Четырехволновое смешение света

-описывается кубичной нелинейностью
- отсутствует симметрийный запрет в центросимметричных средах
- существенно усиливается в окрестности резонансов
- часто используется с перестраиваемой бигармонической накачкой (спектроскопия)

Рассмотрим случай трех волн накачки

$$\mathbf{E}_m(\omega_m) = E_m \exp(i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - i\omega_m t)$$

$$\omega_m = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \quad \mathbf{k}_m = \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$$

Результирующее поле на выходе

$$\mathbf{E}_s(\omega_s) = E_s \exp(i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - i\omega_s t)$$

является решением неоднородного волнового уравнения

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega_s^2}{c^2}\varepsilon(\omega_s)\right]\mathbf{E}_s = -\frac{4\pi\omega_s^2}{c^2}\mathbf{P}^{(3)}(\omega_s)$$

с кубичной поляризацией

$$P^{(3)}(\omega_s) = \chi^{(3)}(\omega_s = \pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3) : \mathbf{E}(\omega_1)\mathbf{E}(\omega_2)\mathbf{E}(\omega_3)$$

Четырехволновое смешение: общий подход

В приближении MMA, распространения волны отклика вдоль оси z и в приближении заданной накачки

$$E_{s,i}(z) = -\frac{2\pi\omega_s^2}{(\Delta\mathbf{k}\cdot\hat{z})k_s c^2}\chi^{(3)}_{ijkl}E_{1,j}E_{2,k}E_{3,l}\left(1-e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}\right)e^{-\alpha_{s,i}z}$$

где фазовая расстройка

$$\Delta\mathbf{k} = \left(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_s\right)+i\hat{z}(\alpha_{1,j}+\alpha_{2,k}+\alpha_{3,l}-\alpha_{s,i})$$

$\alpha_{m,j}$ - коэффициент затухания вдоль оси *z*

При $\Delta\mathbf{k}=0$ интенсивность отклика резонансно возрастает

NB: при 4-волновых процессах фазовый синхронизм выполнить существенно легче (прямые волны, обратные волны и т.д.)

Четырехволновое смешение: коллинеарное усиление

Рассмотрим случай усиления одной из волн при мощных двух других:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_3,\ \omega_s = \omega_3,\ \mathbf{k}_s = \mathbf{k}_3$$

тогда $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1(\omega_1) + \mathbf{k}_2(\omega_2)$

При отсутствии истощения волн $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$

$$E_{s,i}(z) = E_{s,i}(0)\exp\left[g_i(z) - \alpha_{s,i}z\right],$$

$$g_i(z) = \frac{2\pi\omega_s^2}{(\Delta\mathbf{k}\cdot\hat{z})k_s c^2}\chi_{ijki}^{(3)}E_{1,j}E_{2,k}\left(1 - e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}\right)$$

$\mathrm{Re}\left[g_i(z)\right]$ представляет собой коэффициент усиления

Существует частный случай $\omega_1 = \omega_2,\ E_{1,j} = E_{2,k}$, при котором

$$\mathrm{Re}\left[g_i(z)\right] = \frac{2\pi\omega_s^2}{k_s c^2}\mathrm{Im}\left[\chi_{ijki}^{(3)}\right]\left|E_{1,j}\right|^2 z$$

Четырехволновое смешение: переход коллинеарного усиления к режиму КР-усиления (ВКР)

если разность частот близка к комбинационному резонансу (стоксовой частоте)

$$\omega_1 - \omega_s \approx \Omega, \;\; \omega_1 > \omega_s$$

то это режим КР-усиления, где

$\mathbf{E}_s$ - стоксова волна, а

$\mathbf{E}_1$ - волна накачки

Кубичная поляризация, описывающая ВКР, $P^{(3)}(\omega_s) = \chi_R^{(3)} |E_1|^2 E_3$

$\chi_R^{(3)}$ – резонансная часть кубичной восприимчивости

NB: ВКР – процесс параметрический

Четырехволновое смешение: параметрическое усиление с обратной волной

Рассмотрим случай четырехволнового усиления двух слабых волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$\mathbf{E}_s$ - сигнальная волна, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_i$ - обратная холостая волна

Фазовый синхронизм выполняется довольно просто

В кристалле толщиной l

$$E_s(z=0) = E_s(l)\cos^{-1}\left(\frac{g_0 l}{2}\right) + i\frac{\omega_s}{\omega_i}\left(\frac{k_s}{k_i}\right)^{1/2} E_i^*(0)\,\mathrm{tg}\left(\frac{g_0 l}{2}\right),$$

$$E_i^*(z=l) = -i\frac{\omega_i}{\omega_s}\left(\frac{k_s}{k_i}\right)^{1/2} E_s(l)\,\mathrm{tg}\left(\frac{g_0 l}{2}\right) + E_i^*(0)\cos^{-1}\left(\frac{g_0 l}{2}\right)$$

где

$$\left(\frac{g_0}{2}\right)^2 = \frac{\omega_s^2\omega_i^2}{k_s k_i}\left|K\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\right|^2,$$

$$K = \frac{2\pi}{c^2}\chi^{(3)}(\omega_s = -\omega_i + \omega_1 + \omega_2)$$

при $g_0 l \to \pi$ амплитуды $E_s(0), E_i^*(l)$ расходятся,

осуществляется переход к режиму генерации даже при $E_s(l) = E_i^*(0) = 0$

Когерентное антистоксово рассеяние света (КАРС)

Рассмотрим случай бигармонической накачки ω_1, ω_2

потребуем $\omega_2 = \omega_1 - \Omega_0$

результат - когерентная спектроскопия молекулярных переходов Ω_0

на частоте $\omega_A = 2\omega_1 - \omega_2$

В приближении заданных накачек и плоских волн

$$I_A(\omega_A) = \left(\frac{4\pi}{c}\right)^4 \frac{\omega_A l^2 I_1^2 I_2}{n_1^2 n_2 n_A} \left|\chi_{NR}^{(3)} + \chi_R^{(3)}(\omega_A = 2\omega_1 - \omega_2)\right|^2$$

Когерентное антистоксово рассеяние света (КАРС)

Резонансная часть кубичной восприимчивости

$$\chi_R^{(3)}(\omega_A = 2\omega_1 - \omega_2) = \frac{a}{(\omega_1 - \omega_2 - \omega_A) + i\Gamma}$$

спектр КАРС сигнала будет пропорционален

$$\left|\chi^{(3)}\right|^2 = \left[\chi_{NR}^{(3)} + \frac{a(\omega_1 - \omega_2 - \omega_A)}{(\omega_1 - \omega_2 - \omega_A)^2 + \Gamma^2}\right] + \frac{a^2\Gamma^2}{(\omega_1 - \omega_2 - \omega_A)^2 + \Gamma^2}$$

спектр несимметричный (аналог контура Фано) и достигает максимуму и минимума на частотах

$$(\omega_1 - \omega_2)_\pm = \omega_A + \frac{1}{2}\left\{-\frac{a}{\chi_{NR}^{(3)}} \pm \left[\left(\frac{a}{\chi_{NR}^{(3)}}\right)^2 + 4\Gamma^2\right]^{1/2}\right\}$$

Вырожденные четырехволновые параметрические процессы

рассмотрим случай четырех равных частот: $\mathbf{E}(\mathbf{k}_1),\ \mathbf{E}(\mathbf{k}_2), \mathbf{E}(\mathbf{k}_3)$

кубичная поляризация примет вид:

$$\mathbf{P}_s^{(3)}(\mathbf{k}_s,\omega) = \mathbf{P}_s^{(3)}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3,\omega) + \mathbf{P}_s^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\omega) + \\ + \mathbf{P}_s^{(3)}(-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\omega)$$

выражение $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_2 \pm (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)$ можно рассмотреть как статическую дифрешетку для $\mathbf{k}_2$, образованную волнами с $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$

аналогично $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_1 \pm (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)$

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_3 \pm (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

Вырожденные четырехволновые процессы: обращение волнового фронта

Рассмотрим частный случай: $\chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)$

и $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$

Возникает стоячая монохроматическая волна накачки («опорная волна»)

при падении волны с произвольным $\mathbf{k}_3$

возможен синхронизм $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_3$

т.е. при ОВФ появляется волна с $\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_3$

сравним $k_z = -k_z$ при отражении от зеркала

если падающая полна содержала набор волновых векторов $\{\mathbf{k}_3\}$,

отраженный будет содержать $-\{\mathbf{k}_3\}$

сходящаяся волна – в расходящуюся и наоборот

пример адаптивной оптики – автоматическая коррекция абберараций