

Лекция 14

**СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ
И ИНТЕГРАЛЫ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОЙ
СИСТЕМЫ: ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС**

В классической механике показывается, что **существование** интегралов движения у частицы или системы частиц есть **следствие** однородности времени и однородности или изотропии пространства. Аналогичное положение имеет место и в квантовой механике, и это **позволяет получить вид операторов** тех физических величин, которые являются интегралами состояния микросистемы.

1.Однородность времени. Энергия

Пусть для изучаемой микросистемы **время однородно**.

Это означает, что в эволюции системы во времени нет **выделенных** моментов, все они для нее равнозначны. В свою очередь, состояние микросистемы определяется ее гамильтонианом \hat{H} . Так как оно со временем не меняется, гамильтониан **не должен зависеть от времени**, т.е.

$\hat{H} = \hat{H}(t)$. Поэтому $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$, а так как сам с собой он

коммутирует, т.е. $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$, соответствующая \hat{H} физическая величина, а это энергия E , должна быть **интегралом состояния**.

Можно дать определение:
физическая величина, сохранение которой есть следствие однородности времени, называется ЭНЕРГИЕЙ.

Можно ввести **формальный** оператор энергии $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

(настоящим оператором энергии является оператор Гамильтона \hat{H} , если он не зависит от времени). Тогда временное уравнение Шрёдингера можно представить в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad \hat{E} \psi = \hat{H} \psi$$

т.е. оно принимает вид уравнения Шредингера для стационарных состояний, если гамильтониан не зависит от времени. Получается, что, действительно,

вышеприведенный оператор \hat{E} можно также назвать оператором энергии. При этом коммутатор $[\hat{E}, t] = i\hbar$, т.е. такой же, как и коммутатор координаты x и оператора

проекции импульса $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

Поэтому можно также написать **соотношение неопределенностей**, являющееся аналогом соотношения неопределенностей Гейзенберга (12.9):

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t} . \quad (14.1)$$

В этой формуле ΔE понимается как некий **разброс** в величине энергии, который может иметь место при выполнении закона сохранения энергии, а Δt – временная протяженность, в течение которой этот **разброс энергии допустим**. Такое понимание соотношения (14.1) используется в квантовой теории поля, например, в квантовой электродинамике.

2. Однородность пространства. Импульс

Однородность пространства означает, что **перенос** системы вдоль определенного направления в пространстве **не меняет ее состояния**. При таком переносе все

координаты микрочастиц r_j (считаем, что их N , поэтому $j = 1, 2, \dots, N$), из которых состоит система, получают одно и тоже приращение δr . Рассмотрим, как будет при таком переносе **изменяться** волновая функция системы

$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N)$ (принимая, что $|\delta r| \ll |r_j|$, $j = 1, 2, \dots, N$).

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) \rightarrow \Psi(r_1 + \delta r, r_2 + \delta r, \dots, r_N + \delta r) =$$

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Psi}{\partial r_j} \delta r + \dots \cong$$

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) + \delta r \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Psi}{\partial r_j} = \Psi(\hat{O}_p, r_1, \dots, r_N)$$

$$\Psi(\hat{O}_p, r_1, \dots, r_N)$$

где оператор

$$\hat{O}_{tr} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial r_j} \quad (14.2)$$

можно назвать оператором **параллельного переноса** системы частиц (оператор трансляции – это отражено индексом “tr”). Так как пространство однородно, то волновая функция Ψ и преобразованная волновая функция

$\hat{\Psi}_{tr}$ описывают одно и тоже состояние. Поэтому можно

написать: $\hat{H}\hat{\Psi}_{tr} = \hat{O}_{tr}(\hat{H}\Psi)$, или $\hat{H} \cdot \hat{O}_{tr} = \hat{O}_{tr} \cdot \hat{H}$.

Подставляя сюда оператор \hat{O}_{tr} в виде (14.2), получим:

$$\hat{H} \cdot \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial r_j} \right) = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial r_j} \right) \cdot \hat{H}$$

Как отмечалось выше, если некоторый оператор коммутирует с гамильтонианом, то должен быть соответствующий этому оператору интеграл состояния.

Дадим определение:

физическая величина, сохранение которой есть следствие однородности пространства, называется импульсом.

В данном случае это будет импульс системы из N микрочастиц. Его оператор имеет вид:

$$\hat{P} = \text{const} \cdot \sum_{j=1}^N \hat{p}_j .$$

Если ввести оператор импульса

микрочастицы $\hat{p} = \text{const} \cdot \hat{p}$, то $\hat{P} = \sum_{j=1}^N \hat{p}_j$. Следовательно,

соответствующая физическая величина – импульс системы частиц, как и оператор, **будет аддитивна**, т.е. будет суммой импульсов отдельных частиц. Действительно, этим физическим свойством **обладает** импульс системы частиц.

Для нахождения величины константы можно воспользоваться **предельным переходом** от квантовой механики к **классической**. Формально этот переход осуществляется в виде предела $\hbar \rightarrow 0$. В этом случае действие оператора на волновую функцию сводится просто к умножению ее на соответствующую физическую величину, т.е.

$$\hat{p}\psi = p\psi, \quad (14.3)$$

а сама волновая функция принимает вид: $\psi = e^{iS/\hbar}$, где S – действие. Используем ее:

$$\hat{p}\psi = p\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} e^{iS/\hbar} = \frac{\hbar}{i} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial x} e^{iS/\hbar} = \frac{\partial S}{\partial x} \psi.$$

Учтено, что в классической механике $p = \frac{\partial S}{\partial x}$. Сравнение с

соотношением (12.3) показывает: $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} e^{iS/\hbar} = 1 \rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} = -i\hbar$.

В результате оператор импульса принимает уже известный вид (см. ф-лу (7.2)): $\hat{p} = -i\hbar \nabla$. Соответственно получаем уравнение на собственные функции и собственные значения оператора импульса:

$$\hat{p} \varphi(\vec{p}, r) = p \varphi(\vec{p}, r) \rightarrow \psi(\vec{p}, r) = p \varphi(\vec{p}, r)$$

Его решение: спектр непрерывный, т.е.

$$\infty < p_x, p_y, p_z < \infty \text{ и } \varphi(\vec{p}, r) = \frac{1}{(\pi \hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}$$

Проверочные вопросы к лекции **14.**

- 1.** Как следует понимать соотношение неопределенностей для энергии и времени?
- 2.** С каким свойством пространства связан такой интеграл состояния, как импульс?
- 3.** Какое определение можно дать импульсу системы?
- 4.** Напишите вид оператора импульса. Каков у него спектр собственных значений и вид нормированных собственных функций?