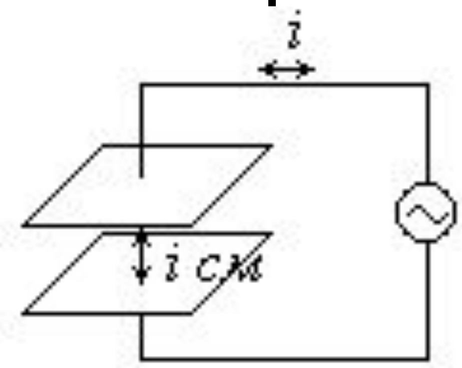
Лк_30

Электромагнитные волны

Рассмотрим простую цепь, состоящую из источника переменного тока и конденсатора. На рисунке конденсатор показан в виде плоских обкладок, разделенных диэлектриком. Конденсатор пропускает переменный ток, который показан на рисунке двунаправленной стрелкой. В проводнике - это ток проводимости, создающий вокруг себя магнитное поле. В качестве диэлектрика конденсатора может быть вакуум, в котором нет никаких зарядов. Тем не менее и в этом случае ток конденсатора между обкладками также создает магнитное поле.



По аналогии с диэлектриком виртуальный ток в вакууме также назван ***током смещения***. Величина тока смещения выражается обычной формулой

$$i_{\text{см}} = \frac{dq}{dt} \qquad (30.1)$$

где q - заряд конденсатора. Для вычисления заряда окружим мысленно одну из обкладок замкнутой поверхностью - σ. Согласно теореме Гаусса

$$q = \int_{\sigma} \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} d\vec{\sigma}$$

E – напряженность поля конденсатора

Электрическое поле существует только внутри конденсатора, за его пределами E=0. Следовательно при интегрировании по замкнутой поверхности σ отличный от нуля вклад внесет только та часть поверхности, которая проходит внутри конденсатора. В результате получим для тока смещения следующую формулу:

$$i_{\text{см}} = \frac{dq}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 \int_S \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{s} \qquad (30.2)$$

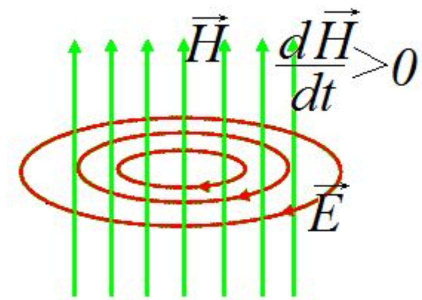
Поскольку ток смещения также создает магнитное поле его необходимо добавить в формулы, выражающие циркуляцию напряженности магнитного поля:

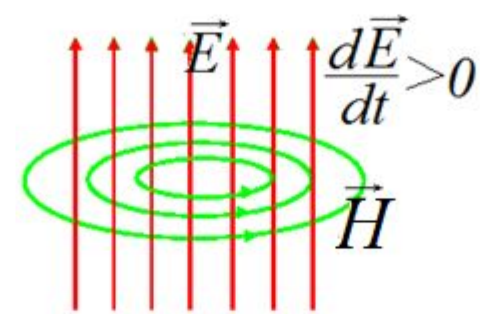
$$\oint \vec{\mathrm{H}} d\vec{l} = i_{\text{пр}} + i_{\text{см}} = i_{\text{пр}} + \varepsilon\varepsilon_0 \int_S \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{s} \qquad (30.3)$$

Если среда не обладает электропроводностью, ток проводимости $i_{\text{пр}}=0$. Мы будем рассматривать именно этот случай. Как видно из (30.3), изменяющееся во времени электрическое поле создает в окружающем пространстве магнитное поле.

Линии напряженности этого магнитного поля также накручиваются на линии напряженности переменного электрического поля. Выпишем вмести уравнения взаимосвязи электрического и магнитного полей (29.9) и (30.3), положив $i_{пр}=0$ и выразив индукцию магнитного поля через напряженность ($B=\mu\mu_0 H$)

$$\left\{\begin{aligned} &\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\mu\mu_0 \int_S \frac{d\vec{H}}{dt} d\vec{s} \\ &\oint_{L'} \vec{\mathrm{H}}d\vec{l} = \varepsilon\varepsilon_0 \int_{S'} \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{s} \end{aligned}\right. \qquad (30.4)$$





Изменение магнитного поля создает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, линии напряженности которого расположены в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля, и охватывают их; они образуют с вектором Н «левый винт» (их направление соответствует правилу Ленца). Изменение электрического поля возбуждает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле, линии индукции которого расположены в плоскости, перпендикулярной линиям напряженности электрического поля, и охватывают их. Линии индукции возникающего магнитного поля образуют с вектором электрического поля «правый винт».

Таким образом, порождая друг друга, изменяющи-еся магнитное и электрическое поля могут сущест-вовать в пространстве без зарядов и токов прово-димо
электри-
ческое и магнитное поля зах
ватывают новые области про-

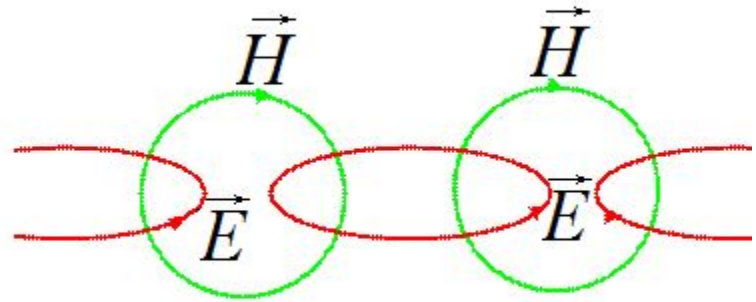
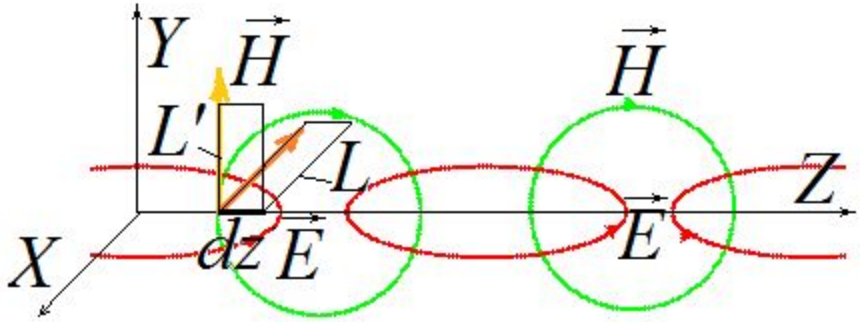


Рис. 30.3

странства. Распространение их происходит с конечной скоростью, которую можно вычислить на основании (30.4). Введем пространс-твенную систему координат XYZ и перепишем в ней систему уравнений (30.4). Мы знаем, что векторы E и H лежат в перпендикулярных плоскос-тях. Пусть E – в

Возьмем прямоугольный контур L’ в плоскости YZ и вычислим циркуляцию век-тора H по этому контуру.



Протяженность контура L’ по оси Z бесконечно мала, обозначена dz. Протяженность по оси Y – a. Пусть H зависит только от z. Тогда

$$\oint\limits_{L'} \vec{\mathrm{H}} d\vec{l} = H_y(z) * a - H_y(z + dz) * a = \frac{dH}{dz} a dz$$

Подставим это в (30.4):

$$\frac{dH_y}{dz} a dz = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_x}{dt} S' = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_x}{dt} a dz$$

В результате второе уравнение (30.4) примет вид:

$$\frac{dH_y}{dz} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE_x}{dt} \qquad (30.5)$$

Рассмотрев точно также контур L в плоскости XZ и вычислив циркуляцию вектора E по нему, получим из первого уравнения (30.4) следующую формулу:

$$\frac{dE_x}{dz} = \mu\mu_0 \frac{dH_y}{dt} \qquad (30.6)$$

Система уравнений (30.5, 30.6) эквивалентна (30.4) Для случая, когда напряженность электрического поля направлена вдоль оси X, а магнитного – вдоль оси Y. Не трудно получить уравнение только для Ex или только для Hy. Дифференцируем (30.5) по Z а (30.6) – по t и исключим смешанную производную.

В результате получим:

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2 H_y}{dt^2} \qquad (30.7)$$

Это т.н. волновое уравнение. Его решением является уравнение волны, в частности, гармонической волны:

$$H_y = H_m \cos(\omega t - kz) \qquad (30.8)$$

В данном уравнении ω – частота волны, которая определяет скорость изменения напряженности во времени, а k – волновое число, определяющее скорость изменения напряженности по координате Z. Если подставить (30.8) в (30.7), то получим формулу связи ω и k: $k^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2$ (30.9)

Как известно, фазовая скорость распространения волны определяется формулой

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{k}$$

Подставив в нее k или ω из (30.9), получим

$$v_\text{ф} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} \qquad (30.10)$$

Два возможных знака скорости соответствуют двум возможным направлениям распространения волны: вдоль или против оси Z.

После того, как определилась H_y, мы можем подставить ее формулу (30.5) и найти напряженность электрического поля E_x. После подстановки будем иметь:

$$-H_{my}k\sin(\omega t + kz) = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Отсюда выразится Ex:

$$E_x = H_{my}\frac{k}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\cos(\omega t + kz) \qquad (30.11)$$

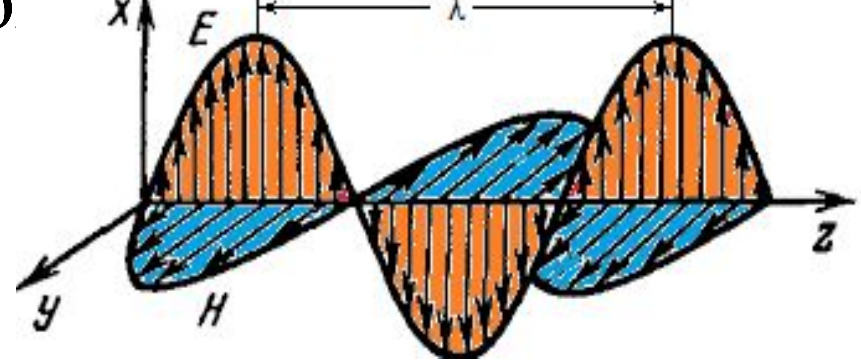
Естественно, что E_x изменяется во времени и пространстве по тому же закону, что и H_y. Амплитуда E_x – это коэффициент при косинусе:

$$E_{mx} = H_{my}\frac{k}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}H_{my} \quad (30.12)$$

Амплитуды напряженностей магнитного и электрического полей пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \quad (30.13)$$

Имеет размерность электрического сопротивления (Ом) и называется волновым сопротивлением среды. В частности, если средой является вакуум, то $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377$ Ом

На рисунке 30.1 показана мгновенная «фотография» в какой-то мо


напряженностей электри-
ческого и магнитного поля
волны, распространяющей-
ся в сторону положительных значений Z (k>0). Напряженности E и H изменяются синфазно, достигая одновременно максимумов и нулевых значений. Картинка для волны, идущей в противоположную сторону (k<0), будет отличаться тем, что направление векторов E изменятся на противоположные. С течением времени вся картинка, показанная на рисунке движется вправо, - волна бежит вдоль оси Z.

Электромагнитные волны переносят энергию. Определим вектор плотности потока энергии - $\vec{S}$ как ***вектор, направление которого совпадает с направлением распространения волны, а модуль равен энергии, переносимой волной через единичную площадку в единицу времени***. Если известна мгновенная плотность ЭМ энергии в пространстве – w и скорость волны - v, то $\vec{S} = w\vec{v}$

Плотность ЭМ энергии при наличии электрической и магнитной составляющих выражается известной формулой:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \qquad (30.14)$$

Определим плотность потока энергии, переносимой плоской волной идущей вдоль оси Z, у которой отличны от нуля только компоненты E_x и H_y. Согласно (20.12), эти компоненты связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_x = \sqrt{\mu\mu_0}H_y,$$

Из которого следует

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_x^2 = \mu\mu_0 H_y^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}E_x H_y,$$

Но $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = 1/v_\text{ф}$. Следовательно $w = \frac{1}{v_\text{ф}}E_x H_y$,

В результате плотность потока энергии выразится следующей формулой:

$$\vec{S} = w\vec{v}_\text{ф} = \frac{\vec{v}_\text{ф}}{v_\text{ф}}E_x H_y$$

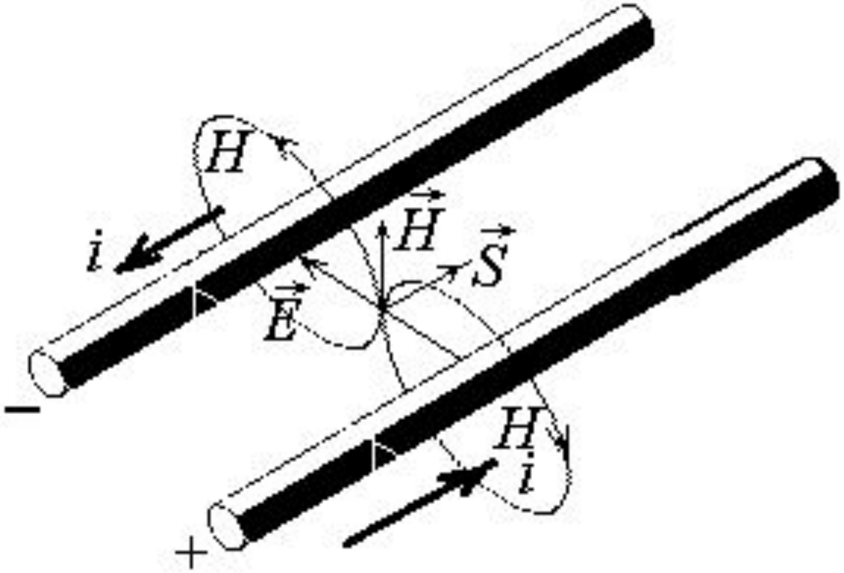
Отношение $\frac{\vec{v}_ф}{v_ф}$ - это единичный вектор, сонаправленный с вектором скорости. Векторное произведение. $\vec{E}_x \times \vec{H}_y$, совпадает также по направлению с вектором скорости, следовательно :

$$\vec{S} = \vec{E}_x \times \vec{H}_y \tag{30.15}$$

Данное соотношение, полученное для плоской волны, идущей вдоль оси Z, справедливо и в общем случае. Вектор

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{30.16}$$

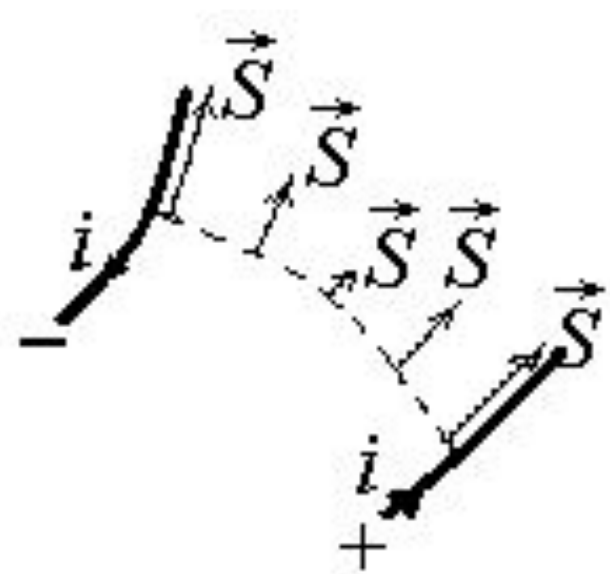
Называется вектором Умова-Пойтинга. Он указывает направление и плотность потока ЭМ мощности, переносимой волной.



Направляющее устройство в простом случае – это пара параллельных проводов, называемое двухпроводной линией электропередачи. Пусть в данный момент времени внешний источник создает полярность напряжения и направления токов в проводах, показанные на рисунке. Рассмотрим ЭМ поле в точке, расположенной между проводами. Для другой точки результат будет таким же. В выбранной точке легко построить направления векторов напряженностей электрического и магнитного полей, а также направление вектора Пойтинга – S.

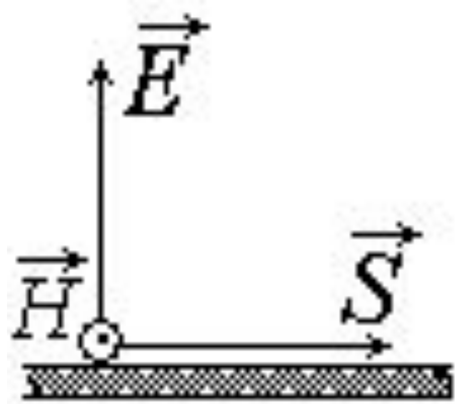
Сделав построения, приходим к выводу о том, что **электромагнитная энергия идет не по проводам, она распространяется в диэлектрическом пространстве, окружающем провода. Направление распространения при параллельности проводов совпадает с направлением тока, протекающего в данный момент по плюсовому проводу.**

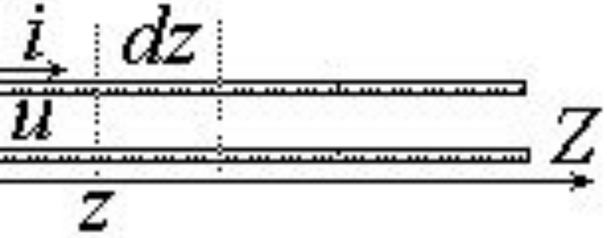
В случае кривых, произвольно расположенных проводов картина поля усложнится, но сделанный вывод остается неизменным. Энергия поля распространяется в диэлектрике вокруг проводов



Какова же в таком случае роль проводов? Она состоит только в том, чтобы направлять поток электромагнитной энергию вдоль себя, разворачивая нужным образом векторы напряженности электрического и магнитного полей.

Если провода имеют нулевое сопротивление, то векторы напряженности электрического поля перпендикулярны их поверхностям. При этом вектор S вблизи провода строго параллелен поверхности провода и потери энергии нет.





Телеграфные уравнения

Рассмотрим подробно передачу электроэнергии по проводам. Напряжение между проводами и ток в них будут функциями двух переменных: координаты – z и времени – t. Т.е.: u(z, t) и i(z, t).

Изменение напряжения на каком-либо участке линии dz обусловлено ЭДС самоиндукции участка провода dz:

$$du = -L_0 dz \frac{\partial i}{\partial t} \qquad (30.17)$$

Изменение тока di на этом же участке определится тем, что часть тока затрачивается на зарядку электроемкости между проводами.

$$di = -C_0 dz \frac{\partial u}{\partial t} \tag{30.18}$$

Величины L_0 и C_0 называются погонными индуктивностью и электроемкостью линии. Их значения определяются размерами линии (диаметрами проводов, расстоянием между ними, диэлектрической проницаемостью среды). Соотношения (30.17, 30.18) являются дифференциальными уравнениями, которые определяют ток и напряжение в линии

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i}{\partial z} = -C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \qquad (30.19)$$

Эта система уравнений называется телеграфными уравнениями. Сравним ее с уравнениями ЭМ поля в свободном пространстве (30.6, 30.5)

$$\begin{cases} \dfrac{dE_x}{dz} = \mu\mu_0 \dfrac{dH_y}{dt} \qquad (30.6) \\ \dfrac{dH_y}{dz} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{dE_x}{dt} \qquad (30.5) \end{cases}$$

М видим, что уравнения одинаковы по форме. Если условно заменить $E \to u$; $H \to i$; $L_0 \to \mu\mu_0$; $C_0 \to \varepsilon\varepsilon_0$, то уравнения будут одинаковыми. Следовательно, решение их также будет одинаковым. Мы можем сразу же записать:

$$u = U_m \cos(\omega t - kz) \qquad (30.20)$$

$$i = I_m \cos(\omega t - kz)$$

По линии распространяется волна напряжения и тока. Связь волнового числа с частотой волны такая же как в (30.9)

$$k = \pm\omega\sqrt{L_0 C_0} \qquad (30.21)$$

Скорость волны выразится по аналогии с (30.10):

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\pm\sqrt{L_0 C_0}} \qquad (30.22)$$

Связь амплитуд напряжения и тока также определится по аналогии с (30.12) :

$$I_m = \frac{kU_m}{L_0\omega} = \pm\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}U_m = \frac{U_m}{\pm\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \qquad (30.23)$$

Величина

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \qquad (30.24)$$

Определяет связь амплитуд напряжения и тока. Она называется волновым сопротивлением линии.

Знак ± в (30.22, 30.23) соответствует двум возможным направлениям распространения волны. Для волны, идущей в сторону положительных значений оси Z, волновое число положительно, и в следует брать знак +. Если волна идет в противоположную сторону берется знак «-».

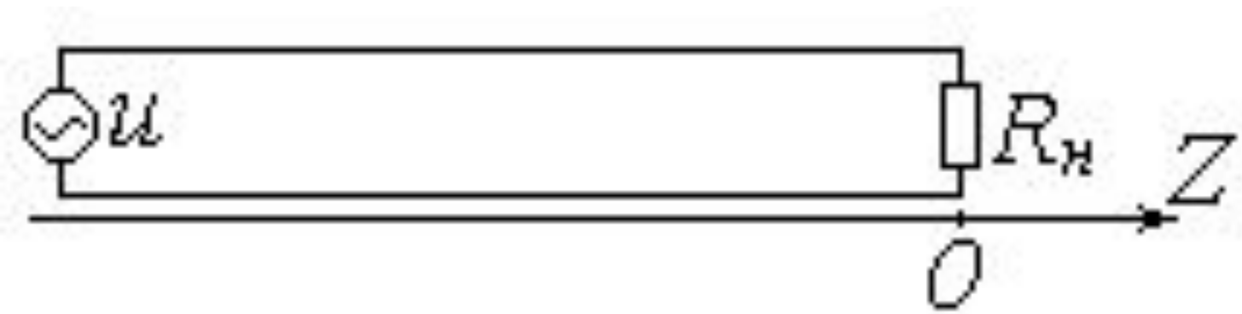
В общем случае в линии существуют сразу обе волны, распространяющиеся навстречу друг другу. Если обозначить амплитуду напряжения одной из них через U_{m1}, а другой – U_{m2}, то уравнения для напряжения и тока будут иметь следующий вид:

u

$$u = U_{m1}\cos(\omega t - kz) + U_{m2}\cos(\omega t + kz)$$

$$i = \frac{U_{m1}}{Z_0}\cos(\omega t - kz) - \frac{U_{m2}}{Z_0}\cos(\omega t + kz)$$

Предположим, что в начале линии к ней подключен источник переменного напряжения, а в конце потребитель электроэнергии Rн. Расположим начало оси Z в месте подключения Rн.



В конце линии, т.е. при z=0 соотношение между напряжением и током должно подчиняться закону Ома. Это определит соотношение между амплитудами волн, распространяющихся по линии в разные стороны. При z=0 должны выполняться равенства

$$u = U_{m1}\cos(\omega t) + U_{m2}\cos(\omega t) \tag{30.25}$$

$$iR_{н} = \frac{U_{m1}R_{н}}{Z_0}\cos(\omega t) - \frac{U_{m2}R_{н}}{Z_0}\cos(\omega t)$$

Приравняем $u=iR_{н}$ и из получившегося уравнения выразим U_{m2}. В результате получим:

$$U_{m2} = U_{m1}\frac{R_{н} - Z_0}{R_{н} + Z_0} \tag{30.26}$$

Назовем волну с амплитудой U_{m1}, распространяющуюся от источника к $R_н$ **падающей**, а волну, идущую в другую сторону, с амплитудой U_{m2}, – **отраженной**. Формула (30.26) определяет связь амплитуд этих волн.

Если $R_н=Z_0$, то амплитуда отраженной волны равна нулю. При этом линия работает в т.н. режиме «бегущей волны», которая полностью поглощается в $R_н$.

Если $R_н=0$, то $U_{m2}=- U_{m1}$, - отраженная волна противофазна падающей и равна ей по амплитуде.

При $R_н=\infty$ будем иметь синфазную с падающей отраженную волну, равную по амплитуде падающей.

Стоячие волны в линии. Если амплитуды падающей и отраженной волн одинаковы, то переносимые волнами в обе стороны мощности также одинаковы. Переноса энергии нет. Говорят, что в линии существует **стоячая волна**.

Формула (30.26), связывающая амплитуды падаю-щей на нагрузку лини и отраженной от нее волн, справедлива и для волн в свободном пространстве при перпендикулярном падении волны на границу раздела сред. При этом
Часть мощности воны
Отражается от границы раздела, а часть прохо-дит во вторую среду.

Амплитуды напряженностей полей падающей и отраженной волн связаны формулой (30.26), если в ней заменить напряжения напряженностями эле-ктрического поля волновое сопротивление линии волновым сопротивлением 1 среды, а нагрузки – волновым сопротивлением второй среды: