1-1)(1-9) + \frac{1}{120}1(1-1)(1-4) = 1$$

$$L_3(4) = \frac{1}{24}4(4-4)(4-9) - \frac{1}{30}4(4-1)(4-9) + \frac{1}{120}4(4-1)(4-4) = 2$$

$$L_3(9) = \frac{1}{24}9(9-4)(9-9) - \frac{1}{30}9(9-1)(9-9) + \frac{1}{120}9(9-1)(9-4) = 3$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$L_3(x) = \frac{1}{24}x(x-4)(x-9) - \frac{1}{30}x(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}x(x-1)(x-4)$$

Значения в узлах результирующей сетки:

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 4\right) \left(\frac{1}{4} - 9\right) - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 9\right) + \\ &+ \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 4\right) = \frac{75}{256}; \quad L_3\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{9}{4} \left(\frac{9}{4} - 4\right) \left(\frac{9}{4} - 9\right) - \\ &- \frac{1}{30} \cdot \frac{9}{4} \left(\frac{9}{4} - 1\right) \left(\frac{9}{4} - 9\right) + \frac{1}{120} \cdot \frac{9}{4} \left(\frac{9}{4} - 1\right) \left(\frac{9}{4} - 4\right) = \frac{435}{256} \end{aligned}$$

Примеры

Полином Лагранжа.

$$L_3(x) = \frac{1}{24}x(x-4)(x-9) - \frac{1}{30}x(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}x(x-1)(x-4)$$

Значения в узлах результирующей сетки:

$$\begin{aligned} L_3\left(\frac{25}{4}\right) &= \frac{1}{24} \cdot \frac{25}{4} \left(\frac{25}{4} - 4\right) \left(\frac{25}{4} - 9\right) - \frac{1}{30} \cdot \frac{25}{4} \left(\frac{25}{4} - 1\right) \left(\frac{25}{4} - 9\right) + \\ &+ \frac{1}{120} \cdot \frac{25}{4} \left(\frac{25}{4} - 1\right) \left(\frac{25}{4} - 4\right) = \frac{515}{256} \end{aligned}$$

Примеры

Точность интерполяции:

x	$P(x)$	$L(x)$	$f(x)$	δ
1/4	0.293	0.293	0.5	41.4%
9/4	1.699	1.699	1.5	13.3%
25/4	2.012	2.012	2.5	19.5%

