



ТЕМА:
«ЗАДАЧИ НА
ВЗВЕШИВАНИЯ»

Цель занятия: изучить общие приёмы решения задач на взвешивания.

Задача 1

- Есть три монеты. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью одного взвешивания определить фальшивую монету?

Решение. Положим на каждую чашу по монете. Если весы находятся в равновесии, то фальшивая монета — это третья, если же какая-то чаша оказалась легче, то на ней и лежит фальшивая монета.

Задача 2

- Есть девять монет. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью двух взвешиваний определить фальшивую монету?
- **Решение.** Положим на каждую чашу по три монеты. За первое взвешивание можно узнать в какой группе из трех монет находится фальшивая. А из трех монет за одно взвешивание находить фальшивую мы научились в предыдущей задаче.

Задача 3

- Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но на этот раз неизвестно, в какую сторону. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. (Саму монету определять не нужно.)
- **Решение.** Положим на каждую чашу по 50 монет. Если чаши будут весить одинаково, то оставшаяся монета фальшивая, а монеты, которые лежат на чашах, настоящие. Чтобы узнать, тяжелее или легче весит фальшивая настоящей, достаточно сравнить ее с любой настоящей монетой. Если же одна из чаш весит больше другой, то возьмем ее и разобьем на две кучки по 25 монет. Если они весят одинаково, то фальшивая монета была на другой чаше, значит, фальшивая легче. Если же одна из чаш перевесит, то фальшивая монета была в этих 50, т.е. фальшивая тяжелее.

Задача 4

- Имеются четыре гири. Одна из них большая и тяжелая, вторая поменьше и полегче, третья — еще меньше и еще легче, а четвертая — самая маленькая и самая легкая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (каждый раз берется любая из гирь и ставится на любую чашку весов). Можно ли, не зная точного веса гирь, положить по одной их все на весы в таком порядке, чтобы сначала три раза перевешивала левая чашка, а последний раз — правая?
- **Решение.** Пусть самая тяжелая гиря — A , вторая — B , третья — C и четвертая — D . Сначала положим на левую чашу гирю B . Левая чаша перевесит. Затем добавим к ней гирю D . Левая чаша опять перевесит. Теперь положим на правую чашу гирю C . Т.к. B весит больше C , то левая снова перевесит. Теперь поставим гирю A на правую чашу. Т.к. $A > B$ и $C > D$, правая чаша перевесит.

Задача 5

- Есть 5 монет. Из них три настоящие, одна — фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна — фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.
- **Решение.** Первым взвешиванием сравним веса первых двух монет. Вторым — веса третьей и четвертой. Покажем, что если в обоих взвешиваниях одна из чаш перевешивала, то за оставшееся взвешивание можно установить фальшивые монеты. Действительно, тяжелая монета не может лежать на легкой чашке, а легкая на тяжелой. Также тяжелая и легкая монеты не могли участвовать в одном взвешивании. Значит, в одном взвешивании участвовали тяжелая и настоящая, а в другом — настоящая и легкая. Т.е. оставшаяся монета настоящая. Остается сравнить ее с монетой с тяжелой чаши, например, в первом взвешивании.
- Очевидно, в обоих взвешиваниях чаши не могли находиться в равновесии.
- Если же в одном из взвешиваний чаши находились в равновесии, то на ней лежали две настоящие монеты. Теперь взвесим настоящую и оставшуюся. Мы можем узнать тип этой монеты. А далее узнаем тип монет на чашах, находившихся в одном из первых двух взвешиваний не в равновесии.

Задача 6

- В 9 мешках лежат настоящие монеты (по 10 г), а в одном — фальшивые (11 г). Одним взвешиванием на двухчашечных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивые монеты. (Стрелка показывает, на сколько масса монет на «тяжёлой» чашке больше, чем на «лёгкой».)
- **Решение.** Пронумеруем мешки числами от 1 до 10. Из i -го мешка возьмем i монет и положим на левую чашку. Ясно, что если бы все монеты были настоящими, то левая чаша была бы на 550 г тяжелее правой. А так она будет тяжелее правой на $550 + i$ г, где i — номер мешка, из которого взяты фальшивые монеты.

Задача 7

Имеются 64 монеты, все разные по весу. За не более, чем 94 взвешивания, определите самую легкую и самую тяжелую монеты.

- **Решение.** Разобьем все монеты на 32 пары монет. Далее найдем в каждой паре легкую и тяжелую монету (это делается за одно взвешивание). Очевидно, что самая легкая монета будет среди легких, а самая тяжелая среди тяжелых. Действительно, самая легкая монета легче любой другой, а, значит, в своей паре она будет легкой. Аналогично с тяжелыми. У нас осталось $94 - 32 = 62$ взвешивания.
- Теперь возьмем все «легкие» монеты. Покажем, как за 31 взвешивание определить среди них самую легкую монету. Сначала положим на каждую чашу по монете. А далее будем повторять следующую операцию: после взвешивания будем убирать тяжелую монету, и класть вместо нее любую монету, которая еще не участвовала во взвешиваниях. Ясно, что всего будет проведено 31 взвешивание. А монета, которая останется на весах и будет самой легкой.
- Аналогично за 31 взвешивание определим самую тяжелую монету.