Семинар 2. Числовые последовательности и числовые множества. Фундаментальная последовательность.

Свойства числовых последовательностей и числовых множеств

1. Подпоследовательности числовых последовательностей

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ - некоторая числовая последовательность. Рассмотрим последовательность $k_1, k_2, ..., k_n, ... k_i > 0, k_{i+1} > k_i$. Выбираем из $\{x_n\}$ элементы с номерами $k_1, k_2, ..., k_n, ...$, то есть - это подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$

Свойство 1

Если для $\{x_n\}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то любая подпоследовательность этой последовательности имеет своим пределом число *a*.

Справедливо и обратное.

Если все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ сходятся, то пределы этих подпоследовательностей равны одному и тому же числу a, в частности, к этому же числу сходится и последовательность $\{x_n\}$.

Свойство 2

Каждая подпоследовательность бесконечно большой последовательности также будет бесконечно большой.

Свойство 3

Из каждой сходящейся последовательности можно выделить монотонную сходящуюся подпоследовательность.

2. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Существует внутренний критерий сходимости последовательности исходя из величины элементов. Для формулировки этого критерия введем понятие фундаментальной последовательности.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N$, такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geq N$ и для всех натуральных чисел *p* *(p=1,2,...)* справедливо неравенство $\left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon$

Теорема 1

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы нижний и верхний пределы ее совпадали, то есть $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{x} = \overline{x}$

Теорема 2 (важное свойство фундаментальной последовательности)

Для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_N$ фундаментальной последовательности, ε - окрестности которого находятся все элементы последовательности, начиная с номера *N*.

Другими словами, вне интервала $\left(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon\right)$ находится не более чем конечное число элементов последовательности.

Отмеченное свойство позволяет установить ограниченность фундаментальной последовательности.

Критерий Коши.

Для того, чтобы последовательность была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Примеры с решениями

1.Доказать, что последовательность $x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + ... + \frac{\cos n}{3^n}, n \in N$ **сходится.**

Доказательство. Оценим модуль разности $x_{n+p} - x_n$:

$$| x_{n+p} - x_n | = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + ... + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{3^n} + ... + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - 1/3^p}{1 - 1/3} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$$

Пусть ε - произвольное положительное число. Поскольку $\lim_{n\to\infty}(1/3^n)=0$ для этого ε существует N такое, что для любого $n \ge N$ верно неравенство $1/3^n < \varepsilon$. Значит, если $n \ge N$, а p – произвольное натуральное число, то

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$$

Таким образом, условие Коши выполнено, и поэтому данная последовательность сходится.

2. Доказать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, n \in N$ **расходится**

Доказательство. Оценим модуль разности $x_{n+p} - x_n$:

$$x_{n+p} - x_n = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| \ge \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

Если здесь взять $p=n$, то получим $x_{n+p} - x_n \ge n/(n+n) = 1/2, n \in N$

Отсюда видно, что данная последовательность удовлетворяет отрицанию условия Коши. А именно, при $\varepsilon = 1/2$ для любого натурального N возьмем $n=N$, $m=2N$, тогда будем иметь

$$|x_{2N} - x_N| = x_{2N} - x_N \ge 1/2$$

Значит, данная последовательность не имеет конечного предела, то есть расходится.

3.Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, n \in N$ **имеет предел и найти его.**

Доказательство. Составим отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!\cdot(2n+1)!!}{(2n+3)!!\cdot n!} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Поскольку $(n+1)/(2n+3)<1/2$ для любого $n \ge 1, x_{n+1} < x_n/2 < x_n$. Значит последовательность убывающая. Очевидно, для любого $n \ge 1$ выполнены неравенства $0 < x_n < x_1 = \frac{1}{3}$, то есть последовательность ограничена. Отсюда следует, что она сходится.

Обозначим $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Последовательность $\{x_{n+1}\}$ является подпоследовательностью данной последовательности, поэтому $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$. Переходя теперь к пределу в равенстве $x_{n+1} = x_n \frac{n+1}{2n+3}$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ откуда

$$c = \frac{1}{2}c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

4. Пусть *a>1*/ . Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n/a^n) = 0$

Доказательство. Поскольку *a-1>0* имеем $a^n = (1+a-1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4}(a-1)^2$ для всех $n \geq 2.$ Отсюда следует, что $0 < \frac{n}{a^n} \leq \frac{4}{n}(a-1)^2.$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{n}(a-1)^2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^n}\right) = 0$

5. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, \ldots, 2+\frac{1}{n}, \ldots$ имеет своим пределом число 2.

Решение. Здесь *n*-й элемент последовательности есть $x_n = 2 + 1/n$. Следовательно, $x_n - 2 = 1/n$

Зададим заранее положительное число ε. Выберем *n* настолько большим, что будет выполнено неравенство $1/n < \varepsilon$. Для этого достаточно принять $n > 1/\varepsilon$. При таком выборе *n* получим $|x_n - 2| < \varepsilon$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

6.Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $7/3, 10/5, 13/7, ..., (3n+4)/(2n+1), ...$ **имеет своим пределом число 3/2.**

Решение. Здесь $x_n - 3/2 = (3n+4)/(2n+1) - 3/2 = 5/[2(2n+1)]$. Определим, при каком значении n выполняется неравенство $5/[2(2n+1)] < \varepsilon$, так как $[2(2n+1) > 5/\varepsilon \Rightarrow n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$.

Итак, если $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$, то $|x_n - 3/2| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3/2$.

Полагая $\varepsilon = 0.1$, заключаем, что неравенство $|x_n - 3/2| < 0.1$ выполняется при *n>12* (например, *n=13)*. Аналогичным образом, неравенство $|x_n - 3/2| < 0.01$ выполняется при *n>124,5* (например, при *n=125*), а неравенство $|x_n - 3/2| < 0.001$ при *n>1249,5* (например, при *n=1250*).

7.Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)$

Решение. Выражение *1+2+3+…+n* – сумма элементов арифметической прогрессии с разностью *d=1*. Сумму элементов вычисляем по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. В нашем случае $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$. Получаем следующее выражение для исходного предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

8.Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Решение. Преобразуем выражение предела умножая и деля числитель и знаменатель на сопряженные выражения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n^2+1}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1-n^2)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(1+\sqrt{1/n+1})}{n(1+\sqrt{1+1/n^2})}=0$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - фундаментальные последовательности. Доказать, что:

a) $\{x_n+y_n\}$ - фундаментальная последовательность;

b) $\{x_n\cdot y_n\}$ - фундаментальная последовательность;

c) Если $|y_n|\ge c>0, n\in N$, то $\{x_n/y_n\}$ - фундаментальная последовательность;

2. Найти пределы последовательностей

$$a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n})};b)\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n};c)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}-1}{\sqrt{n^2+n}-n-1};d)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$$

3. Найти пределы последовательностей

$$a)\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1});b)\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1});c)\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2+2002}-n);d)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+3/n^3}-1\right)$$