ЛЕКЦИЯ 8

Элементы статистической физики

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Функция распределения.
2. Распределение проекции скорости.
3. Распределение модуля скорости.

Некоторые сведения из лекции 6 ***«основы молекулярно-кинетической теории газов»***:

Два метода описания свойств макросистем:

Термодинамика - устанавливает связи между непосредственно измеряемыми в макроскопических опытах величинами (объемом, температурой, давлением и т.д.).	**Статистическая физика** - основана на модельных представлениях о строении макротел и математической статистике.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Функция распределения

Пусть X - случайная величина,

$x;\ x+\Delta x$ - некоторый интервал значений этой величины.

Попадание значения X в этот интервал – событие случайное.

ΔW - вероятность этого события, зависит от ширины интервала Δx.

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta W \to 0$$

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Функция распределения

При малых Δx величины ΔW и Δx пропорциональны друг другу:

$$\Delta W = f \cdot \Delta x$$

От чего зависит ΔW? От того, в каком месте оси OX располагается интервал $x; x + \Delta x$.

Следовательно, коэффициент пропорциональности f есть функция от x:

$$\Delta W = f(x) \cdot \Delta x$$

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

$$\boxed{\Delta W = f(x)\cdot \Delta x}$$

Функция распределения

$f(x)$ - *функция распределения.*

$$f(x)=\frac{\Delta W}{\Delta x}$$

***Функция распределения* есть величина, численно равная вероятности того, что значение случайной величины X попадет в единичный интервал, расположенный в окрестностях точки x.**

Функция распределения еще называется ***плотностью вероятности.***

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Вероятность микросостояния.

Все микропараметры системы - величины случайные.

Максимальная информация о ***макросостоянии*** системы содержится в ***функциях распределения*** всех её микропараметров.

Рассмотрим конкретную систему и конкретное её макросостояние:

- системой будет *идеальный газ*;
- состояние системы – *равновесное*.

Состояние этой системы полностью определяют *координаты* и *скорости* всех её молекул. Поэтому надо найти функции распределения координат и скоростей.

Рассмотрим *чистый одноатомный* идеальный газ.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Вероятность микросостояния.

Чистым газом называется газ, состоящий из одинаковых молекул. Иными словами, он представляет собой химически чистое вещество.

Молекула чистого газа обладает тремя *степенями свободы*.

Микросостояние молекулы с тремя степенями свободы – это набор трёх координат (x, y, z) и трёх проекций скорости (v_x, v_y, v_z). Задача состоит в поиске шести функций распределения.

Рассмотрим две задачи:

Функции распределения *скоростей* (v_x, v_y, v_z).

Функции распределения *координат*.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение проекции скорости (распределение Максвелла)

Распределение скоростей молекул в равновесном *идеальном газе* называется *распределением Максвелла.*

В основе распределений - два постулата Максвелла:

1. Постулат независимости

Три декартовые компоненты скорости молекулы v_x, v_y и v_z являются ***независимыми*** *случайными величинами* и имеют *одну и ту же функцию распределения*.

2. Постулат нормальности

Распределение проекции скорости молекулы является *нормальным* (самый распространённый вид распределения):

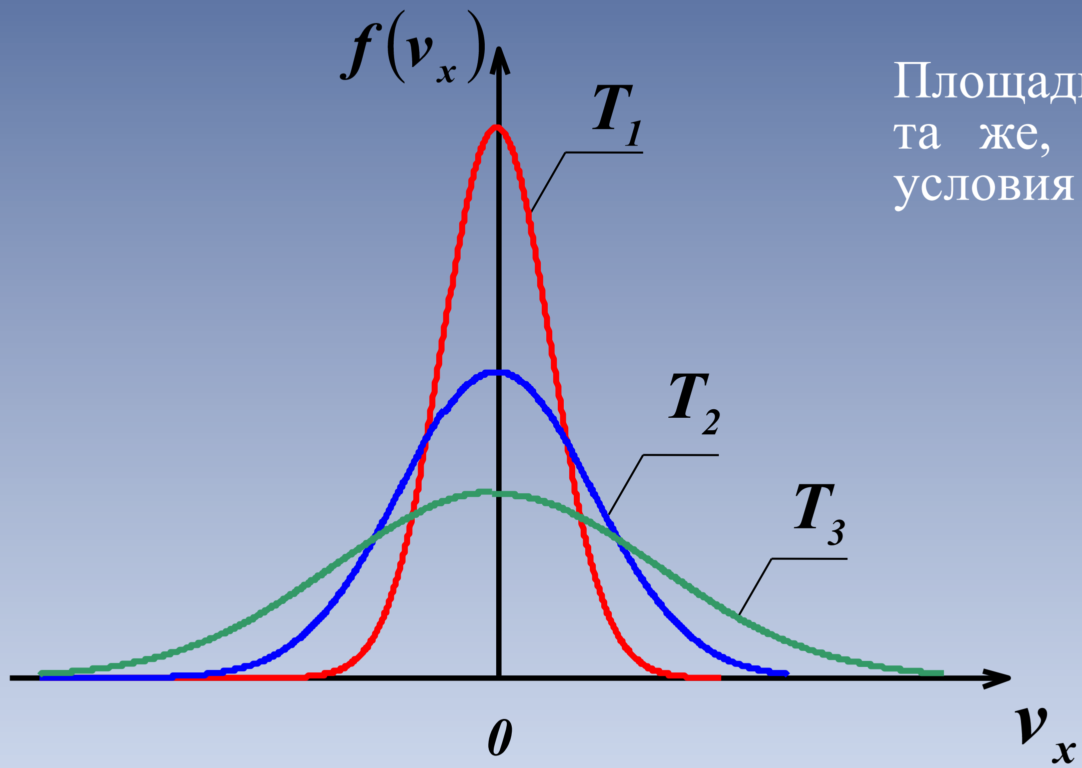
$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2kT}\right\}$$

k – постоянная Больцмана

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла

$$T_1 < T_2 < T_3$$



Площадь под каждой из кривых одна и та же, и равна 1. Это следует из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла

Распределение модуля скорости

Зная функции ***распределения проекций*** скорости v_x, v_y, v_z, можно найти функцию распределения любого ***микропараметра***, который зависит от v_x, v_y, v_z, – например ***модуля скорости*** v, связанного с v_x, v_y, v_z выражением:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Конечный результат:

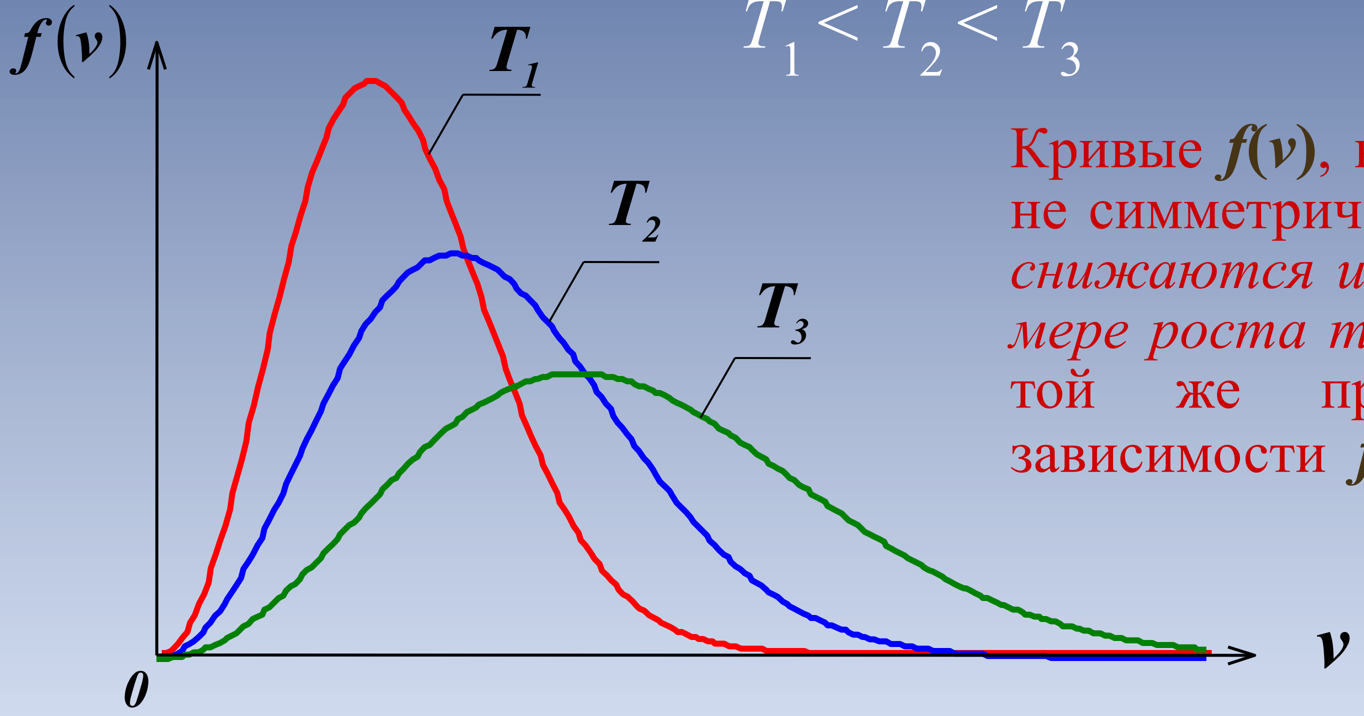
$$\boxed{f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2kT}\right\}}$$

Эту формулу чаще всего и называют ***распределением Максвелла***.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла

Функции распределения Максвелла для модуля скорости

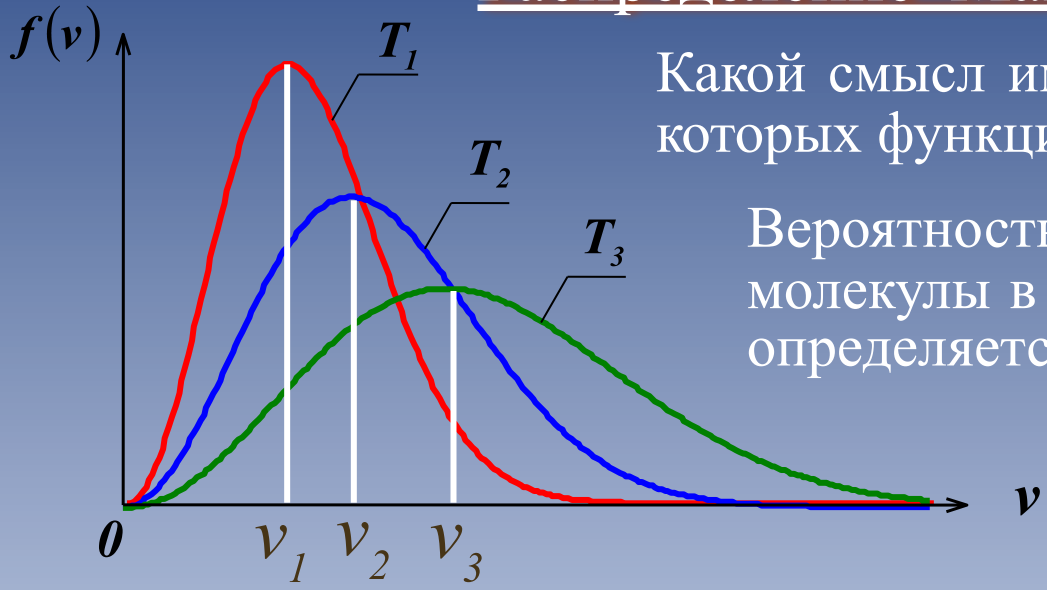


$$T_1 < T_2 < T_3$$

Кривые $f(v)$, в отличие от $f(v_x)$ не симметричные. Но они тоже *снижаются и расширяются по мере роста температуры* – по той же причине, что и зависимости $f(v_x)$.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла



Какой смысл имеют значения скорости, при которых функция $f(v)$ достигает максимума?

Вероятность ΔW попадания скорости молекулы в малый интервал скоростей Δv определяется формулой

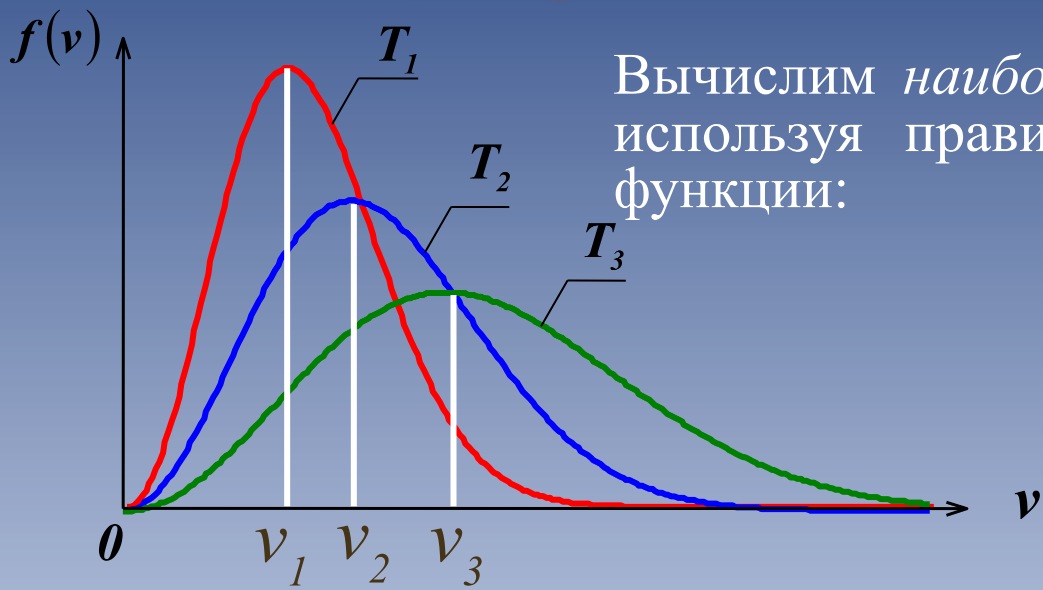
$$\Delta W = f(v)\cdot\Delta v$$

Наибольшей является вероятность попадания в интервал, расположенный в окрестности того значения v, для которого $f(v)$ достигает *максимума*.

Этот интервал и соответствующая ему скорость называются ***наиболее вероятными.***

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла



Вычислим *наиболее вероятную скорость* $v_в$, используя правило нахождения экстремума функции:

$$\left.\frac{df(v)}{dv}\right|_{v=v_в} = 0$$

Применение этого правила приводит к следующему результату:

$v_в$ растёт с ростом температуры. Наиболее вероятный интервал скоростей Δv перемещается в область более быстрых молекул.

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла

Кроме наиболее вероятной скорости в расчетных задачах часто используют среднюю арифметическую и среднюю квадратичную скорости:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{\mu}}$$

- *средняя (средняя арифметическая) скорость*

$$v_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

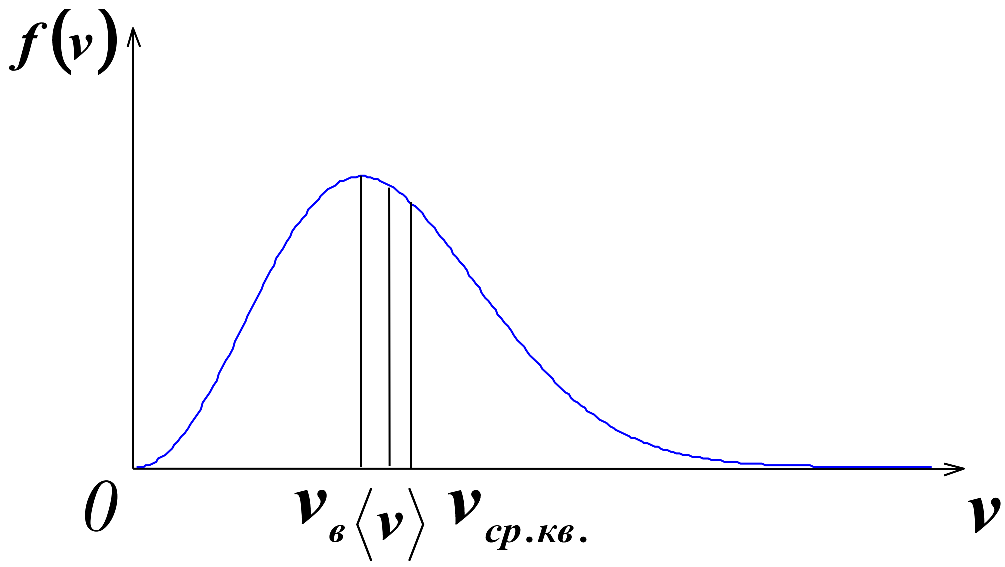
- *средняя квадратичная скорость*

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла

Сопоставление этих скоростей дает следующий результат:

$$v_в : \langle v \rangle : v_{ср.кв.} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3} \quad = 1 : 1{,}13 : 1{,}22$$



ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Максвелла

Распределение относительной скорости

Перейдем от v к ***относительной скорости*** u, которая определяется формулой:

$$u = \frac{v}{v_в} = \sqrt{\frac{m}{2kT}}v$$

Как и абсолютная скорость v, относительная u – *случайная величина*.

Функция распределения относительной скорости:

$$\boxed{f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2 exp\left\{-u^2\right\}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ЗАДАЧА 2. Распределение Больцмана

Найдем функции распределения *координат*.

Одномерная задача.

Функция распределения координаты $\boldsymbol{x}$ – это такая функция $\boldsymbol{f(x)}$, умножение которой на ширину $\boldsymbol{dx}$ бесконечно малого интервала $\boldsymbol{(x, x+dx)}$ даёт вероятность $\boldsymbol{dW(x)}$ того, что координата молекулы $\boldsymbol{x}$ попадёт в этот интервал.

$$dW(x) = f(x)dx$$

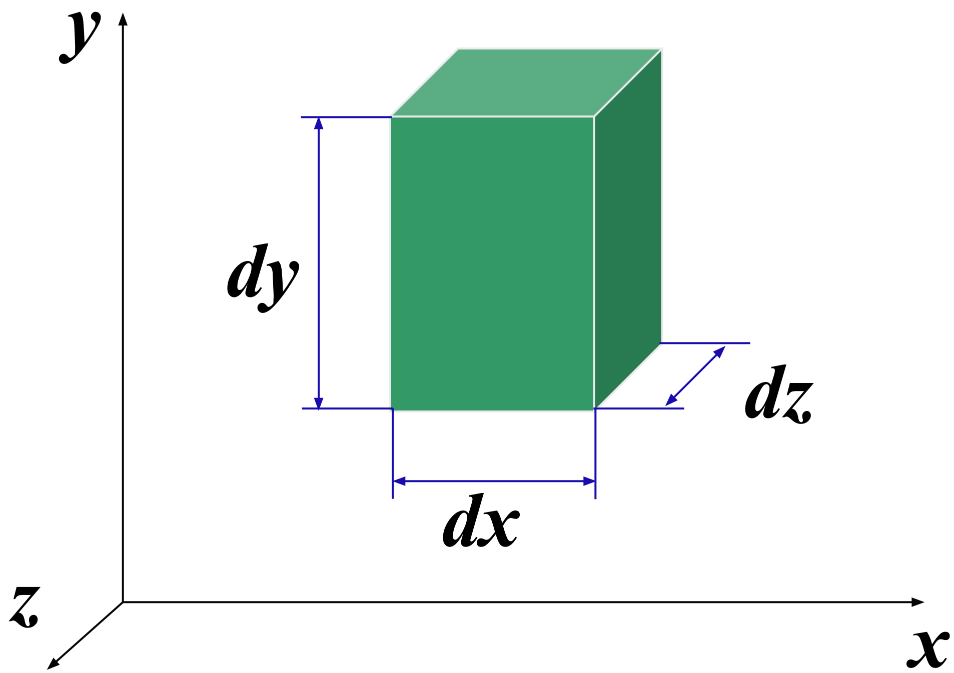
Это вероятность попадания хаотически блуждающей в пространстве молекулы в *фиксированную область пространства* между двумя параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии $\boldsymbol{dx}$ друг от друга. Это *бесконечно малая область*.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Больцмана

Трехмерная задача. Методика решения.

Рассматривается бесконечно малая область пространства в виде *параллелепипеда (**элементарный объём**)*. Определяется *вероятность* ***dW(x, y, z)*** *попадания молекулы в фиксированный элементарный объём*, расположенный в окрестности точки с координатами (x, y, z).



Размеры элементарного объема - dx, dy, dz ,

объём - $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Больцмана

Решение задачи (без вывода):

Вероятность попадания молекулы в фиксированный элементарный объём, расположенный в окрестности точки с координатами (x, y, z):

$$\boxed{dW(x,y,z) = B\,exp\left\{-\frac{W_n(x,y,z)}{kT}\right\}dV}$$

$W_n(x,y,z)$ - потенциальная энергия

Знаая эту вероятность, можно определить среднее число молекул $\langle dN(x, y, z)\rangle$ в элементарном объёме, находящемся в окрестности точки с координатами (x, y, z).

$$\langle dN(x,y,z)\rangle = N\,B\,exp\left\{-\frac{W_n(x,y,z)}{kT}\right\}dV$$

N – полное число молекул в газе.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Больцмана

$$\langle dN(x,y,z)\rangle = N\,B\,exp\left\{-\frac{W_n(x,y,z)}{kT}\right\}dV$$

Отношение $<N(x, y, z)>/dV$ – это *концентрация* молекул n

$$n(x,y,z) = NB\,exp\left\{-\frac{W_n(x,y,z)}{kT}\right\}$$

Пусть при $n(x_0, y_0, z_0)$ $W_n(x, y, z) = 0.$ Тогда $n(x_0, y_0, z_0) = NB$

$$n(x,y,z) = n(x_0, y_0, z_0)\,exp\left\{-\frac{W_n(x,y,z)}{kT}\right\}$$

$$\boxed{n(x,y,z) = n_0\,exp\left\{-\frac{W_n(x,y,z)}{kT}\right\}}$$

Это распределение Больцмана.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Распределение Больцмана. Барометрическая формула

Построим *модель атмосферы*:

1. Температура воздуха с ростом высоты *не меняется*.
2. Воздух – это *чистый идеальный газ*.
3. Атмосфера – *равновесная* система.

$$p = nkT \qquad n(h) = n_0 \exp\left\{-\frac{W_n(h)}{kT}\right\} = n_0 \exp\left\{-\frac{mgh}{kT}\right\}$$

n_0 – концентрация молекул на уровне Земли.

$$\boxed{p(h) = p_0 \exp\left\{-\frac{mgh}{kT}\right\}}$$

Это ***барометрическая формула***.

p_0 – давление у поверхности Земли.