5.7.Двойственные задачи ЛП

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, *называемая двойственной к исходной.*

Пусть дана задача ЛП.

Максимизировать линейную функцию

$$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \to \max \quad (5.9)$$

При ограничениях

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m,
\end{cases}
\qquad (5.10)
$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Или в матричном виде

$$
\begin{aligned}
& f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \max \\
& \underline{A}x \le \bar{b} \\
& \bar{x} \ge 0
\end{aligned}
$$

Двойственная к ней задача формулируется следующим образом *Минимизировать линейную функцию*

$$z(\overline{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min \quad (5.11)$$

при ограничениях

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n,
\end{cases}
\qquad (5.12)
$$

$$
y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, m}
$$

или в матричном виде

$$
\begin{aligned}
& z(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to \min \\
& \underline{A}^T y \ge c \\
& y \ge 0
\end{aligned}
$$

Задачи (5.9), (5.10) и (5.11), (5.12) *образуют пару взаимодвойственных задач*, и любая из них может рассматриваться как исходная.

Решать исходную или двойственную задачу – вопрос лишь удобства

Математические модели двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В табл. 5.13, 5.14 приведены их матричные формы записи

5.7.1.Симметричные задачи

В симметричных задачах *система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами*, причем *на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.*

Таблица 5.13

Симметричные задачи

	Прямая	Двойственная
1	$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \max$ $A\bar{x} \le \bar{b}$ $\bar{x} \ge 0$	$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to \min$ $A^T\bar{y} \ge \bar{c}$ $\bar{y} \ge 0$
2	$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \min$ $A\bar{x} \ge \bar{b}$ $\bar{x} \ge 0$	$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to \max$ $A^T\bar{y} \le \bar{c}$ $\bar{y} \ge 0$

5.7.2. Несимметричные задачи

В несимметричных двойственных задачах *система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а в двойственной - в виде неравенств,* причем в последней *переменные могут быть и отрицательными.*

Таблица 5.14

Несимметричные задачи

	Прямая	Двойственная
1	$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \max$ $A\bar{x} = \bar{b}$ $\bar{x} \geq 0$	$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to \min$ $A^T \bar{y} \geq \bar{c}$
2	$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \min$ $A\bar{x} = \bar{b}$ $\bar{x} \geq 0$	$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to \max$ $A^T \bar{y} \leq \bar{c}$

Пример 5.11. Даны прямые задачи. Построить двойственные к ним задачи.

а) $f(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Рассматриваемая задача относится к симметричным двойственным задачам на отыскание максимального значения целевой функции.

Используем общие правила составления двойственных задач. Так как в задаче на максимум ограничения неравенства должны иметь вид « $\leq$ », то умножим второе ограничение-неравенство на -1.

Исходная задача запишется в виде

$$f(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \leq -19, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Найдем соответствующую двойственную задачу (строка 1, табл. 5.13). Введем вектор двойственных переменных размерности 3 (по числу уравнений системы ограничений) .

$$\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)^T.$$

Соответствующие векторы и матрица ограничений имеет вид:

$$\bar{c} = (1,\ -2, 5) \qquad \bar{b} = (18, -19, 20)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Запишем двойственную задачу. Найти минимум функции

$$g(\overline{y}) = (\overline{b}, \overline{y}) = 18y_1 - 19y_2 + 20y_3 \to \min$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -2, \\ 4y_1 - 6y_2 - 3y_3 \geq 5, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Укажем еще один метод, позволяющий значительно облегчить процесс построения двойственных задач.

Каждому ограничению прямой задачи поставим в соответствие двойственные переменные.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \le -19, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20,. \end{array}\right. \quad \begin{array}{||l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Чтобы получить, например, первое ограничение двойственной задачи, надо найти сумму произведений элементов, стоящих в столбце x_1, на соответствующие двойственные переменные. Результат $2y_1 - 5y_2 + 2y_3$.

Считаем, что эта сумма не меньше $c_1 = 1$:

$$2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 1.$$

Аналогично составляются и остальные ограничения двойственной задачи.

$$b) \quad f(\bar{x}) = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 7, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Каждому ограничению прямой задачи поставим в соответствие двойственные переменные

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 \geq 8, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 5x_1 - 4x_2 + \ \ x_3 \geq 7, \end{array}\right. \quad \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right.$$

Составим двойственную задачу:

$$g(\overline{y}) = 8y_1 + 10y_2 + 7y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 + 5y_3 \le -3, \\ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 \le 4, \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 \le -6, \\ y_1, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Переменная y_2, соответствующая ограничению-равенству

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$$

может быть любого знака.

5.7.3. Первая теорема двойственности

Если из двух задач (исходной и двойственной) одна имеет решение, то другая задача также имеет решение, причем *максимальное значение целевой функции исходной задачи и минимальное значение двойственной задачи численно равны*

$$f_{\max} = z_{\min}.$$

Если же одна из задач не имеет оптимального решения, то система ограничений двойственной задачи противоречива

5.7.4. Экономическая интерпретация двойственной задачи.

Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - оптимальное решение прямой задачи, а $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – оптимальное решение двойственной задачи

На основании первой теоремы двойственности $(f_{\max} = z_{\min})$ можно записать

$$f_{\max} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m .$$

Найдем

$$\frac{\partial f_{\max}}{\partial b_j} = y_j , \quad \partial f_{\max} = y_j \partial b_j .$$

Учитывая, что функция $f_{\max}$ линейная, получим

$$\Delta f_{\max} = y_j \Delta b_j . \quad (5.13)$$

Из последней формулы следует: значения переменных y_j в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_j системы ограничений прямой задачи на величину $f_{\max}$.

Пример 5.12. Для производства двух видов продукции предприятие использует четыре вида сырья S_1, S_2, S_3, S_4.

S_1

Затраты сырья на единицу каждого вида продукции, прибыль и запасы сырья даны в табл.

Вид продукции	Виды сырья				Прибыль
	S_1	S_1	S_1	S_1	
I	2	2	0	3	7
II	3	1	3	0	5
Запасы	19	13	15	18	

Составить план производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Математическая модель прямой задачи

Обозначим через x_1, x_2 - количество единиц продукции, соответственно I и II видов.

Тогда задача заключается в следующем:

максимизировать целевую функцию

$$f(x) = 7x_1 + 5x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Запишем задачу в матричном виде.

$$f(\overline{x}) = (\overline{c}, \overline{x}) \to \max,$$

$$A\overline{x} \le \overline{b},$$

$$\overline{x} \ge 0,$$

где $\overline{x} = (x_1, x_2)^T$ - вектор неизвестных,

$\overline{c} = (7, 5)$ - вектор коэффициентов целевой функции,

$\overline{b} = (19, 13, 15, 18)^T$ - вектор правых частей системы ограничений,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- матрица коэффициентов системы ограничений.

Решение прямой задачи дает оптимальный план выпуска продукции I и II видов.

Поставим в соответствие прямой задаче двойственную задачу.

Пример 5.13. Предприятию необходимо определить минимальное суммарное количество сырья каждого из видов

$$S_1, S_2, S_3, S_4,$$

применив прежнее условие примера 5.12.

Математическая модель двойственной задачи

В качестве переменных двойственной задачи возьмем y_1, y_2, y_3, y_4, *представляющие собой условные оценки запасов сырья*

Представим двойственную задачу в матричном виде

$$\begin{aligned} &g(\overline{x}) = (\overline{b}, \overline{y}) \to \min, \\ &A^T \overline{y} \geq c, \qquad\qquad (5.14) \\ &\overline{y} \geq 0, \end{aligned}$$

где $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ - вектор двойственных переменных;

$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ - транспонированная матрица коэффициентов системы ограничений

Раскрывая соотношение (5.14) можно сформулировать двойственную задачу так:

найти минимум целевой функции

$$z(\overline{y}) = (\overline{b}, \overline{y}) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3y_1 + \quad y_2 + 3y_3 \geq 7, \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 5, \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Чтобы найти решение этих задач решим одну из них – прямую, т.к. система ограничений этой задачи содержит лишь неравенства « $\leq$ ». Решение находим симплексным методом.

Приведем задачу к каноническому виду

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 3x_2 + x_5 = 15 \\ 3x_1 + x_6 = 18 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

$$f(x) = 7x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Запишем систему ограничений в векторном виде

$$\overline{A_1}x_1 + \overline{A_2}x_2 + \overline{A_3}x_3 + \overline{A_4}x_4 + \overline{A_5}x_5 + \overline{A_6}x_6 = \overline{A_0} \quad (5.14)$$

где

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{A}_0 = \begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Составим первую симплекс- таблицу

	c_j	7	5		
$\overline{C_B}$		x_1	x_2	$\overline{A_0}$	
0	x_3	2	3	19	19/2=9,5
0	x_4	2	1	13	13/2=6,5
0	x_5	0	3	15	
0	x_6	3	0	18	18/3=6, *min*
	f	-7	-5	0	
		Δ_1	Δ_2	Q	

Поскольку отыскивается максимум задачи, то критерий оптимальности для плана не выполнен, т.к. в f - строке имеются отрицательные оценки.

Дальнейшие результаты пошагового решения задачи представлены в табл. 5.15 – 5.17.

Таблица 5.15

	c_j	0	5		
$\overline{C_B}$		x_6	x_2	$\overline{A_0}$	
0	x_3	-2/3	3	7	7/3=2,3
0	x_4	-2/3	1	1	1/1=1, *min*
0	x_5	0	3	15	15/3=3
7	x_1	1/2	0	6	
	f	7/3	-5	42	
		Δ_6	Δ_2	Q	

Таблица 5.16

$\overline{C_B}$	c_j	0	0		
		x_6	x_4	$\overline{A_0}$	
0	x_3	4/3	-3	4	4 : 4/3=3, *min*
5	x_2	-2/3	1	1	
0	x_5	2	-3	12	12/2=6
7	x_1	1/3	0	6	6 : 1/3=18
	f	-1	5	47	
		Δ_6	Δ_2	Q	

Таблица 5.17

$\overline{C_Б}$	c_j	0	0	
		x_3	x_4	$\overline{A_0}$
0	x_6	3/4	-9/4	3
5	x_2	1/2	-1/2	3
0	x_5	-3/2	3/2	6
7	x_1	-1/4	3/4	5
	f	3/4	11/4	50
		Δ_3	Δ_4	Q

В последней таблице f - строка не содержит отрицательных оценок, что свидетельствует об оптимальности полученного решения:

$$\overline{x^*} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6) = (5, 3, 0, 0, 6, 3),$$

$$f_{\max} = f(\overline{x^*}) = (\overline{C_B} \cdot \overline{A_0}) = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 7 \cdot 5 = 50 \text{ (ед.)}.$$

Оптимальное решение двойственной задачи может быть получено из оптимального решения прямой задачи.

Так как прямая задача имеет решение, то на основании теоремы о двойственности двойственная задача также разрешима. Ее решение может быть найдено из формулы

$$\overline{y^*} = \overline{C_{\text{B}}} \cdot D^{-1},$$

где D - матрица, составленная из компонент векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

В нашем примере в последней симплекс-таблице базисными переменными являются

$$x_6, x_2, x_5, x_1.$$

Соответствующие этим переменным векторы $\overline{A}_6, \overline{A}_2, \overline{A}_5, \overline{A}_1$ в разложении (5.14) используются для формирования столбцов матрицы D

$$D = (\overline{A}_6, \overline{A}_2, \overline{A}_5, \overline{A}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0,75 & -2,25 & 0 & 1 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ -1,5 & 1,5 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0,75 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\overline{C}_{\text{B}} = (0, 5, 0, 7)$, то

$$\overline{y^*} = \overline{C_{\text{B}}} \cdot D^{-1} = (0,75;\ 2,75;\ 0;\ 0)$$

При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$z_{\min} = z(\overline{y^*}) = (\bar{b}, \overline{y^*}) =$$

$$= 19 \cdot 0{,}75 + 13 \cdot 2{,}75 + 15 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = 50 \ \ (ed.)$$

совпадает с максимальным значением $f_{\max}$ прямой задачи.

Проведем анализ полученного оптимального решения двойственной задачи.

Рассмотрим экономическое содержание двойственных оценок.

Предположим, что запасы сырья увеличены на 1единицу.

Пользуясь формулой (5.13), найдем

$$\Delta f_{\max} = y_3 \Delta b_3 = 0 \cdot 1 = 0;$$
$$\Delta f_{\max} = y_4 \Delta b_4 = 0 \cdot 1 = 0.$$

Нулевые оценки S_3 и S_4 означают, что данное сырье не полностью используется (*является недефицитным*) и дальнейшее его увеличение не повлияет на оптимальный план выпуска продукции и сумму прибыли.

$$\Delta f_{\max} = y_1 \Delta b_1 = 0{,}75 \cdot 1 = 0{,}75 \quad (ed);$$

$$\Delta f_{\max} = y_2 \Delta b_2 = 2{,}75 \cdot 1 = 2{,}75 \quad (ed).$$

Если увеличить запасы сырья S_1 на 1 (ед.), то прибыль увеличится на 0,75 (ед.).

Если увеличить запасы сырья S_2 на 1 (ед.), то прибыль увеличится на 2,75 (ед.).

Запасы сырья S_1 и S_2 *полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными и сдерживают рост целевой функции.*

Здесь следует отметить, что оценки позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно небольших изменений объема ресурсов. При резких изменениях сами оценки могут стать другими.