Угол между плоскостями

Определение. Пусть данные плоскости пересекаются.

Проведем плоскость , перпендикулярную прямой их пересечения.

Она пересекает данные плоскости по двум прямым.

Угол между этими прямыми называется

углом между данными плоскостями.

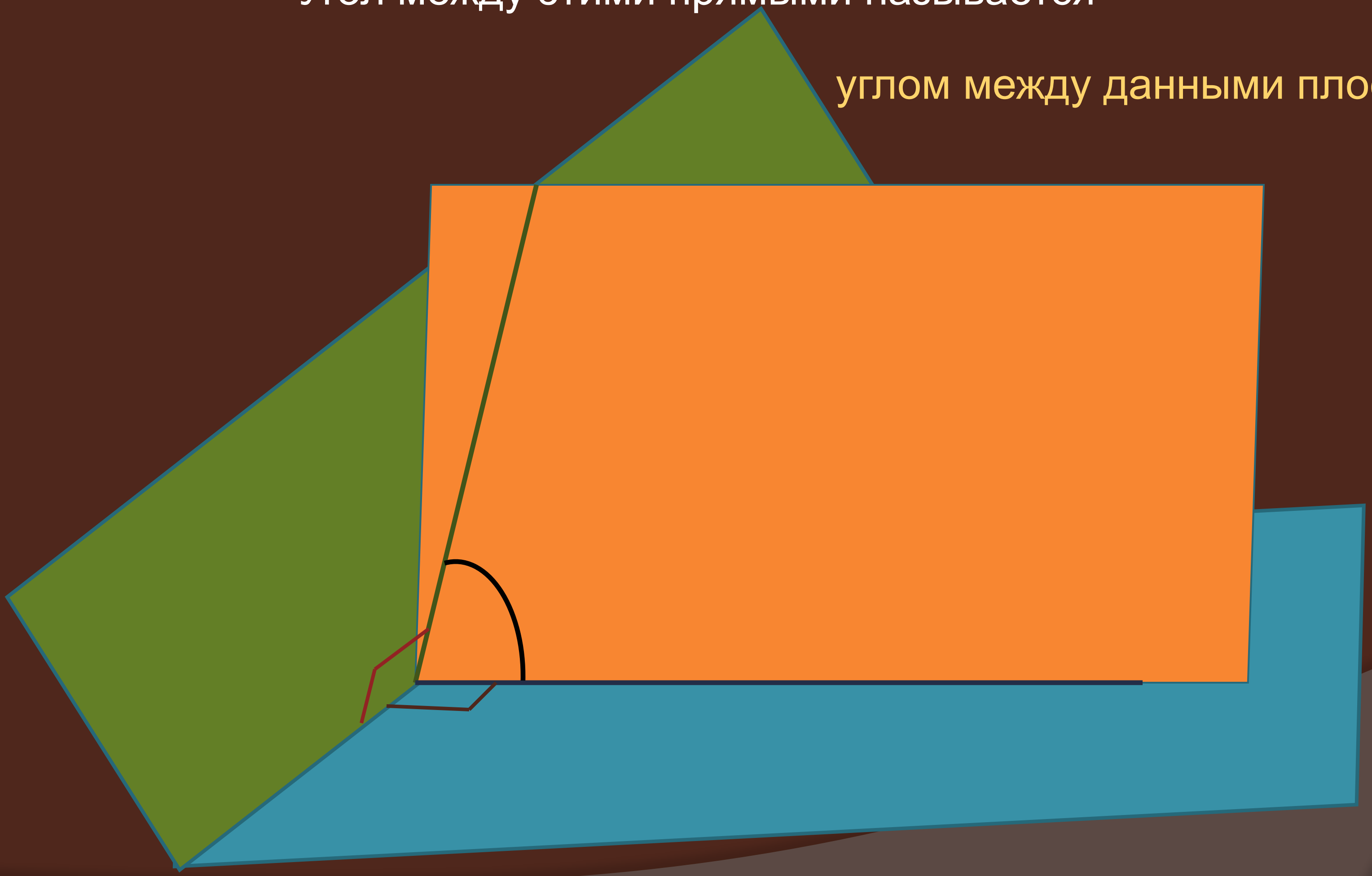


Схема построения линейного угла между плоскостями

1. Выделить линию пересечения плоскостей и определить, есть ли плоскость ей перпендикулярная

да

(использовать определение)

2. Выделить или построить прямые пересечения этой плоскости с данными плоскостями.
3. Сделать вывод, что угол между этими прямыми является линейным углом.

нет

(использовать теорему о трех перпендикулярах)

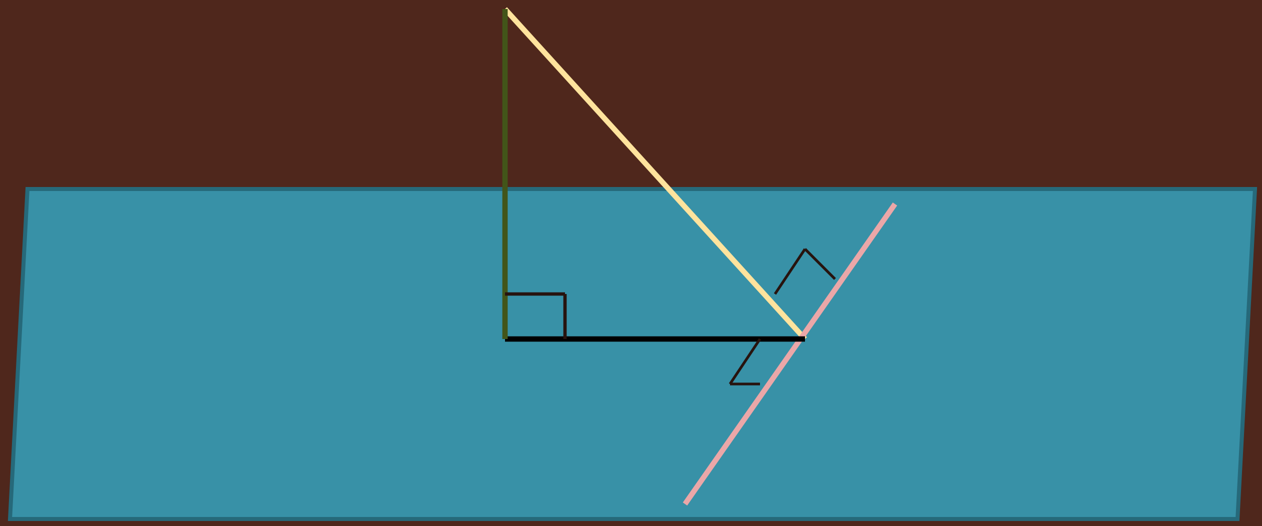
2. Выделить или построить первый перпендикуляр
3. Определить второй перпендикуляр
4. Построить третий перпендикуляр
5. Сделать вывод, что угол между построенными наклонной и ее проекцией является линейным углом

(использовать определение линейного угла)

2. Выделить или построить в одной из данных плоскостей перпендикуляр к линии пересечения плоскостей
3. Выделить или построить перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, лежащий в другой плоскости и проходящий через основание перпендикуляра из п. 2
4. Сделать вывод, что угол между построенными перпендикулярами является линейным углом между двумя плоскостями

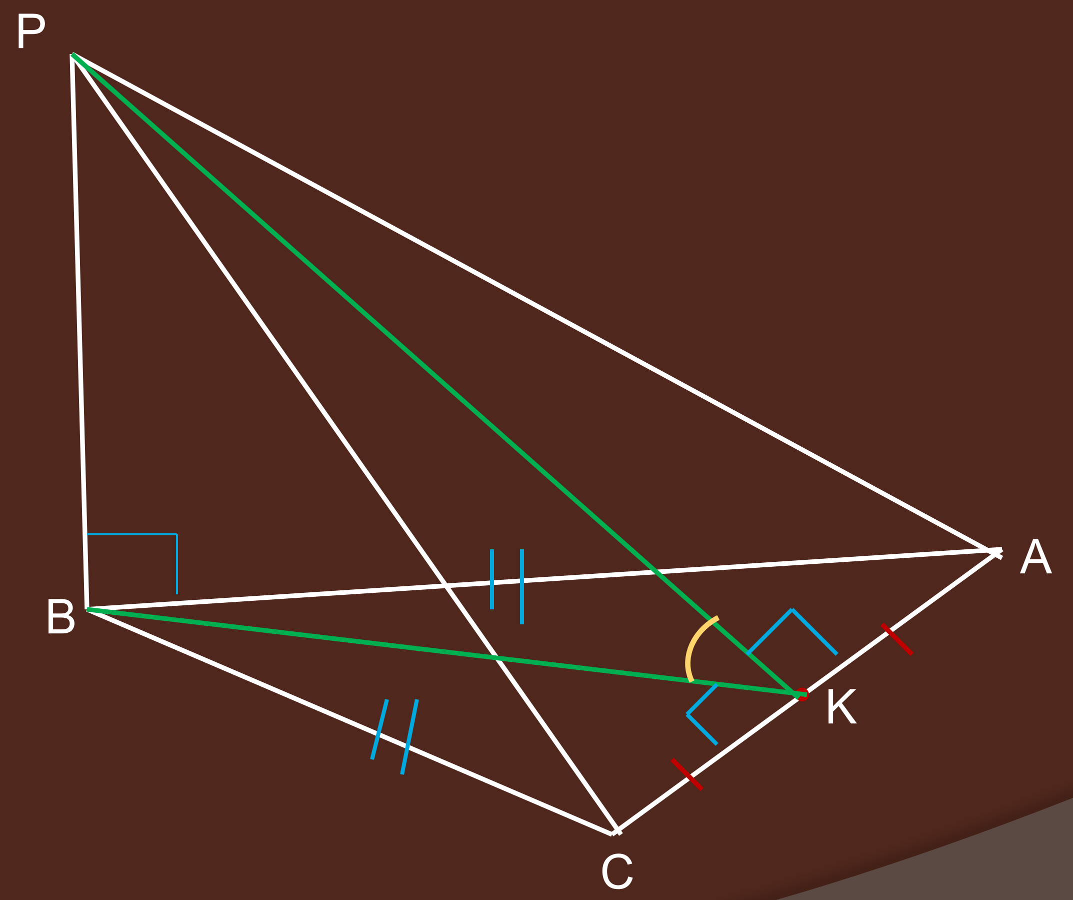
Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.

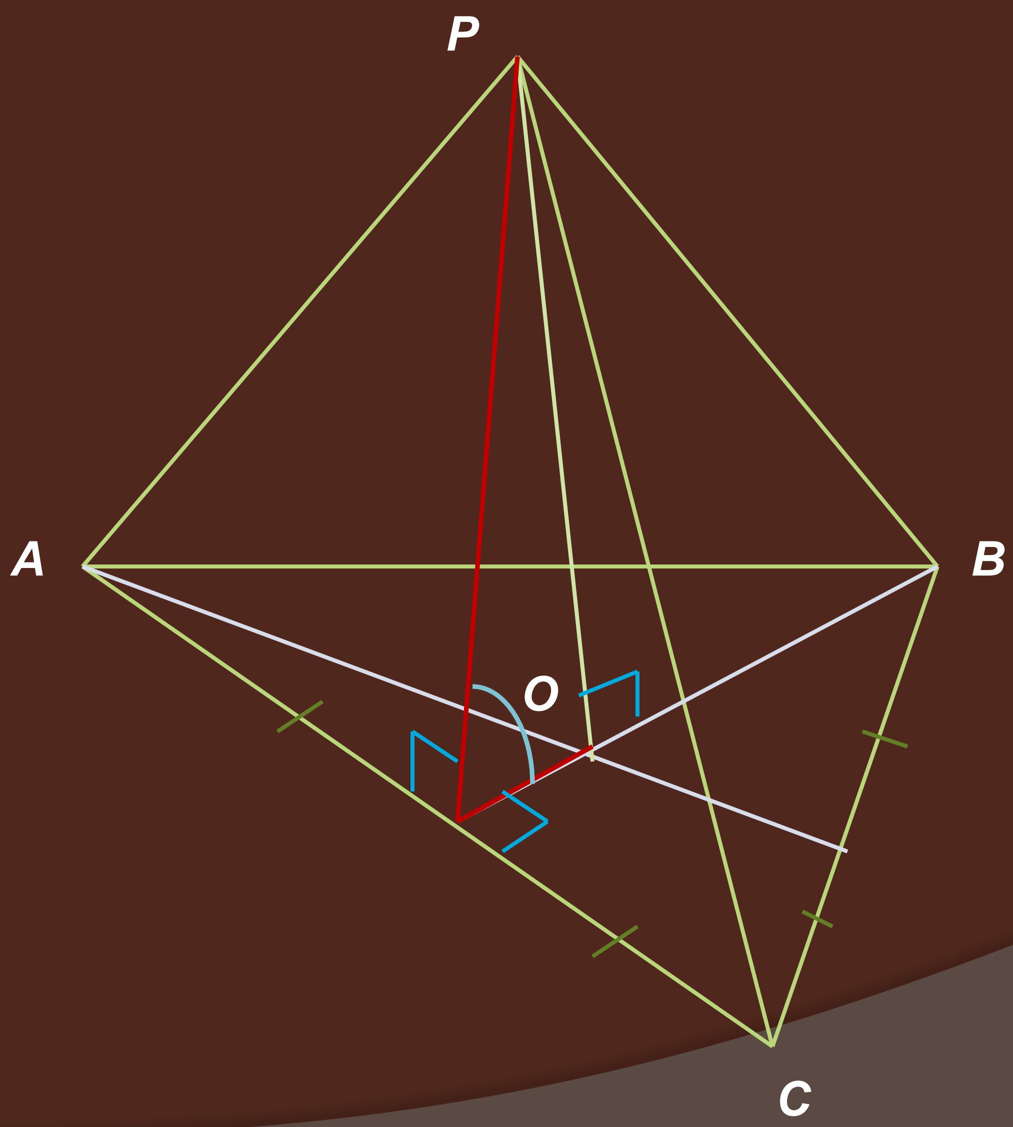


И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

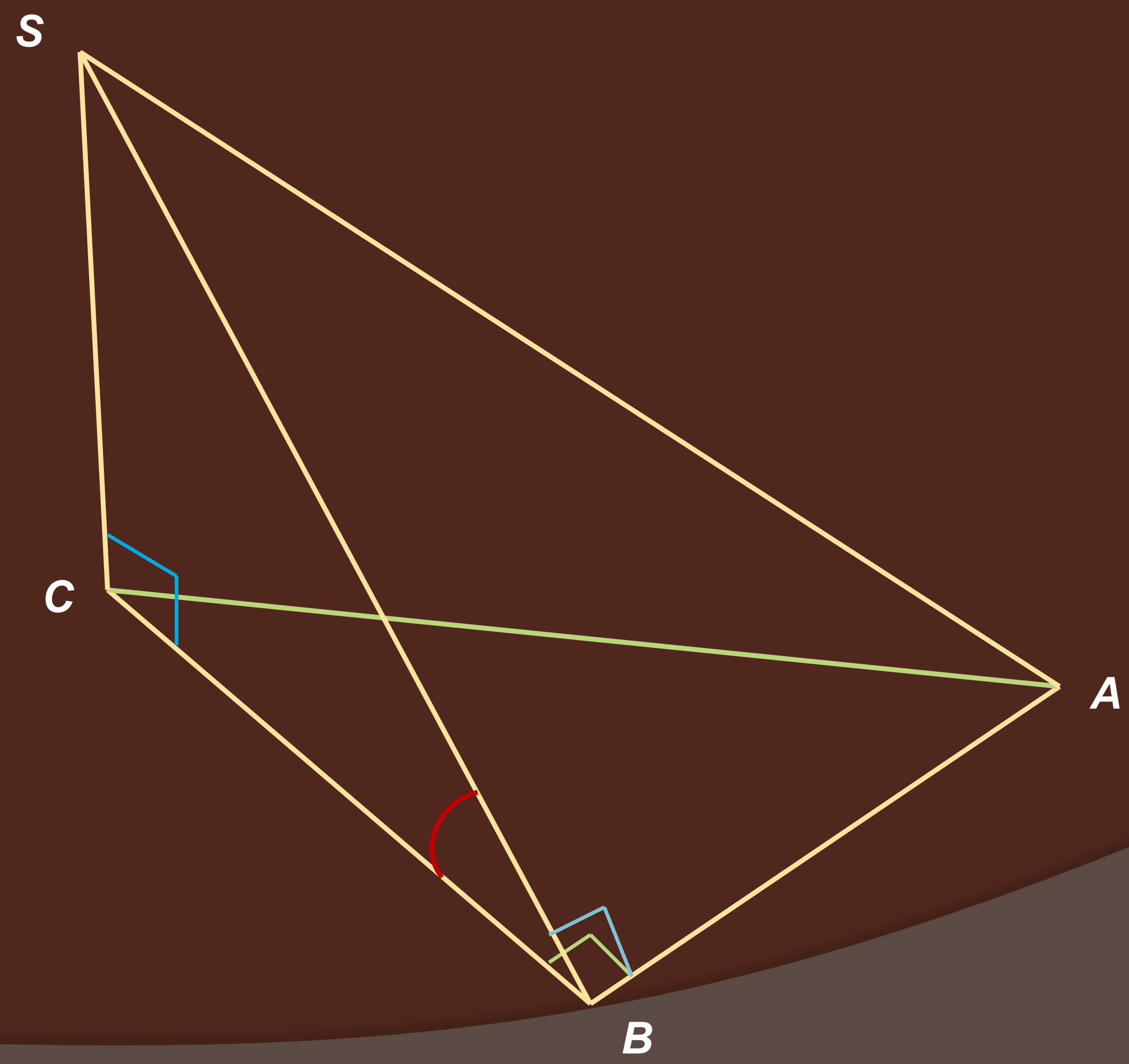
Построить линейный угол двугранного угла с ребром АС, если в пирамиде PABC AB=BC , прямая PB перпендикулярна плоскости ABC



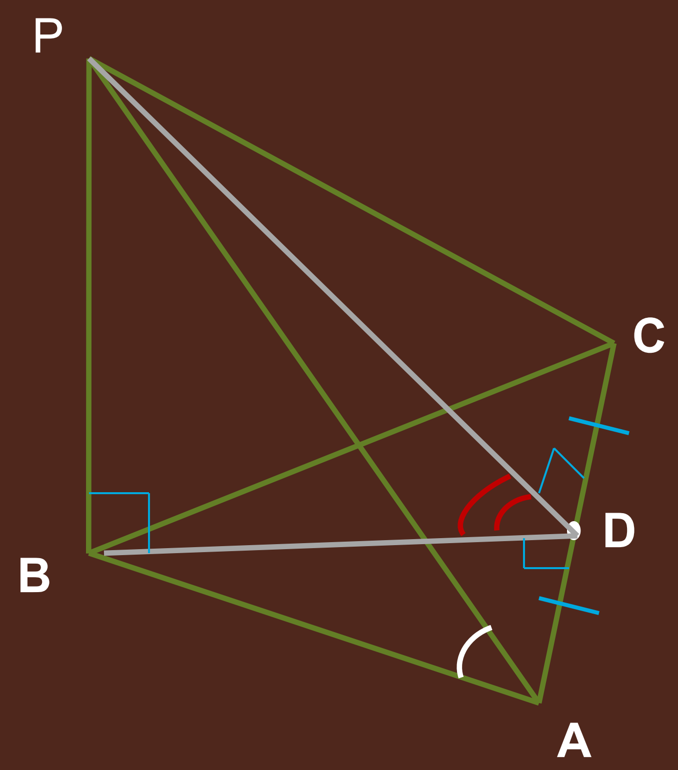
Построить линейный угол двугранного угла с ребром АС, если в пирамиде РАВС грань АВС- правильный треугольник, О- точка пересечения медиан, прямая РО перпендикулярна плоскости АВС



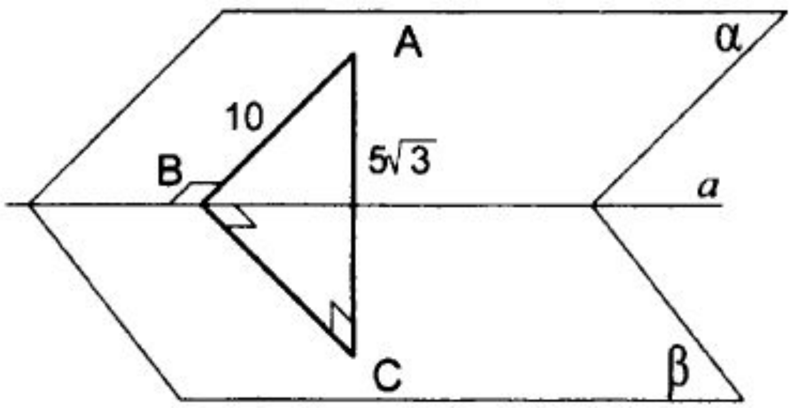
Дана пирамида SABC, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами AB и BC, CS перпендикулярна плоскости основания. Построить угол между плоскостью основания и плоскостью SAB.



PABC- пирамида, основание которой- правильный треугольник. Какой из отмеченных углов является линейным углом двугранного угла с ребром AC, если D-середина отрезка AC, прямая PB перпендикулярна плоскости ABC.



1



№1

Дано: $\alpha \cap \beta = \text{a}; \text{AB} = 10; \text{AC} = 5\sqrt{3}$

Найти: $< (\alpha; \beta) = ?$

Решение: 1) $< (\alpha; \beta) = <$ ABC (так как AB$\perp$ a; BC$\perp$a);

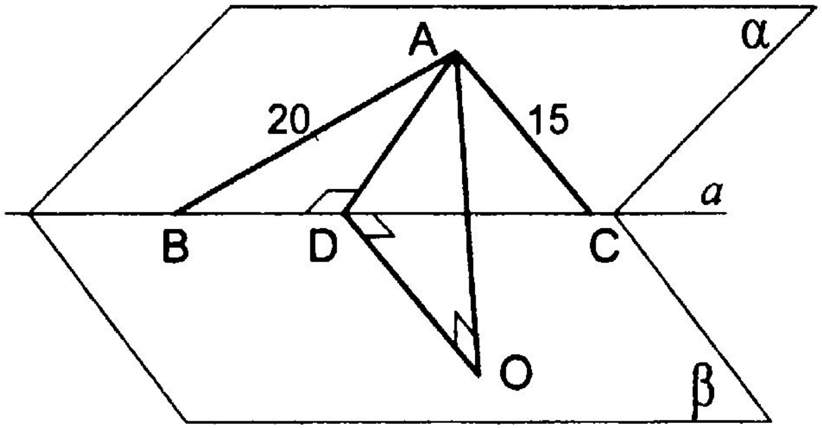
2)Так как AC$\perp$BC, то ΔACB – прямоугольный с $< C = 90°$.

3)$\sin < ABC = \frac{AC}{AB}; \sin < ABC = \frac{5\sqrt{3}}{10}; \sin < ABC = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$<ABC = \text{argsin} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60°$

Ответ: $<ABC = 60°$

2



Дано: $\angle BAC = 90°$, $AO = 6$.

Дано: $\alpha \cap \beta = a$; $< BAC=90°$; $AO = 6$

Найти: $< (\alpha;\beta) = ?$

Решение: 1) $< (\alpha;\beta) = < ADO$(так как $AD \perp a$; $DO \perp a$);

2)Так как $AO \perp DO$, то $\Delta\, ADO$ − прямоугольный с $< O = 90°$.

3)$\sin < ADO = \frac{AO}{DO}$, значит нужно найти DA и AO!

4) Рассмотрим Δ BAC - прямоугольный с < BAC = 90°.

По теореме Пифагора, $BC=\sqrt{AB^2 + AC^2}$; $BC=\sqrt{400 + 225}=25$

5) $S_{\Delta\, BAC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$; $2 \cdot S_{\Delta\, BAC} = AD \cdot BC$

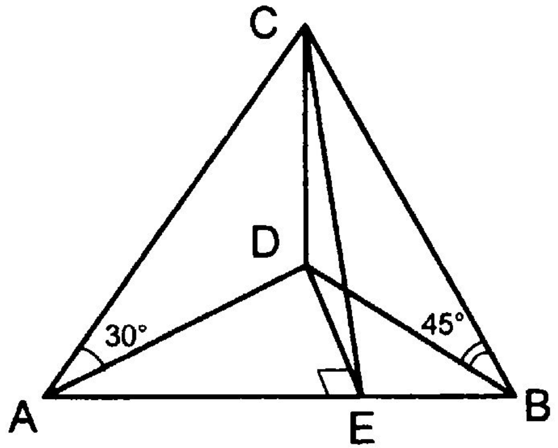
$S_{\Delta\, BAC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$, тогда $AB \cdot AC = АД \cdot BC$; $AD=\frac{AB \cdot AC}{BC}$;

$AD=\frac{20 \cdot 15}{25} = 4 \cdot 3 = 12$

6) $\sin < ADO = \frac{AO}{DA}$; $\sin < ADO = \frac{6}{12}$; $<ADO=30°$.

Ответ: $<ADO= 30°$.

5



Дано: прямая CD перпендикулярна плоскости ADB, $\angle ADB = 90°$.
Найти угол между плоскостями ACB и ADC.

Дано: $CD \perp (ADB), < ADB = 90°; < DAC = 30°;$

$< CBD = 45°$

Найти: $< \left((ACB);(ADB)\right) = ?$

Решение: 1) $DE \perp AB$ (во условию); $CE \perp AB$ (по теореме о трёх перпендикулярах), значит $< (ACB; ADB) =< CED$

2) Пусть CD=a, тогда DB=a (так как $\Delta\, CDB$ – равнобедренный)

3) Рассмотрим $\Delta\, CDA$ – прямоугольный $< CDA = 90°$,тогда

$\text{tg}\, 30° = \frac{CD}{AD}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{AD}$; AD= $a\sqrt{3}$

4) Из $\Delta\, AED$; $DE^2 = AD^2 - AE^2$

Из $\Delta\, BED$; $DE^2 = BD^2 - BE^2$, тогда $AD^2 - AE^2 = BD^2 - BE^2$

$(a\sqrt{3})^2 - (2a - x)^2 = a^2 - x^2$, пусть x = BE; AE = 2a - x

$4ax = 2a^2$

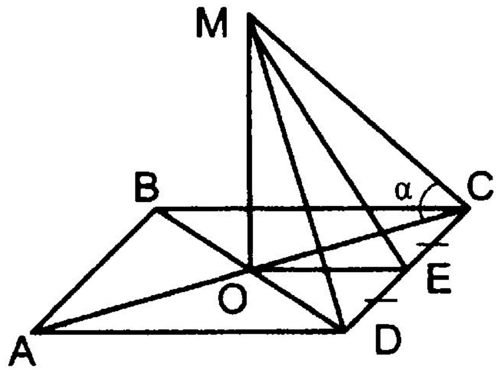
$x = \frac{a}{2}$, то есть BE $= \frac{a}{2}$, тогда $DE^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$; DE$=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

5) $\text{tg} < CDE = \frac{CD}{DE}$; $\text{tg} < CDE = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$< CDE = \text{arctg}\,(\frac{2\sqrt{3}}{3})$

Ответ: $< CDE = \text{arctg}\,(\frac{2\sqrt{3}}{3})$

6



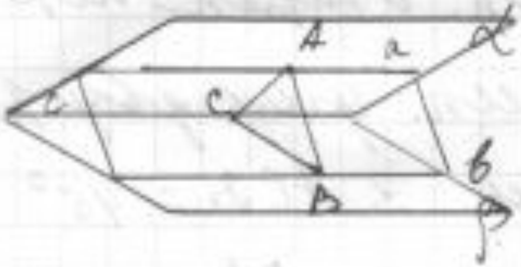
Дано: $ABCD$ – квадрат. Прямая MO перпендикулярна плоскости ABC. Найти угол между плоскостями MDC и ABC.

6. $\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha)$. Указание. Пусть $MO = a$, тогда $OC = a\,\mathrm{ctg}\alpha$,

$OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\mathrm{ctg}\,\alpha$. Из ΔOME $\mathrm{tg}MEO = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha$.

Задача №1

№1



Пусть $\alpha \cap \beta = c$, $a \parallel c$, $a \subset \alpha$

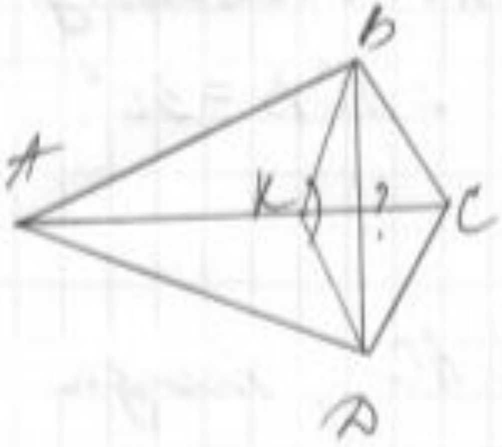
в – проекция а на β.

Выберем точку $A \in a$, проведем $AB \perp \beta$, $B \in в$ и $AC \perp c$. По теореме о трех перпенд., $BC \perp c$ $\Rightarrow$ $\angle ACB$ – лин. угол двугран. угла между α и β. По условию задачи, $AB = BC$, значит $\triangle ABC$ – прямоугольный и равнобедр. $\Rightarrow$ $\angle ACB = \angle CAB = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

Задача №2

№2



$S_{ABC} = 15\text{ см}^2$, $S_{ADC} = 40\text{ см}^2$, $AC = 10\text{ см}$.

Проведем $BK \perp AC \Rightarrow KD \perp AC \Rightarrow$

$\angle BKD = 60^\circ$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK \Rightarrow AC \cdot BK = 2 S_{ABC}$

$BK = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 15}{10} = 3$ (см)

$S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot KD \Rightarrow AC \cdot KD = 2S_{ADC} \Rightarrow KD = \frac{2S}{AC} =$

$= \frac{2 \cdot 40}{10} = 8$ (см). В $\triangle BKD$ $BD^2 = BK^2 + KD^2 - 2BK \cdot BD \cdot$

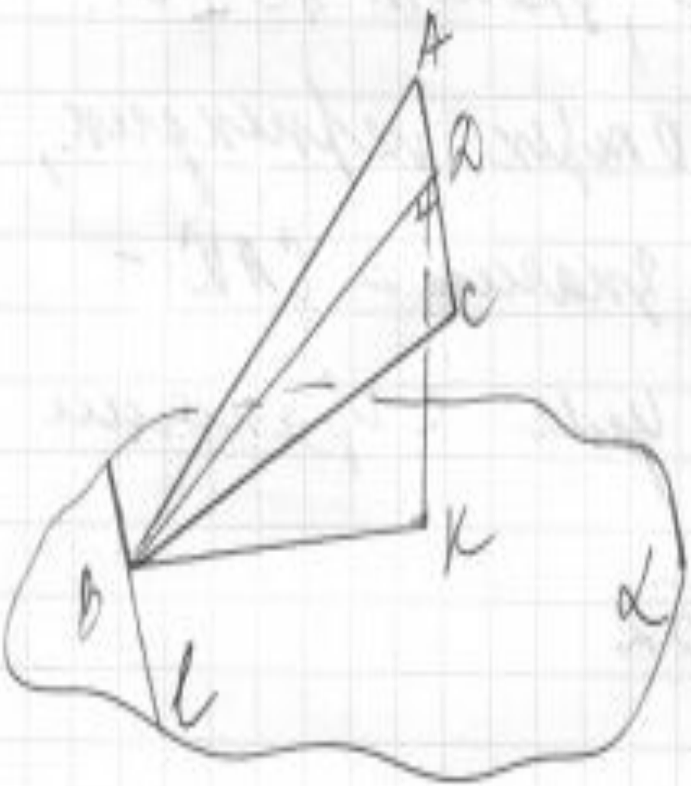
$\cdot \cos\angle K = 9 + 64 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 73 - \overset{24}{\cancel{48}} \cdot \frac{1}{2} = 49$;

$BD = \sqrt{49} = 7$ (см)

Ответ: 7 см

Задача №3

№3



Проведем BD ⊥ AC, прямую $l \subset \alpha$, $l \parallel AC$. Значит $l \perp BD$. Проведем DK ⊥ α, тогда BK – проекция BD на пл. α. По теореме о трех перпендикулярах, BK ⊥ l, значит ∠ DBK – линейный угол двугранного угла между (ABC) и α.

Домашнее задание

Выполнить С/Р № 15 по теме «Двугранный угол» , вариант А1 и вариант А2 по посадке в классе из сборника под редакцией Ершова, Голобородько; Вариант В1 и В2 №1;№2 по желанию.

Проработать презентацию по теме «Прямоугольный параллелепипед».