СТАТИСТИКА

Введение в теорию вероятности

Лекция 2. Формулы Бейеса, Бернулли.

Автор: Равичев Л.В.
РХТУ им. Д.И.Менделеева
Кафедра управления технологическими инновациями
Москва - 2013

Вероятность гипотез. Формула Бейеса

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая ***теорема гипотез***, или ***формула Бейеса***.

Пусть событие **A** может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (**гипотез**) $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, …, $\mathbf{B_n}$, которые образуют полную группу событий. Если событие **A** уже произошло, то вероятности гипотез могут быть **переоценены** по формуле Бейеса

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)} \quad (i = 1,2,\dots, n)$$

где

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Вероятность гипотез. Формула Бейеса

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй - 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Событие **A** - деталь отличного качества. Гипотезы: $\mathbf{B_1}$ **-** деталь произведена первым автоматом; $\mathbf{B_2}$ **-** деталь произведена вторым автоматом.

1) $\mathbf{P(B_1)=2/3;\ P(B_2)=1/3.}$

2) $\mathbf{P(A|B_1)=0{,}6;\ P(A|B_2)=0{,}84.}$

3) $\mathbf{P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1)+P(B_2) \cdot P(A|B_2)=2/3 \cdot 0{,}6+1/3 \cdot 0{,}84=0{,}68.}$

4) $$\mathbf{P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = 10/17.}$$

Вероятность гипотез. Формула Бейеса

Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая каж-
дый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого
стрел-
ка $\mathbf{P(A_1)=0,8}$, для второго $\mathbf{P(A_2)=0,4}$. После стрельбы в мишени обнаружена
од-
на пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому
стрелку.

1) Гипотезы: $\mathbf{B_1}$ **-** оба стрелка промахнутся, $\mathbf{P(B_1)=0,2 \cdot 0,6=0,12;}$

$\mathbf{B_2}$ **-** оба стрелка попадут, $\mathbf{P(B_2)=0,8 \cdot 0,4=0,32;}$

$\mathbf{B_3}$ **-** попадет первый стрелок, $\mathbf{P(B_3)=0,8 \cdot 0,6=0,48;}$

$\mathbf{B_4}$ **-** попадет второй стрелок, $\mathbf{P(B_4)=0,2 \cdot 0,4=0,08;}$

2) После свершившегося события условные вероятности:

$$\mathbf{P(A|B_1)=0;\ \ P(A|B_2)=0;\ \ P(A|B_3)=1;\ \ P(A|B_4)=1.}$$

3) Вероятность гипотез $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{B_4}$

$$\mathbf{P(B_3|A) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1+0,08 \cdot 1} = 6/7;\qquad P(B_4|A) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1+0,08 \cdot 1} = 1/7.}$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если проводятся испытания, при которых вероятность появления события **A** в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют ***независимыми относительно события A.***

Вероятность того, что в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна **p** (**0< p <1**), событие наступит ровно **k** раз (безразлично в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

где $q = 1 - p$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Основные формулы комбинаторики.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же **n** различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок:

$$\boxed{P_n = n!}$$ где **n! = 1▪2▪3▪... ▪n.**

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр **1, 2, 3,** если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Размещениями называют комбинации, составленные из **n** различных элементов по **k** элементов. Число всех возможных размещений:

$$\boxed{A_n^k = n(n - k + 1)}$$

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

$$A_6^2 = 3! = 6 \cdot 5 = 30$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Основные формулы комбинаторики.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из **n** различных элементов по **k** элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 различных деталей?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-8)!} = 45$$

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^k = P_k C_n^k$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна **p=0,75**. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение любых 4 суток не превысит нормы.

1) $p = 0{,}75$; $q = 1 - p = 0{,}25$.

2) $P_6(4) = C_6^4\, p^4 q^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0{,}75)^4 (0{,}25)^2 = 0{,}30$

Для больших **n** формула Бернулли требует выполнения действий над большими числами. Например, если **n=50, k=30, p=0,1** то

$$P_{50}(30) = \frac{50!}{30!20!} (0{,}1)^{30} (0{,}9)^{20}$$