Распространение волн в нелинейной среде

Общий вид волнового уравнения в нелинейной среде:

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$$

<u>Предположим</u>, что $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ можно разложить по плоским волнам:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_i \mathbf{E_i}(\mathbf{k_i},\omega_i) = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{E}}_i \mathbf{e}^{i(\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}-\omega_i t)},$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}^{(\mathbf{NL})}(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r},t) = \sum_i \mathbf{P_i}(\mathbf{k_i},\omega_i) = \sum_i \chi^{(1)}(\omega_i)\cdot\mathbf{E_i}(\mathbf{k_i},\omega_i),$$

$$\mathbf{P}^{(\mathbf{NL})}(\mathbf{r},t) = \sum_{n\geq 2}\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{r},t) = \sum_m \mathbf{P}^{(\mathbf{NL})}(\mathbf{k_m},\omega_m) = \sum_m \overrightarrow{\mathcal{P}}^{(NL)}\mathbf{e}^{i(\mathbf{k_m}\cdot\mathbf{r}-\omega_m t)},$$

Амплитуды поля и компонент нелинейной поляризации – не зависят от времени (проблема описания нестационарных нелинейных процессов вынесена за скобки)

Распространение волн в нелинейной среде

Вспомнив, что

$$\varepsilon(\omega_i) \equiv 1 + 4\pi\chi^{(1)}(\omega_i)$$

исходное волновое уравнение

$$\left[\nabla \times (\nabla\times) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$$

запишется в виде системы уравнений

$$\left[\nabla \times (\nabla\times) - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right]\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{k}_m,\omega_m = \omega)$$

Замечания:

1. В общем виде, нелинейная поляризация $\mathbf{P}^{(NL)}$ определяется всеми полями $\mathbf{E}_n(\mathbf{k}_n,\omega_n)$
2. Это означает, что перед нами система <u>связанных</u> уравнений
3. Связанность уравнений означает перераспределение энергии между различными компонентами поля
4. Частоты справа и слева 0динаковые, а волновые вектора могут быть разными (закон сохранения энергии в стационарном случае и возможность нарушения закона сохранения импульса)

Связанные волны в нелинейной среде

Система связанных уравнений для трехволнового процесса примет вид:

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega_1^2}{c^2}\varepsilon_1\right]\mathbf{E_1}(\mathbf{k}_1,\omega_1)=\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\mathbf{P}^{(2)}(\omega_1)=$$
$$\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega_1=-\omega_2+\omega):\mathbf{E_2^*}(\mathbf{k}_2,\omega_2)\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega),$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega_2^2}{c^2}\varepsilon_2\right]\mathbf{E_2}(\mathbf{k}_2,\omega_2)=\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathbf{P}^{(2)}(\omega_2)=$$
$$\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega_2=\omega-\omega_1):\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k}_1,\omega_1),$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right]\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)=\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\mathbf{P}^{(2)}(\omega)=$$
$$\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega=\omega_1+\omega_2):\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1,\omega_1)\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2,\omega_2),$$

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Приближения, упрощающие жизнь:

1. приближение бесконечных плоских волн
2. приближение заданной интенсивности накачки
3. приближение заданного поля
4. приближение медленно меняющихся амплитуд

Рассмотрим электромагнитную волну в нелинейной среде в виде

$$\mathbf{E}(\omega, z) = \overrightarrow{\mathcal{E}}(z)e^{i(kz-\omega t)}$$

для простоты – распространяющуюся вдоль оси *z*

Амплитуда волны – функция, зависящая от координаты из-за нелинейного взаимодействия

Предположим, что зависимость амплитуды от координаты слабая:

$$|\partial^2 \overrightarrow{\mathcal{E}}(z)/\partial z^2| \ll |k \quad \partial \overrightarrow{\mathcal{E}}/\partial z|$$

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Разделив поле на продольную и поперечную компоненты, волновое уравнение запишется в виде двух уравнений:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\perp + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon \cdot \mathbf{E})_\perp = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\mathbf{P}_\perp^{(NL)}(\omega, z)$$

$$\nabla \cdot \left[(\varepsilon \cdot \mathbf{E})_\| + 4\pi \mathbf{P}_\|^{(NL)}\right] = 0$$

тогда, используя:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\perp = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{E}_\perp = e^{i(kz-\omega t)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i2k\frac{\partial}{\partial z} - k^2\right]\overrightarrow{\mathcal{E}}_\perp(z),$$

$$-k^2\mathbf{E}_\perp + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon \cdot \mathbf{E}_\perp) = 0.$$

получим:

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{E}_\perp}}{\partial z} = \frac{i2\pi\omega^2}{kc^2}\mathbf{P}_\perp^{(NL)}(\omega, z)e^{-i(kz-\omega t)}.$$

Нелинейная оптика
Лекция 7-8

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Физический смысл приближения – пренебрежение обратной волной нелинейного сигнала.

Действительно, рассмотрим волновое уравнение в изотропной пластине

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)\mathbf{E}(\omega,z)=-\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega,z)$$

Будем решать методом функций Грина. ФГ определяется как решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)G(z,z')=-\delta(z,z')$$

ФГ для однородной пластины принимает вид

$$G(z,z')=\begin{cases}-\dfrac{1}{i2k}e^{ik(z-z')}, & z>z' \\ -\dfrac{1}{i2k}e^{-ik(z-z')}, & z<z'\end{cases}$$

Приближение медленно меняющихся амплитуд

Решение волнового уравнения ищем в виде

$$\mathbf{E}(\omega,z)=\int_0^l \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(z')G(z,z')dz'+\left[G\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial z'}-\mathbf{E}\frac{\partial G}{\partial z'}\right]_{z'=0}^{z'=l}$$

Подставляя выражение для ФГ:

$$\mathbf{E}(\omega,z)=-\frac{2\pi\omega^2}{ikc^2}\left[\int_0^z \mathbf{P}^{NL}(z')e^{ik(z-z')}dz'+\int_z^l \mathbf{P}^{NL}(z')e^{-ik(z-z')}dz'\right]+$$

$$+\left[G\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial z'}-\mathbf{E}\frac{\partial G}{\partial z'}\right]_{z'=0}^{z'=l}$$

Записав поле внутри пластины как суперпозицию двух разбегающихся волн

$$\mathbf{E}(\omega,z)=\mathbf{E}_F(z)e^{i(kz-\omega t)}+\mathbf{E}_B(z)e^{i(-kz-\omega t)}$$

и граничные условия на гранях пластины в виде

$$\partial\mathbf{E}_F/\partial z=0,\ \ \partial\mathbf{E}_B/\partial z=0$$

(постоянство амплитуд вне нелинейной пластины)

Приближение медленно меняющихся амплитуд

получаем:

$$\left[G\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z'} - \mathbf{E}\frac{\partial G}{\partial z'} \right]_{z'=0}^{z'=l} = \mathbf{E}_F(0)e^{i(kz-\omega t)} + \mathbf{E}_B(l)e^{i(-kz-\omega t)}$$

Окончательно:

$$\mathbf{E}_F(z) = \mathbf{E}_F(0) + i\frac{2\pi\omega^2}{kc^2}\int_0^z \mathbf{P}^{NL}(z')e^{-i(kz'-\omega t)}dz',$$

$$\mathbf{E}_B(z) = \mathbf{E}_B(l) + i\frac{2\pi\omega^2}{kc^2}\int_z^l \mathbf{P}^{NL}(z')e^{i(kz'+\omega t)}dz'$$

Но это есть решения двух дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{E}_F}{\partial z} = i\frac{2\pi\omega^2}{kc^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega, z)e^{-i(kz-\omega t)},$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_B}{\partial z} = -i\frac{2\pi\omega^2}{kc^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega, z)e^{i(kz+\omega t)}$$

что соответствует уравнениям ММА с $\mathbf{E}_B = 0$

Генерация суммарной частоты в полубесконечной среде

В задаче о генерации суммарной частоты участвуют три связанные волны,

$$\mathbf{E}(\omega_1),\ \mathbf{E}(\omega_2),\ \mathbf{E}(\omega_3)$$

каждая из которых раскладывается на две компоненты,

$$\mathbf{E}(\omega_i) = \mathbf{E}_{//}(\omega_i) + \mathbf{E}_{\perp}(\omega_i)$$

удовлетворяющим волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{\perp}(\omega_i) + \frac{\omega_i^2}{c^2}\left[\varepsilon(\omega_i)\mathbf{E}(\omega_i)\right]_{\perp} = -\frac{4\pi\omega_i^2}{c^2}\mathbf{P}_{\perp}^{(2)}(\omega_i)$$

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{E}_{\parallel}(\omega_i) + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(1)}(\omega_i) + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(2)}(\omega_i)\right] = 0$$

где

$$\mathbf{P}(\omega_i) = \mathbf{P}_{\parallel}(\omega_i) + \mathbf{P}_{\perp}(\omega_i)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_3) = \chi^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) : \mathbf{E}(\omega_1)\mathbf{E}(\omega_2)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_1) = \chi^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) : \mathbf{E}^*(\omega_2)\mathbf{E}(\omega_3)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_2) = \chi^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) : \mathbf{E}(\omega_3)\mathbf{E}^*(\omega_1)$$

Генерация суммарной частоты в полубесконечной среде

В приближении:

-бесконечных плоских волн

- заданной интенсивности накачки
- полубесконечности среды с плоской границей
- кубичности (изотропности) среды

уравнения для $\mathbf{E}(\omega_1), \mathbf{E}(\omega_2)$ линейны.

Записав волны накачки в виде

$$\mathbf{E}_T(\omega_1) = \vec{\mathcal{E}}_{1T} \exp[i(\mathbf{k}_{1T} \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)]$$
$$\mathbf{E}_T(\omega_2) = \vec{\mathcal{E}}_{2T} \exp[i(\mathbf{k}_{2T} \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)]$$

а квадратичную поляризацию в виде

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_3) = \vec{P}_3^{(2)} \exp[i(\mathbf{k}_{3s}\mathbf{r} - \omega_3 t)]$$

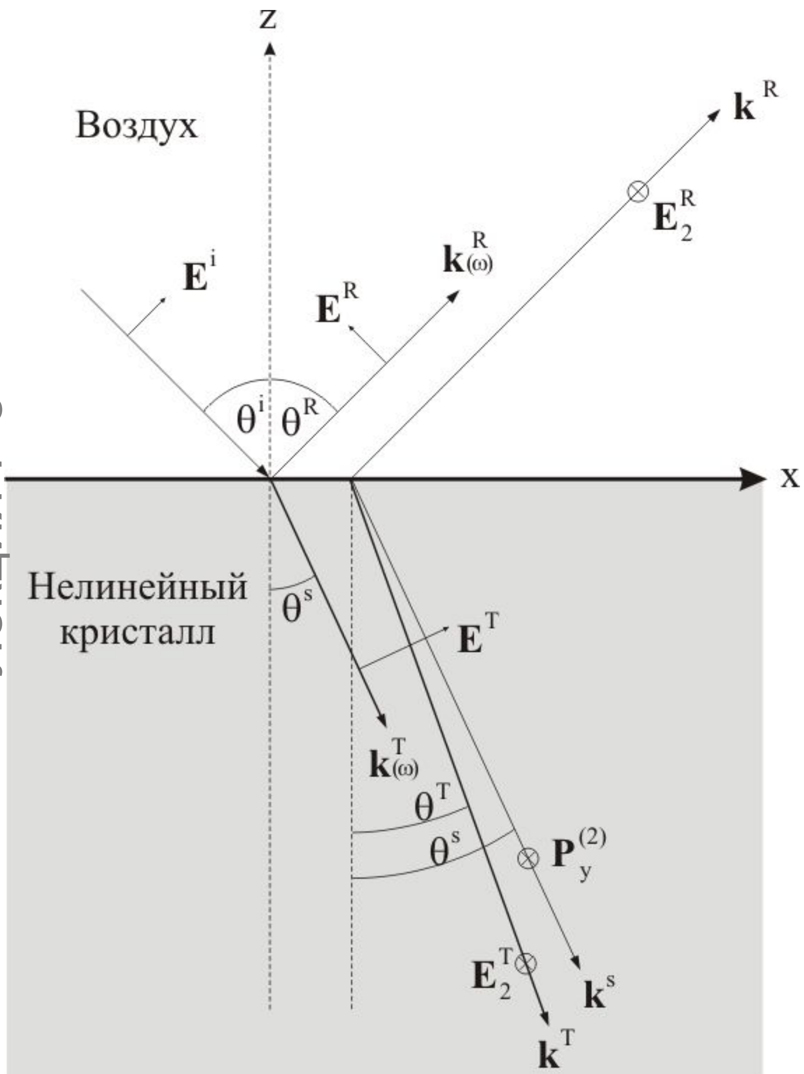
третье связанное уравнение будет иметь решение в виде

$$\mathbf{E}_T(\omega_3) = \left\{ \mathbf{A}e^{i\mathbf{k}_{3T}\mathbf{r}} + \left[\frac{4\pi\omega_3^2}{c^2\left(k_{3s}^2 - k_{3T}^2\right)} \vec{P}_{3\perp}^{(2)} - \frac{4\pi \vec{P}_{3//}^{(2)}}{\varepsilon_{//}(\omega_3)} \right] e^{i\mathbf{k}_{3s}\mathbf{r}} \right\} e^{-i\omega_3 t}$$

и состоит из двух волн, связанной и свободной, с волновыми векторами

$$\mathbf{k}_{3s} = \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T}, \quad \mathbf{k}_{3T}$$

Генерация суммарной частоты: граничные условия



для тангенциальных компонент:

$$k_{3I,x} = k_{3R,x} = k_{3T,x} = k_{3s,x}$$

$$\begin{aligned} k_{3I} \sin\theta_3^i = k_{3R} \sin\theta_3^R = k_{3T} \sin\theta_3^T \\ = k_{3s} \sin\theta_3^s \\ = k_{1T} \sin\theta_1^T + k_{2T} \sin\theta_2^T \\ = k_{1I} \sin\theta_1^i + k_{2I} \sin\theta_2^i \end{aligned}$$

- нелинейный закон Снеллиуса

Генерация суммарной частоты: фазовый синхронизм

Запишем поле на суммарной частоте в виде

$$\mathbf{E}_T(\omega_3) = \overrightarrow{\mathcal{E}}_{3T}(z)\exp\left[i(\mathbf{k}_{3T}\cdot\mathbf{r} - \omega_3 t)\right]$$

тогда в рамках приближения ММА

$$\frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{\mathcal{E}}_{3T}(z) = \frac{i2\pi\omega_3^2}{k_{3T,z}c^2}\overrightarrow{\mathcal{P}}^{(2)}_{3\perp}e^{i\Delta kz}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon_{\|}(\omega_3)\overrightarrow{\mathcal{E}}_{3T\|} + 4\pi\overrightarrow{\mathcal{P}}^{(2)}_{3\|}e^{i\Delta kz}\right] = 0$$

где расстройка волновых векторов

$$\Delta\mathbf{k} = \hat{z}\Delta k = \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T} - \mathbf{k}_{3T}$$

Решение укороченных уравнений запишется в виде

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}_{3T\perp}(z) = \overrightarrow{\mathcal{E}}_{3T\perp}(0) + \frac{2\pi\omega_3^2}{c^2 k_{3T,z}\Delta k}\overrightarrow{\mathcal{P}}_{3T\perp}(e^{i\Delta kz} - 1)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}_{3T\|}(z) = \overrightarrow{\mathcal{E}}_{3T\|}(0) - \frac{4\pi\overrightarrow{\mathcal{P}}^{(2)}_{3\|}}{\varepsilon_{\|}(\omega_3)}(e^{i\Delta kz} - 1)$$

далее полагаем $\overrightarrow{E}_{3T}(0) = 0$

Генерация суммарной частоты: фазовый синхронизм

Интенсивность волны на суммарной частоте

$$I_3(z) = \frac{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}}{2\pi}\left|\vec{E}_{3T}(z)\right|^2$$

полная мощность волны определяется интегрированием по пучку:

$$P(\omega_3, z) = \int I_3(z,\rho)d\rho = \frac{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}}{2\pi}\int |\vec{\mathcal{E}}_{3T}(z,\rho)|^2 d\rho$$

при малой расстройке, $\left|k_3/\Delta k\right| >> 1$, можно считать, что $\left|\vec{E}_{3T//}\right| << \left|\vec{E}_{3T\perp}\right|$

и интенсивность волны на суммарной частоте запишется в виде

$$I_3(z) = \frac{2\pi\omega_3^2}{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}cos^2\Theta_{3T}}\left|\vec{\mathcal{P}}^{(2)}_{3\perp}\right|^2\left[\frac{\sin\Delta kz/2}{\Delta kz/2}\right]^2 z^2$$

Генерация суммарной частоты: фазовый синхронизм

$I_3(\Delta k_z z)$ достигает максимума при $\Delta \mathbf{k} = 0$

то есть при выполнении условия фазового синхронизма

$$[I_3(z)]_{max} = \frac{2\pi\omega_3^2}{c\sqrt{\varepsilon(\omega_3)}cos^2\Theta_{3T}} \times |\overrightarrow{\mathcal{P}}_{3\perp}^{(2)}|^2 z^2$$

полуширина между первыми нулями (ширина синхронизма)

$$(\Delta k)_{HW} z = \frac{(\Delta k)_{HW}}{k_{3T}} k_{3T} z = 2\pi$$

типичная оценка: при $l = 1cm,\ k_{3T} = 10^5\ cm^{-1}$

ширина синхронизма очень мала: $\Delta k_{HW} / k_{3T} \approx 10^{-4}$

NB: рассмотрен только изотропный случай, оптическую анизотропию нужно рассматривать отдельно

Условие фазового синхронизма

Итак, генерация суммарной частоты идет эффективно при выполнении условия

$$|\Delta kz| << 1$$

волновая расстройка Δk определяет когерентную длину $l_{cor} = 1/\Delta k$

в коллинеарной геометрии взаимодействия эффективная генерация наблюдается при условии синхронизма

$$\Delta k = k_{1T} + k_{2T} - k_{3T} = 0$$

Это условие можно переписать через показатели преломления

$$\omega_1[n(\omega_3) - n(\omega_1)] + \omega_2[n(\omega_3) - n(\omega_2)] = 0$$

Это возможно при:

- аномальной дисперсии
- в двулучепреломляющих отрицательных одноосных кристаллах при

$$n_e(\omega_i) < n_0(\omega_i)$$

Возможны два типа синхронизма:

«тип I» - ooe

$$n_e(2\omega) = n_o(\omega)$$

«тип 2» - oee

$$n_e(2\omega) = \frac{1}{2}\left(n_o(\omega) + n_e(\omega)\right)$$

NB: рассмотрен только прозрачный случай, при наличии поглощения нужно рассматривать более строго