§19.Логарифмический вычет.

Пусть $f(z) \in C^{\infty}\left(\overline{g} \setminus z_1, \ldots, z_M\right)$

z_p *- полюса,* $f(\xi)\big|_{\xi \in \partial g} \neq 0$

Тогда $\forall\ \xi \in \partial g$ – ***правильная*** **и**

$\exists\ f(\xi)\big|_{\xi \in \partial g}$

<u>Определение</u>. Функция $\varphi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$

называется *логарифмической производной* функции *f*(*z*).

Выч$[\phi(z), z_k]$ **называются *логарифмическими вычетами***

z_k **:** z_n ***-нули*** $f(z)$ **и** $z_з$ ***-полюса*** $f(z)$ **.**

Выч$[\phi(z), z_k] = ?$

1) z_n – *нуль* **порядка** n

$$f(z)=(z-z_n)^n f_1(z), \quad f_1(z_n)\neq 0.$$

$$\varphi(z)=\frac{n}{(z-z_n)}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

$$\text{Выч}[\varphi(z), z_n]=n$$

2) z_p – *полюс* **порядка** p

$$f(z)=\frac{f_2(z)}{\left(z-z_p\right)^p},\quad f_2\left(z_p\right)\neq 0.$$

$$\varphi(z)=\frac{-p}{\left(z-z_p\right)}+\frac{f_2'(z)}{f_2(z)}$$

$$\text{Выч}\left[\varphi(z),z_p\right]=-p$$

<u>Теорема 19.1</u> Если $f(z) \in C^{\infty}\left(\overline{g} \setminus z_1, \ldots, z_M\right)$

z_p **- *полюса,*** $f(\xi)\big|_{\xi \in \partial g} \neq 0$ **, то**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = N - P,$$

где *N- полное число нулей f(z) с учетом кратности, P- полное число полюсов f(z) с учетом кратности.*

<u>Доказательство</u>. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\partial g^{+}} \varphi(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{M} Выч\left[\varphi(z), z_k\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{N} n_k - \sum_{k=1}^{P} n_p\right] = 2\pi i\left(N - P\right) \qquad \blacksquare$$

В частности, если $f(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^{+}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

Принцип аргумента.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial g^{+}}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial g^{+}}d\ln f(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial g^{+}}d\ln\left|f(\xi)\right|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial g^{+}}d\arg f(\xi)=$$

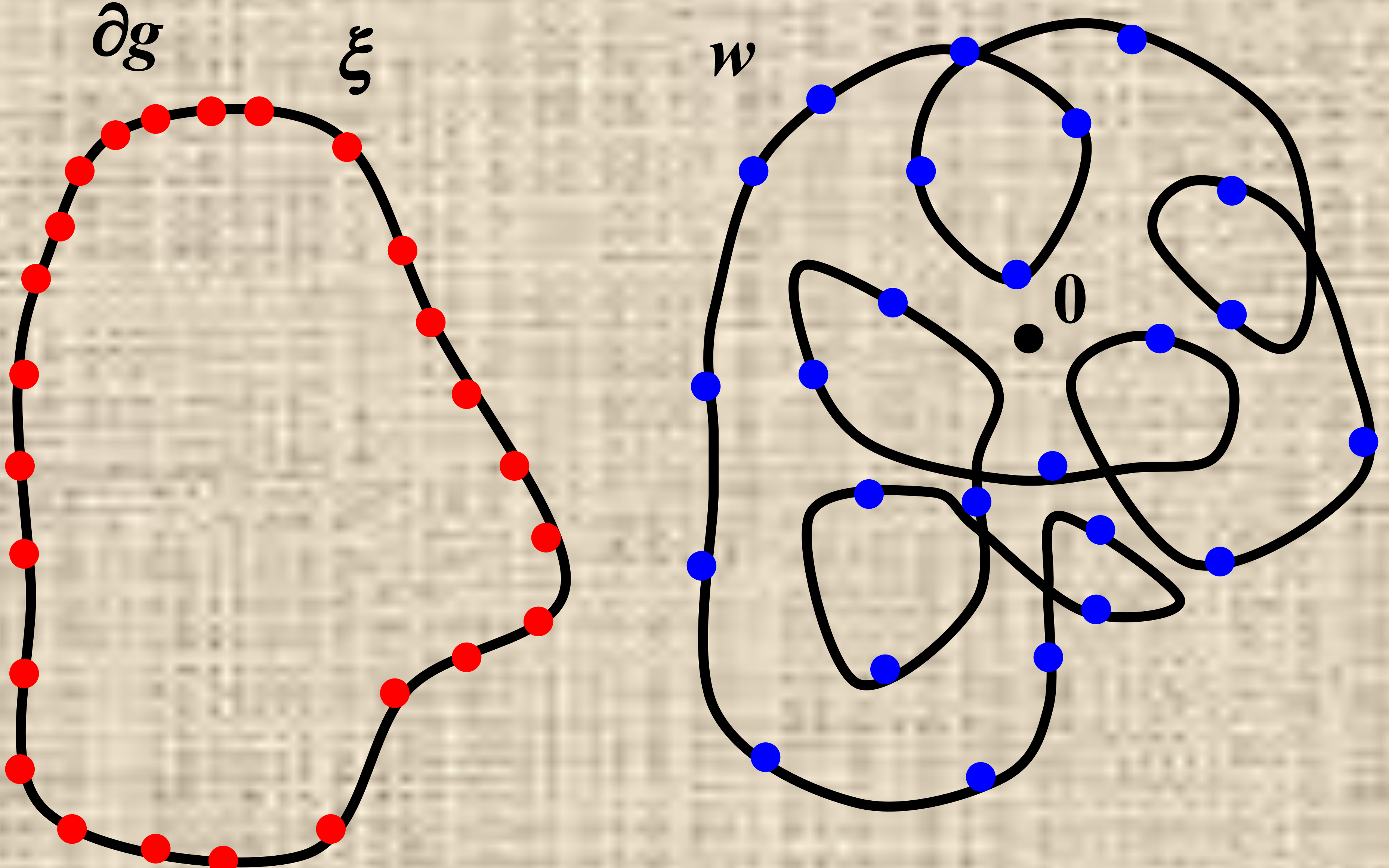
$$=\frac{1}{2\pi i}Var\left[\ln\left|f(\xi)\right|\right]_{\partial g^{+}}+\frac{1}{2\pi}Var\left[\arg f(\xi)\right]_{\partial g^{+}}$$

$\ln|f(\xi)|$ *действительная, однозначная*

$$\Rightarrow \quad Var\left[\ln|f(\xi)|\right]_{\partial g^+} = 0.$$

$$N - P = \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg f(\xi)\right]_{\partial g^+}$$

Геометрическая интерпретация



Принцип аргумента. Разность между полным числом нулей и полюсов функции $f(z)$ в области g определяется ***числом оборотов***, которое совершает точка $w=f(z)$ вокруг точки $w=0$, при ***положительном*** обходе точкой z контура ∂g.

Теорема Руше

Если $f(z), \varphi(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$

$\left|f(z)\right|_{\partial g} > \left|\varphi(z)\right|_{\partial g}$ **, то** $N[f+\varphi]_g = N[f]_g$

Доказательство. $f(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$

$\Rightarrow f(z)\big|_{\partial g}$ не имеет особых точек.

$\left|f(z)\right|_{\partial g} > \left|\varphi(z)\right|_{\partial g} \Rightarrow \left|f(z)\right|_{\partial g} \neq 0.$

$F(z) \equiv f(z) + \varphi(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$

$\Rightarrow F(z)\big|_{\partial g}$ не имеет особых точек.

$$\left|F(z)\right|_{\partial g}=\left|f(z)+\varphi(z)\right|_{\partial g}\geq\left|f(z)\right|_{\partial g}-\left|\varphi(z)\right|_{\partial g}>0$$

$$\Rightarrow f(z),\quad F(z)=f(z)+\varphi(z)\in T.19.1$$

$$\Rightarrow N[f+\varphi]_g=\frac{1}{2\pi}Var[\arg(f+\varphi)]_{\partial g}$$

$$N[f]_g=\frac{1}{2\pi}Var[\arg(f)]_{\partial g}$$

$$N[f+\varphi]_g-N[f]_g=$$

$$=\frac{1}{2\pi}Var[\arg(f+\varphi)-\arg(f)]_{\partial g}=\ (*)$$

$$z_1 = |z_1| e^{i \arg(z_1)}, \quad z_2 = |z_2| e^{i \arg(z_2)}$$

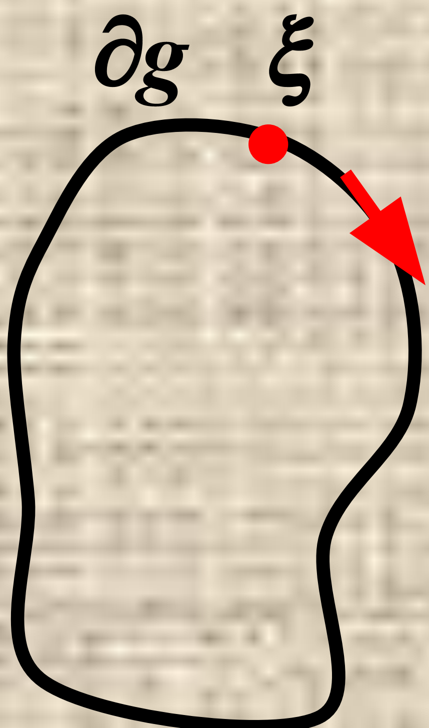
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg(z_1) - \arg(z_2))} \Rightarrow$$

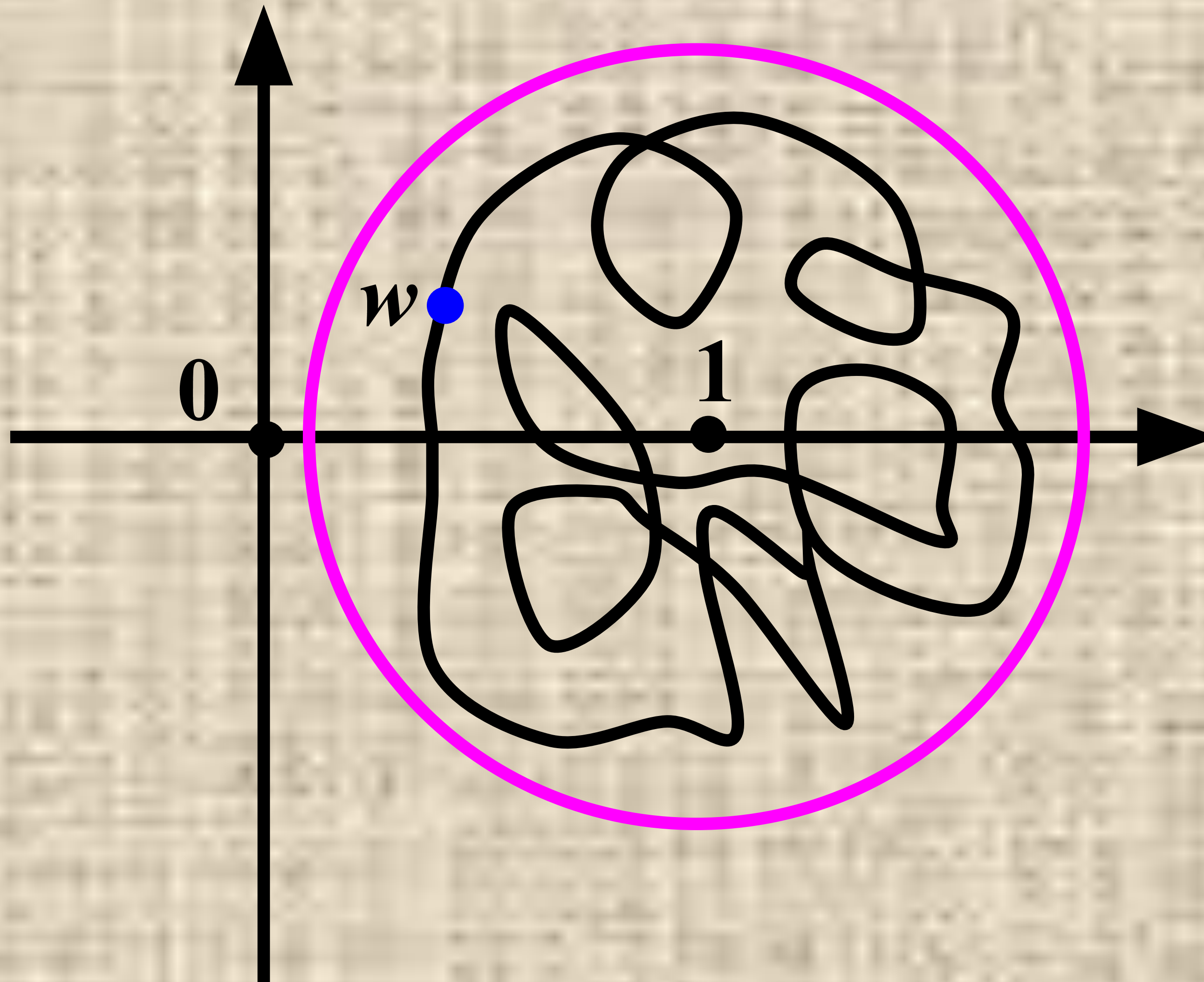
$$\arg(z_1) - \arg(z_2) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$(*) \ = \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\left(\frac{f+\varphi}{f}\right)\right]\Bigg|_{\partial g} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]\Bigg|_{\partial g}$$

$$w = 1 + \frac{\varphi}{f} \qquad w - 1 = \frac{\varphi}{f} \Rightarrow \qquad |w-1| = \frac{|\varphi|}{|f|} \le \rho < 1$$





$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]\Bigg|_{\partial g} = 0 \quad \blacksquare$$

Основная теорема высшей алгебры.

Полином n-ой степени имеет *на комплексной плоскости* ровно n нулей (*с учетом их кратности*).

Доказательство.

$$F(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0=$$

$$=f(z)+\varphi(z)$$

$$f(z)=a_n z^n \qquad \varphi(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0$$

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)}=\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1}+\dots+\frac{a_1}{a_n}z+\frac{a_0}{a_n}$$

$$\forall a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \quad \exists R_0 : \forall |z| = R > R_0$$

$$0 < \left|\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right|_{|z|=R} < 1 \Rightarrow \textit{т.Руше}$$

$$N[F]_{|z|=R} = N[f]_{|z|=R}$$

$$f(z) = a_n z^n \quad z = 0 - \textit{корень} \quad \textit{кр.} \quad n$$

$$\Rightarrow N[F]_{|z|=R} = N[f]_{|z|=R} = n \qquad \blacksquare$$