

Методы решения иррациональных уравнений

Цели обучения

- **11.1.2.2 - уметь решать иррациональные уравнения методом возведения обеих частей уравнения в n -ую степень;**
- **11.1.2.3 - уметь решать иррациональные уравнения методом замена переменной;**

Критерии оценивания

- **Знает метод возведения в степень обеих частей уравнения**
- **Применяет метод возведения в степень обеих частей уравнения при решении иррациональных уравнений**

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком радикала, а также под знаком возведения в дробную степень. Например,

$$\sqrt{2x-3} = x+1$$

$$\sqrt[3]{x+5} - 12\sqrt{x-4} = 5$$

$$3x^{\frac{4}{7}} - \sqrt{x+8} = 15$$

Основные методы решения иррациональных уравнений:

- **возведение в степень обеих частей уравнения;**
- **введение новой переменной;**
- **разложение на множители.**

Дополнительные методы решения иррациональных уравнений:

- ✓ **умножение на сопряженное;**
 - **переход к уравнению с модулем;**
 - **метод «пристального взгляда»
(метод анализа уравнения);**
- ✓ **использование монотонности функции.**

$$\sqrt[4]{x + 3} + 2 = 0$$

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

- 1) Если иррациональное уравнение содержит только один радикал, то нужно записать так, чтобы в одной части знака равенства оказался только этот радикал. Затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, чтобы получилась рациональное уравнение.

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

2) Если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.

Пример №1 $\sqrt{3x - 2} = x$

$$3x - 2 = x^2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1=1 \quad x_2=2$$

Проверка: $x = 1: \sqrt{3 * 1 - 2} = 1$

$$1=1$$

$$x = 2: \sqrt{3 * 2 - 2} = 2$$

$$2=2$$

Ответ: $x_1=1, x_2=2$

Пример №2 $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$

$$x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 3.$$

Проверка: 1) $x = 0$: $\sqrt{0 + 5 * 0 + 1} = 2 * 0 - 1$

$$1 \neq -1$$

2) $x = 3$: $\sqrt{9 + 15 + 1} = 6 - 1$

$$5 = 5$$

Ответ: $x = 3$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \end{cases}$$

Пример №3 Решите уравнение $\sqrt{2x - 3} = 4 - x$

$$\begin{cases} 2x - 3 = (4 - x)^2 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 19 = 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\underline{x = 5 - \sqrt{6}}$$

$$x = 5 + \sqrt{6} > 4 - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $x = 5 - \sqrt{6}$.

Пример№4

Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$

$$\begin{cases} x^2 - 2 = x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x = -1 < 0 & - \text{посторонний корень} \\ x = 2 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример №5 Решите уравнение

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

$$\sqrt{3x-1} = 3 + \sqrt{x-2}$$

$$3x-1 = 9 + 6\sqrt{x-2} + x-2$$

$$3x-1 = 7 + x + 6\sqrt{x-2}$$

$$2x-8 = 6\sqrt{x-2}$$

$$x-4 = 3\sqrt{x-2}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9(x-2)$$

$$x^2 - 17x + 34 = 0$$

$$D = 17^2 - 4 * 1 * 34 = 289 - 136 = 153$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{153} = \sqrt{9 * 17} = 3\sqrt{17}$$

$$x = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2} \in \text{ОДЗ}$$

$$x = \frac{17 - 3\sqrt{17}}{2} < 4 \notin \text{ОДЗ} - \text{посторонний корень}$$

$$\text{Ответ: } \frac{17+3\sqrt{17}}{2}$$

Пример №6 Решить уравнение

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

$$(x - 1)^3 = x^2 - x - 1$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 0; 2.$

Пример №7 Решите уравнение

$$\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{x+5} = 1$$

$$(\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{x+5})^3 = 1^3$$

$$5-x + 3\sqrt[3]{(5-x)^2} * \sqrt[3]{x+5} + 3\sqrt[3]{5-x} * \sqrt[3]{(x+5)^2} + x+5 = 1$$

$$3\sqrt[3]{(5-x)(5+x)}(\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{x+5}) = -9$$

$$3\sqrt[3]{(5-x)(5+x)} * 1 = -9$$

$$\sqrt[3]{(5-x)(5+x)} = -3$$

$$(5-x)(5+x) = -27$$

$$25 - x^2 = -27$$

$$x^2 = 52$$

$$x = \pm 2\sqrt{13}$$

Ответ: $x = \pm 2\sqrt{13}$.

Пример №8 Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$$

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = (x - 1)^2$$

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1$$

$$-x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x$$

$$-x\sqrt{x^2 - 1} = x(x - 2)$$

$$-x(\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)) = 0$$

$$x = 0 - \text{постороний корень} \quad x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{4}$$