Лекция №6

- ***Теорема 1.*** При сложении двух любых элементов линейного пространства L их координаты (относительно любого базиса пространства L) складываются; при умножении произвольного элемента на любое число $\boldsymbol{\lambda}$ все координаты этого элемента умножаются на $\boldsymbol{\lambda}$.

Определение. Линейное пространство L называется ***n – мерным***, если в нем существует n линейно независимых элементов, а любые $(\boldsymbol{n+1})$ элементов уже являются линейно зависимыми. При этом число n называется ***размерностью*** пространства L (и обозначается символом $\boldsymbol{dim\, L = n}$).

Определение. Линейное пространство L называется ***бесконечномерным***, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

Теорема 2. Если $\boldsymbol{L}$ – линейное пространство размерности $\boldsymbol{n}$, то любые $\boldsymbol{n}$ – линейно независимых элементов этого пространства образуют его базис.

Рассмотрим произвольную (необязательно квадратную) матрицу $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ размерности $\boldsymbol{m}$ на $\boldsymbol{n}$.

Определение. Минором $\boldsymbol{k}$-го порядка матрицы A называется определитель $\boldsymbol{k}$-го порядка с элементами, лежащими на пересечении любых $\boldsymbol{k}$ - фиксированных строк и $\boldsymbol{k}$ - столбцов матрицы A $(\boldsymbol{k \leq \min\{n, m\}})$.

Определение. Число r называется рангом матрицы A (будем обозначать $\boldsymbol{rang\ A = r}$), если выполняются два условия:

1) у матрицы A имеется минор r-го порядка, отличный от нуля;
2) всякий минор $(r + 1)$-го и более высокого порядка (если таковые существуют) равен нулю.

Такой минор r-го порядка матрицы A, отличный от нуля, называется базисным минором. Строки и столбцы матрицы A, на пересечении которых расположен базисный минор, называются базисными.

Способы вычисления ранга матрицы

.

Метод окаймления миноров

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор *k*-го порядка *D*, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры ***(k + 1)***-го порядка, окаймляющие минор *D* (т.е. содержащие его целиком внутри себя): если все они равны нулю, то ранг матрицы равен *k*.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Метод элементарных преобразований

▪ ***Теорема 3*** (о базисном миноре). Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы A являются линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Теорема 4. Определитель n-го порядка Δ равен нулю тогда и только тогда когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

Следствие. Ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы A.

Условие совместности системы линейных уравнений

Теорема 5 (***Кронекера-Капелли***). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов системы $\boldsymbol{A}$ равен рангу расширенной матрицы $\overline{\boldsymbol{A}}$, в которой к матрице $\boldsymbol{A}$ добавлен столбец свободных членов.

Путь отыскания всех решений системы линейных уравнений

- 1. Находим $\boldsymbol{rang\ A}$ и $\boldsymbol{rang\ \bar{A}}$.

  Если $\boldsymbol{rang\ A \neq rang\ \bar{A}}$, то система несовместна.

  Если $\boldsymbol{rang\ A = rang\ \bar{A}}$, то находим базисный минор матрицы A.

  2. Оставляем в системе только те уравнения, коэффициенты которых входят в базисный минор:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r} \end{cases}$$

- 3. Оставляем в левой части только те переменные, коэффициенты которых входят в базисный минор. Остальные переменные переносим в правую часть и объявляем свободными переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r - a_{rr}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

4.Решаем квадратную невырожденную систему **(2)** относительно свободных переменных, как параметров:

$$x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots,\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n).$$

- Тогда $(\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n}), \dots, \boldsymbol{f_r}(\boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n}), \boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ – общее решение системы линейных уравнений, $\boldsymbol{x_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ принимают произвольные значения.

Пример. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$