Лекция № 8

СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Летучка

(ПИШЕМ ТОЛЬКО ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ!)

1) Как найти координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); \quad B = (x_B, y_B, z_B);$$

$\overline{a} = \overline{AB} =$...

2) Формула для МОДУЛЯ ВЕКТОРА: $|\overline{a}| = \ldots$

3) Условие коллинеарности векторов

$\overline{a} = (a_x, a_y, a_z); \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$: ...

4) Формула сложения векторов в координатах : $\overline{a} + \overline{b} = \ldots$

5) Формула умножения вектора на число в координатах:

$$\lambda \cdot \overline{a} = \ldots$$

Летучка(ответы)

1) $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A);.$

2) $|\overline{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.$

3) $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = \lambda$

4) $\overline{a} + \overline{b} = \left(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\right);$

5) $\lambda \cdot \overline{a} = \left(\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z\right)$

СКАЛЯРНОЕ произведение векторов

Как найти координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); \quad B = (x_B, y_B, z_B);$$

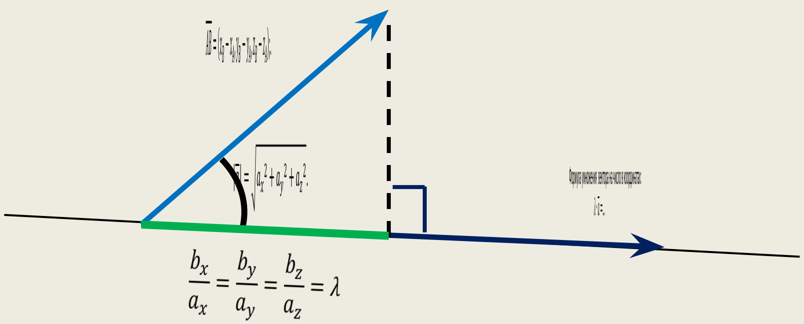
$\overline{a} = \overline{AB} = \ldots$

Формула для МОДУЛЯ ВЕКТОРА: $|\overline{a}| = \ldots$

Формула сложения векторов в координатах : $\overline{a} + \overline{b} = \ldots$

Условие коллинеарности векторов

$\overline{a} = (a_x, a_y, a_z); \overline{b} = (b_x, b_y, b_z) : \ldots$



Вспомним, что:

$\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z); \quad \text{пр}_{\,\overline{b}}\, \overline{a};$

$|\overline{b}| \cdot \cos\varphi = \quad \text{пр}_{\,\overline{a}}\, \overline{b};$

Тогда формуле скалярного произведения можно придать другой вид :

$$\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{b} = (\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\,\overline{a}}\, \overline{b} = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\,\overline{b}}\, \overline{a}$$

Свойства скалярного произведения

1. При ПЕРЕСТАНОВКЕ МНОЖИТЕЛЕЙ скалярное произведение НЕ ИЗМЕНЯЕТСЯ :

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a}) \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$$

2. ЧИСЛО МОЖНО ВЫНОСИТЬ за скалярное произведение :

$$(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$$

3. При скалярном умножении вектора на сумму векторов МОЖНО РАСКРЫТЬ СКОБКИ :

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$$

4. СКАЛЯРНЫЙ КВАДРАТ вектора(то есть скалярное произведение вектора на себя) равен КВАДРАТУ его ДЛИНЫ (МОДУЛЯ) :

$$\overline{a}^{\,2} = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| \cdot \cos 0 = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| \cdot 1 = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| = |\overline{a}|^2$$

ЗАМЕЧАНИЕ : поэтому если вектор $\overline{a}$ возвести СКАЛЯРНО в квадрат и затем извлечь КОРЕНЬ, то получим НЕ первоначальный ВЕКТОР, а его МОДУЛЬ :

$$\sqrt{\overline{a}^{\,2}} = |\overline{a}|$$

5. Критерий ортогональности векторов

НЕНУЛЕВЫЕ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ **ОРТОГОНАЛЬНЫ** (ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ)

тогда и только тогда, когда их **СКАЛЯРНОЕ** ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО **НУЛЮ** :

$$\boxed{\overline{a} \perp \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{a}, \overline{b}) = 0}$$

При $\overline{a} \perp \overline{b}$ угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Пусть вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны (то есть взаимно перпендикулярны),

тогда угол между ними $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{\pi}{2}$; $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, поэтому

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos\,\varphi = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot 0 = 0.$$

$\Leftarrow$ Если известно, что $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos\,\varphi = 0$ и $|\overline{a}| \neq 0, |\overline{b}| \neq 0$, то $cos\,\varphi = 0$,

откуда следует $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{\pi}{2}$, то есть вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны : $\overline{a} \perp \overline{b}$.

ВОПРОС: чему равно скалярное произведение координатных ортов:

$(\overline{i}, \overline{j}) =$ $\qquad (\overline{i}, \overline{k}) =$ $\qquad (\overline{j}, \overline{k}) =$

Выражение скалярного произведения через координаты

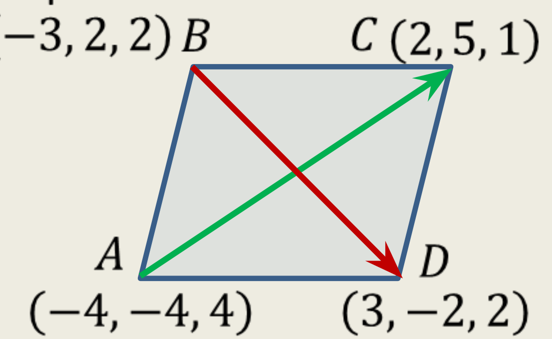
Пусть заданы два вектора : $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z); \overline{b} = (b_x, b_y, b_z).$

Тогда их СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ равно СУММЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ их ОДНОИМЕННЫХ (или , другими словами, СООТВЕТСВУЮЩИХ) КООРДИНАТ:

$$\boxed{(\overline{a}\,, \overline{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}$$

ПРИМЕР. $ABCD$ — четырехугольник; заданы координаты точек-вершин : $A(-4,-4,4), B(-3,2,2), C(2,5,1), D(3,-2,2).$

Доказать, что диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны (ортогональны).



РЕШЕНИЕ: Составим вектора, лежащие на диагоналях данного четырехугольника:

$$\overline{AC} = (2-(-4), 5-(-4), 1-4) = (2+4, 5+4, -3) = (6, 9, -3);$$

$$\overline{BD} = (3-(-3), -2-2, 2-2) = (3+3, -4, 0) = (6, -4, 0);$$

Найдем скалярное произведение этих векторов: $(\overline{AC}\,, \overline{BD}) = 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 =$

$= 36 - 36 + 0 = 0;$ По свойству 5 это значит, что $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ортогональны, чтд

Приложения скалярного произведения

Угол между векторами

Из формулы для скалярного произведения можно выразить косинус угла между ненулевыми векторами $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi; \ \cos\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|},$$

то есть $\cos\varphi = \dfrac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}};$

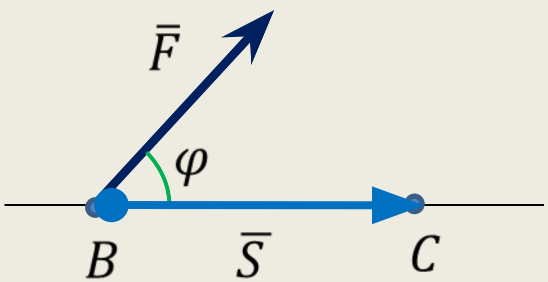
Проекция вектора на заданное направление

Так как $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a}$, то

$$\text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}};$$

Работа постоянной силы

Пусть точка перемещается из положения B в положение C под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{BC} = \bar{S}$.



Из физики известно, что

работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна

$$A = F \cdot S \cdot \cos\varphi,$$

то есть $A = (\bar{F}, \bar{S})$.

Таким образом,

РАБОТА постоянной силы при перемещении точки равна

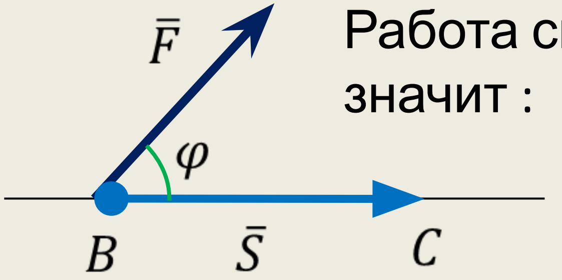
СКАЛЯРНОМУ ПРОИЗВЕДЕНИЮ

вектора силы $\bar{F}$ на вектор перемещения $\bar{S}$.

ПРИМЕР. Вычислить работу, произведенную силой $\bar{F} = (3; 2; 4)$, если точка перемещается из положения $\mathrm{B} = (2; 4; 6)$ в положение $\mathrm{C} = (4; 2; 7)$.

Под каким углом к $\overline{BC}$ направлена сила $\bar{F}$?

РЕШЕНИЕ : Находим $\bar{S} = \overline{BC} = (4 - 2; 2 - 4; 7 - 6) = (2; -2; 1)$;



Работа силы вычисляется как скалярное произведение , значит :

$$A = (\bar{F}, \bar{S}) =$$

$$= 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 6 - 4 + 4 = 6$$

Угол между векторами находим по формуле : $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{F}, \bar{S})}{|\bar{F}| \cdot |\bar{S}|}$

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9 + 4 + 16} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{9}} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}; \quad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}};$$