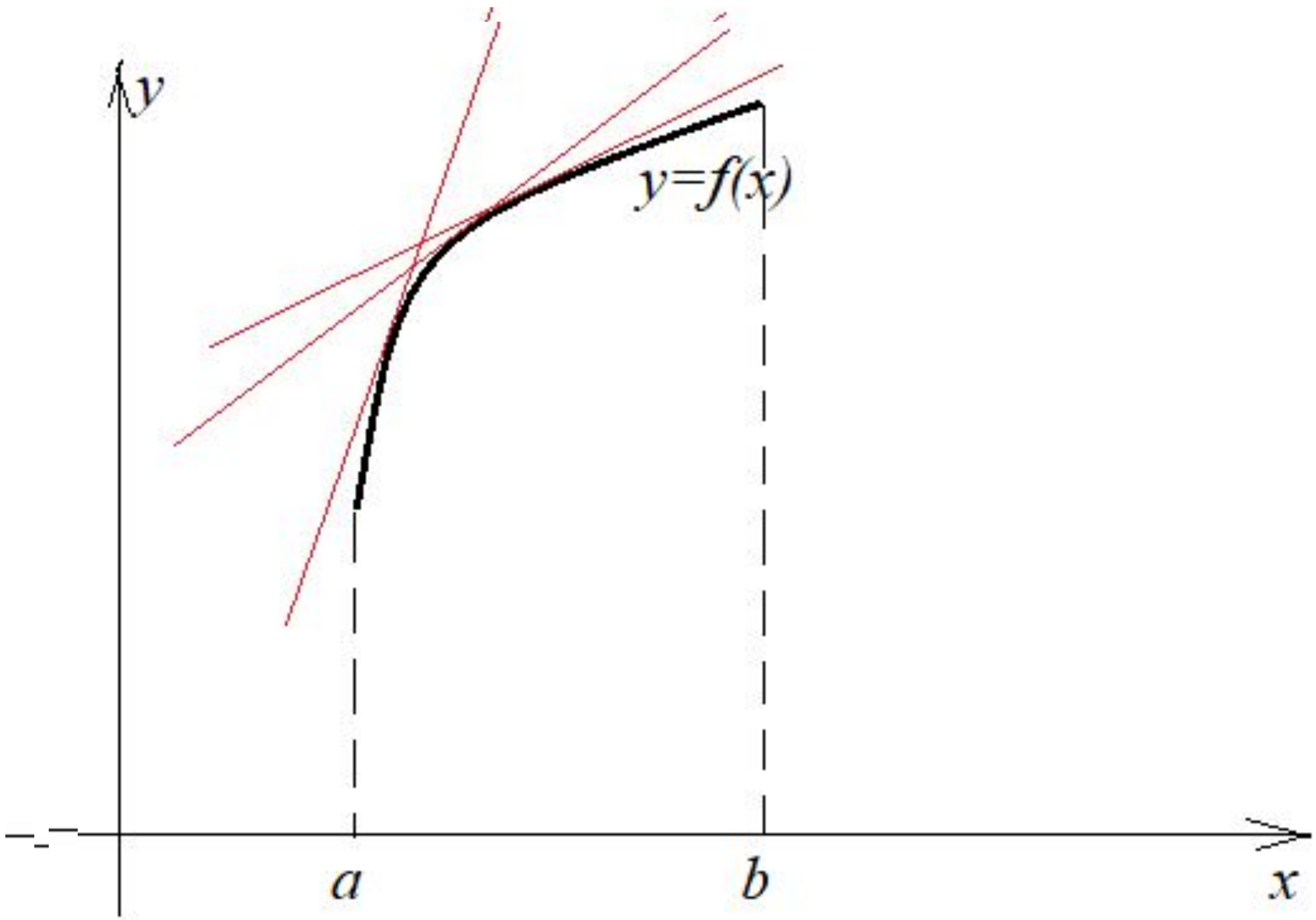
Выпуклость функции. Точки перегиба.

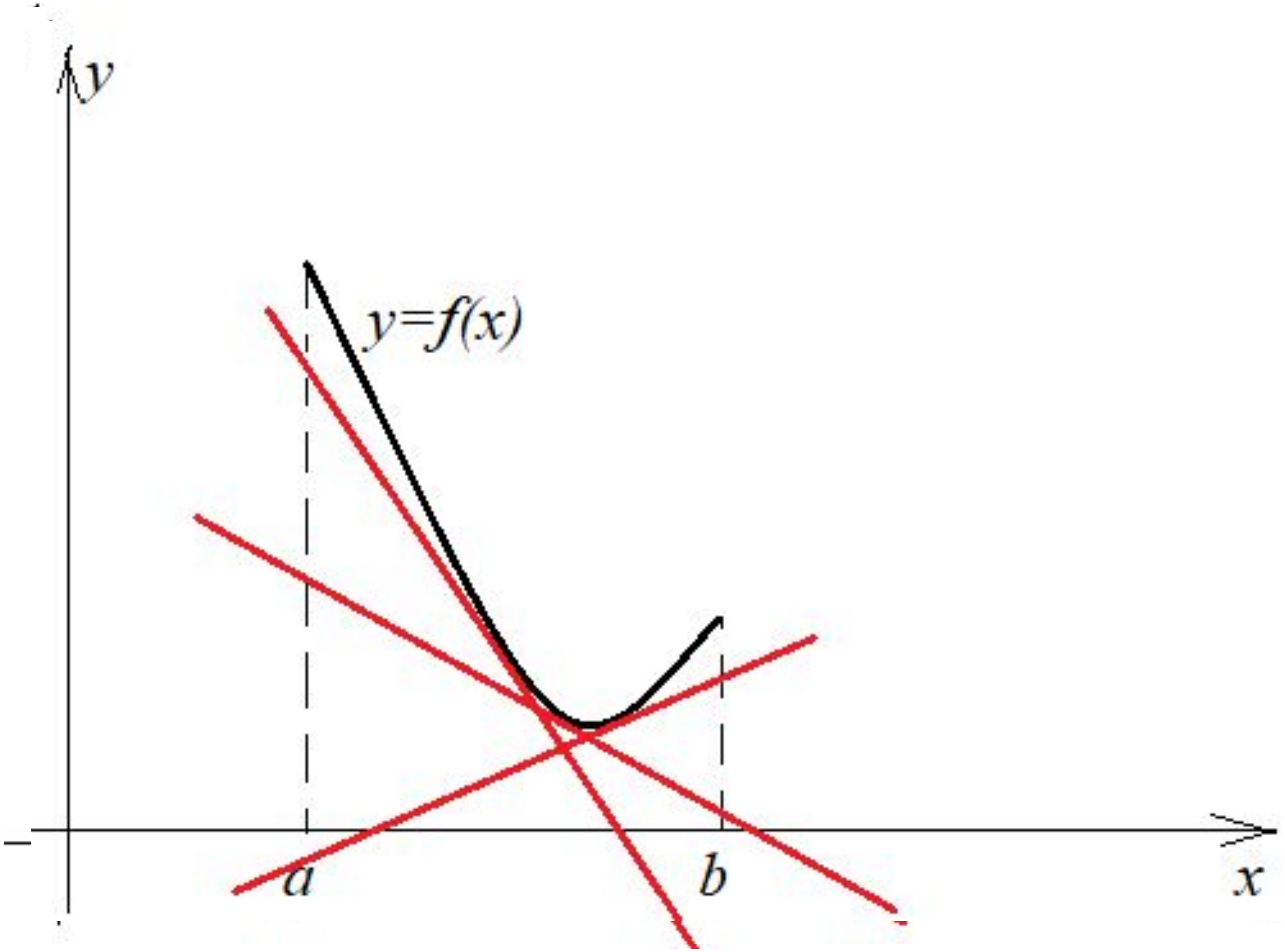
Основные определения

Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на промежутке $[a;b]$, если график функции расположен ниже (выше) любой касательной, проведенной к графику функции в любой точке промежутка.

Функция, выпуклая вверх



Функция, выпуклая вниз



Основные определения

Точка x_0 называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в любой окрестности точки x_0 есть точки графика функции $y = f(x)$, расположенные как выше, так и ниже касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Необходимое условие точки перегиба

Если точка x_0 является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная функции, вычисленная в точке x_0 равна 0.

Достаточное условие экстремума

Пусть вторая производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна 0.

Точка x_0 является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная этой функции меняет знак.

Условия выпуклости

Если на промежутке $[a;b]$ вторая производная функции $y=f(x)$ положительна, то функция $y=f(x)$ на промежутке $[a;b]$ выпукла вниз.

Если на промежутке $[a;b]$ вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательна, то функция $y=f(x)$ на промежутке $[a;b]$ выпукла вверх.

Пример

Исследовать функцию

$$y = x^3 - 2x^2 + 5x + 4$$

на выпуклость, точки перегиба.

Решение.

Область определения: $x \in R$

Пример $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 4$

Точки перегиба определяются второй производной функции

$$y' = 3x^2 - 4x + 5$$

$$y'' = 6x - 4$$

$$y'' = 0: \qquad 6x - 4 = 0; \qquad x = \frac{2}{3}$$

Пример $\quad y'' = 6x - 4$

$x = \dfrac{2}{3}$ – точка перегиба;

Функция выпукла вверх на $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right)$

Функция выпукла вниз на $\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$