# Семинар 27

## Функциональные ряды
## Степенные ряды

Ряд, элементами которого являются функции, называется функциональным рядом.

Обозначение $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ (*), где $u_n(x)$ - определены и непрерывны в одном и том же интервале.

Ряд (*) для одних значений *x* может сходиться, а для других расходиться.

Значение $x = x_0$, при котором числовой ряд $u_1(x_0)+u_2(x_0)+...+u_n(x_0)+...$ сходится, называется <u>точкой сходимости ряда</u> (*).

Совокупность всех точек сходимости ряда называется областью сходимости ряда, или говорят, что ряд сходится в данной области. Областью сходимости обычно бывает какой-либо интервал оси *OX*.

$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$ - *n* –ая частичная сумма;

$r_n(x)$ – остаток ряда. Если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x);\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$

**<u>Определение</u>**

Функциональный ряд $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$ (*) называется правильно сходящимся в области *D*, принадлежащей области сходимости ряда, если в области *D* все его элементы по абсолютной величине не превосходят соответствующих элементов некоторого числового ряда с положительными элементами. Это значит, что во всех точках области $D$ должно выполняться неравенство $|u_n| \le M_n$ , где $M_n$ - элемент сходящегося ряда $M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$Этот ряд называется <u>мажорирующим</u> по отношению к ряду (*).

**Свойства правильно сходящихся рядов**

Сформулируем основные теоремы о правильно сходящихся рядах, которые дают ответ на вопрос о переносе на ряды свойств сумм конечного числа функций. Во всех теоремах предполагается, что область правильной сходимости ряда есть некоторый интервал оси *OX.*

<u>**Теорема 1** </u>Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D, то его сумма есть функция непрерывная в этой области.

Так ряд $\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ сходится правильно в любом интервале. Следовательно, его сумма S(x) – непрерывная функция.

**<u>Теорема 2</u>** Если ряд из непрерывных функций правильно сходится, то интеграл от суммы ряда равен сумме ряда, составленного из интегралов от этих функций: $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots$ (*)

Короткая формулировка. Правильно сходящийся ряд можно <u>поэлементно интегрировать.</u>

**<u>Теорема 3</u>**

Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ составленный из функций, имеющих непрерывные производные, сходится в области D и его сумма равна S(x), а ряд из производных $u_n'(x)$ сходится в этой области правильно, то производная суммы ряда S'(x) равна сумме ряда из производных

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

Короткая формулировка. Если ряд, составленный из производных сходящегося ряда, сходится правильно, то его можно поэлементно дифференцировать.

**Определение**

Степенным рядом называется функциональный ряд $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$ , элементы которого произведения постоянных $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ на степенные функции с целыми показателями степеней от разности $x - x_0$. $a_i$ - коэффициенты степенного ряда (обычно действительные функции).

В частности, если $x_0 = 0$ ,то мы будем иметь степенной ряд, расположенный по степеням x , т.е. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$

**Теорема Абеля**

Если степенной ряд (*) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно, в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ , т. е. при всяком $x$ , удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$.

***Область сходимости степенного ряда***

Здесь возможны три случая:

Здесь возможны три случая:

1. Область сходимости состоит только из одной точки $x=0$, то есть ряд расходится для всех значений $x$, кроме $x=0$.
2. Область сходимости состоит из всех точек оси $OX$, то есть ряд сходится при всех значениях $x$.
3. Область сходимости состоит более чем из одной точки оси $OX$, причем есть точки оси, не принадлежащие области сходимости.

Таким образом, для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число $R$, что для всех $x$ по модулю меньшим $R$ ($|x| < R$), ряд абсолютно сходится, а для всех $|x|>R$ ряд расходится.

При $x=R$ и $x=-R$ различные варианты:

А) ряд сходится в обеих точках.

Б) ряд сходится в одной из точек.

В) ряд расходится в обеих точках.

*__Определение__*

Радиусом сходимости степенного ряда (*) называется такое число $R$, что для любых $x$, $|x|<R$, степенной ряд сходится, а для всех $x$, $|x|>R$, расходится. Интервал *(-R,R)* называется интервалом сходимости. Считаем, что если ряд расходится для любого $x$, кроме $x=0$, $R=0$. Если ряд сходится при всех $x$, то считаем $R=+\infty$ или $R=\infty$.

Для ряда $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ центр интервала сходимости в точке $x=x_0$ ( а не $x=0$) и интервал сходимости $(x_0-R, x_0+R)$.

***__Способ отыскания радиуса сходимости степенного ряда__***

Отметим, что для нахождения радиуса сходимости можно исследовать ряд, составленный из абсолютных величин элементов исходного ряда, то есть $|a_0|+|a_1||x|+\ldots+|a_n||x^n|+\ldots$(**) так как интервалы сходимости ряда (*) и ряда (**) совпадают. К ряду (**) применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$ будет содержать $|x|$ или степень $|x|$.

Для тех значений $x$, при которых получаемый предел меньше 1, ряд сходится, а для тех, при которых $x>1$, ряд расходится.

Отсюда следует, что значения $|x|$, при которых этот предел равен 1, и будет являться радиусом сходимости ряда. Может случиться, что найденный предел при всех $x$ будет равен 0. Это означает, что ряд (*) сходится при всех $x$ и $R=\infty$. Наоборот, если для любых $x$ кроме $x=0$ предел равен бесконечности, то ряд будет везде расходиться, кроме $x=0$, то есть $R=0$.

**Примеры с решениями**

**1.** Дан функциональный ряд $\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\ldots$ Исследовать

сходимость ряда в точках $x=0$ и $x=1$.

Решение: В точке $x=0$ получаем ряд $2+\frac{1}{3}\cdot 2^2+\frac{1}{5}\cdot 2^3+\ldots$

Применим признак Даламбера

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)}=2>1$ - ряд расходится. В точке $x=1$ получаем ряд

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots$ По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)}=\frac{1}{3}<1$

ряд расходится.

2. Найти область сходимости ряда $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+\dots$

Решение.Общий элемент ряда $u_n=\frac{1}{1+x^{2n}}$ Если $|x|<1$,то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=1\neq 0$, следовательно ряд расходится. Если $|x|=1$, то также получаем расходящийся Ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}+\dots$

Если $|x|>1$, то элементы заданного ряда меньше элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\dots$, т.е ряд сходится при $|x|>1$.

3.Исследовать сходимость степенного ряда $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots$

Решение.

Найдем радиус сходимости ряда: $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$$

Следовательно, ряд сходится для значений $x$, удовлетворяющих неравенству $1<x<1$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x=1$, то получаем расходящийся гармонический ряд. Если $x=-1$, то получаем знакочередующийся ряд, который условно сходится по признаку Лейбница. Итак, область сходимости степенного ряда определяется неравенством $-1 \le x < 1$.

4. Исследовать сходимость степенного ряда $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots$

Решение.

Найдем радиус сходимости ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2=1$

Тогда ряд сходится для значений $x$, удовлетворяющих неравенству $-1<x-2<1$, т.е. $1<x<3$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x=1$, то получаем сходящийся ряд обратных квадратов. Если $x=-1$, то получаем знакочередующийся ряд обратных квадратов, который является абсолютно сходящимся. Итак, область сходимости степенного ряда определяется неравенством $1 \le x \le 3$.

5.Исследовать сходимость степенного ряда $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\dots$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.
Ряд сходится только при $x-5=0$, т.е. в точке $x=5$.

**Примеры для самостоятельного решения**

1. Найти области сходимости функциональных рядов:

1) $1+e^{-x}+e^{-2x}+\dots+e^{-nx}+\dots$ 2) $1+\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{3^x}+\dots+\dfrac{1}{n^x}+\dots$ 3) $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{2^2(x^2+1)}+\dots$

2. Найти области сходимости ст. рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cdot x^n}{n!}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n-1}}{n^3}$ 3) $\sum\dfrac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

3. Найти сумму ряда, используя поэлементное дифференцирование или интегрирование:

1) $x^2-3x^4+5x^6-\dots+(-1)^n(2n+1)x^{2n+2}+\dots$

2) $\dfrac{x^2}{1\cdot 2}+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\dots$