Лекция 14

СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ИНТЕГРАЛЫ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ: ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС

В классической механике показывается, что **существование** интегралов движения у частицы или системы частиц есть **следствие** однородности времени и однородности или изотропии пространства. Аналогичное положение имеет место и в квантовой механике, и это **позволяет получить вид операторов** тех физических величин, которые являются интегралами состояния микросистемы.

1.Однородность времени. Энергия

Пусть для изучаемой микросистемы **время однородно**. Это означает, что в эволюции системы во времени нет **выделенных** моментов, все они для нее равнозначны. В свою очередь, состояние микросистемы определяется ее гамильтонианом $\hat{H}$. Так как оно со временем не меняется, гамильтониан **не должен зависеть от времени**, т.е.

$\hat{H} \neq \hat{H}(t)$. Поэтому $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$, а так как сам с собой он коммутирует, т.е. $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$, соответствующая $\hat{H}$ физическая величина, а это энергия E, должна быть **интегралом состояния**.

Можно дать определение:

физическая величина, сохранение которой есть следствие однородности времени, называется ЭНЕРГИЕЙ.

Можно ввести **формальный** оператор энергии $\boxed{\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}}$

(настоящим оператором энергии является оператор Гамильтона $\hat{H}$, если он не зависит от времени). Тогда временное уравнение Шрёдингера можно представить в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi \Rightarrow \hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi,$$

т.е. оно принимает вид уравнения Шредингера для стационарных состояний, если гамильтониан не зависит от времени. Получается, что, действительно, вышеприведенный оператор $\hat{E}$ можно также назвать оператором энергии. При этом коммутатор $[\hat{E}, t] = i\hbar$, т.е. такой же, как и коммутатор координаты x и оператора проекции импульса $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

Поэтому можно также написать **соотношение неопределенностей**, являющееся аналогом соотношения неопределенностей Гейзенберга (12.9):

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar} \,. \qquad (14.1)$$

В этой формуле *ΔE* понимается как некий **разброс** в величине энергии, который может иметь место при выполнении закона сохранения энергии, а *Δt* – временная протяженность, в течение которой этот **разброс энергии допустим**. Такое понимание соотношения (14.1) используется в квантовой теории поля, например, в квантовой электродинамике.

2.Однородность пространства. Импульс

Однородность пространства означает, что **перенос** системы вдоль определенного направления в пространстве **не меняет ее состояния**. При таком переносе все координаты микрочастиц $\vec{r}_j$ (считаем, что их N, поэтому j = 1, 2, …, N), из которых состоит система, получают одно и тоже приращение $\delta\vec{r}$. Рассмотрим, как будет при таком переносе **изменяться** волновая функция системы $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ (принимаем, что $|\delta\vec{r}| \ll |\vec{r}_j|$, j = 1, 2, …, N).

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) \to \psi(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}, \ldots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}) =$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}_j}\delta\vec{r} + \ldots \cong$$

$$\cong \left(1 + \delta\vec{r}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial\vec{r}_j}\right)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = ,$$

$$\psi(\hat{O}_{\delta\vec{r}}\,\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$$

где оператор

$$\hat{O}_{tr} = 1 + \delta r \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial r_j} = 1 + \delta r \sum_{j=1}^{N} \nabla_j \quad (14.2)$$

можно назвать оператором **параллельного переноса** системы частиц (оператор трансляции – это отражено индексом “*tr*”). Так как пространство однородно, то волновая функция Ψ и преобразованная волновая функция $\hat{O}_{tr}\Psi$ описывают одно и тоже состояние. Поэтому можно написать: $\hat{H}(\hat{O}_{tr}\Psi) = \hat{O}_{tr}(\hat{H}\Psi)$, или $\hat{H}\cdot\hat{O}_{tr} = \hat{O}_{tr}\cdot\hat{H}$.

Подставляя сюда оператор $\hat{O}_{tr}$ в виде (14.2), получим:

$$\hat{H}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} \nabla_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{N} \nabla_j\right)\cdot\hat{H}.$$

Как отмечалось выше, если некоторый оператор коммутирует с гамильтонианом, то должен быть соответствующий этому оператору интеграл состояния.

Дадим определение:

физическая величина, сохранение которой есть следствие однородности пространства, называется импульсом.

В данном случае это будет импульс системы из N микрочастиц. Его оператор имеет вид:

$\hat{P} = const \cdot \sum_{j=1}^{N} \square_j$.Если ввести оператор импульса

микрочастицы $\hat{p} = const \cdot \square$, то $\hat{P} = \sum_{j=1}^{N} \hat{p}_j$. Следовательно,

соответствующая физическая величина – импульс системы частиц, как и оператор, **будет аддитивна**, т.е. будет суммой импульсов отдельных частиц. Действительно, этим физическим свойством **обладает** импульс системы частиц.

Для нахождения величины константы можно воспользоваться **предельным переходом** от квантовой механики к **классической**. Формально этот переход осуществляется в виде предела $\hbar \to 0$. В этом случае действие оператора на волновую функцию сводится просто к умножению ее на соответствующую физическую величину, т.е.

$$\hat{\vec{p}}\Psi \to \vec{p}\Psi, \qquad (14.3)$$

а сама волновая функция принимает вид: $\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}S}$, где S – действие. Используем ее:

$$\hat{\vec{p}}\Psi = \hat{\vec{p}}e^{\frac{i}{\hbar}S} = const\,\nabla e^{\frac{i}{\hbar}S} = const\left(\frac{i}{\hbar}\nabla S\right)e^{\frac{i}{\hbar}S} = const\,\frac{i}{\hbar}\vec{p}\Psi.$$

Учтено, что в классической механике $\vec{p} = \nabla S$. Сравнение с соотношением (12.3) показывает: $const \cdot \frac{i}{\hbar} = 1 \to const = -i\hbar$.

В результате оператор импульса принимает уже известный вид (см. ф-лу (7.2)): $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$. Соответственно получаем уравнение на собственные функции и собственные значения оператора импульса:

$$\hat{\vec{p}}\varphi(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p}\varphi(\vec{p},\vec{r}) \rightarrow -i\hbar\nabla\varphi(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p}\varphi(\vec{p},\vec{r}).$$

Его решение: спектр непрерывный, т.е.

$$\boxed{-\infty < p_x, p_y, p_z < \infty} \text{ и } \boxed{\varphi(\vec{p},\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}}.$$

Проверочные вопросы к лекции 14.

1. Как следует понимать соотношение неопределенностей для энергии и времени?
2. С каким свойством пространства связан такой интеграл состояния, как импульс?
3. Какое определение можно дать импульсу системы?
4. Напишите вид оператора импульса. Каков у него спектр собственных значений и вид нормированных собственных функций?