Лекция 9
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ
(продолжение)

§ 1. ДЛИНА И НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА

Пусть в пространстве ***0xyz*** задан вектор ***а***. Проекции этого вектора на оси координат

$$a_x = пр.\ x\ ,\ \ a_y = пр.\ y\ ,\ a_z = пр.\ z\ .$$

называются ***координатами вектора а***; при этом вектор мы будем записывать так: ***а*** $= (a_x,\ a_y\ , a_z)$.

Так как вектор, ***а*** свободный, то его можно рассматривать как радиус-вектор точки ***М***(a_x, a_y, a_z). Отсюда получаем длину вектора

$$|a| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Направляющие косинусы вектора, ***а*** определяются из уравнений:

$$a_x = a\cos\alpha, a_y = a\cos\beta, a_z = a\cos\gamma.$$

Причем: $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

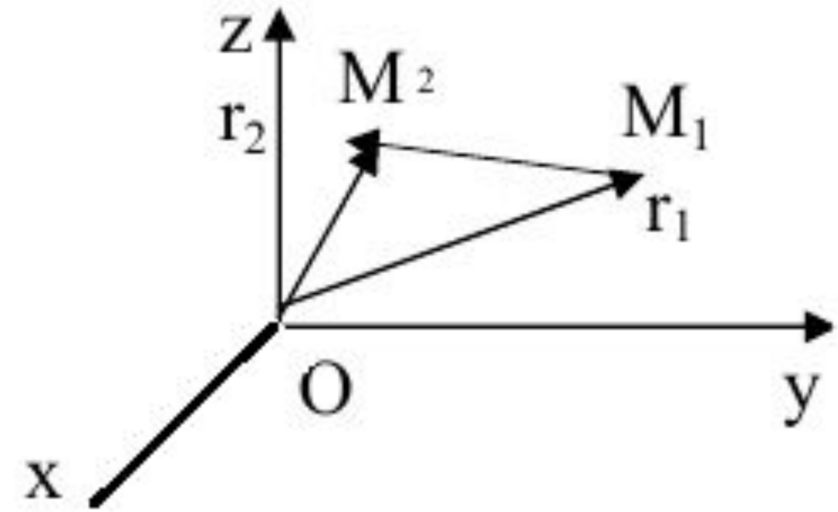
§ 2. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Пусть M_1 (x_1, y_1, z_1) — начальная точка отрезка $l = M_1M_2$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — конечная точка его. Точки M_1 и M_2 можно задать их радиус-векторами

$$\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \; u \; \bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

из ΔOM_1M_2 будем иметь:

$$\bar{l} = \overline{r_2} - \overline{r_1}.$$



Проектируя это векторное равенство на оси координат и учитывая свойства проекций, получим:

$$l_x = x_2 - x_1, l_y = y_2 - y_1, l_z = z_2 - z_1$$

Таким образом, проекции направленного отрезка на оси координат равны разностям соответствующих координат конца и начала отрезка.

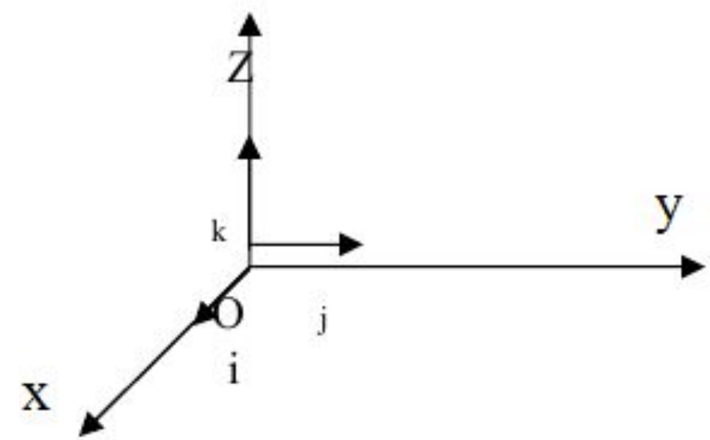
Тогда длина отрезка или расстояние между двумя точками M_1 и M_2, будет равна

$$l=\sqrt{l_x^2+l_y^2+l_z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Таким образом, расстояние между двумя точками пространства равно корню квадратному из квадратов разностей одноименных координат этих точек.

§3. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАННЫМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ.

Пусть вектор $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ задан своими проекциями на оси координат $\boldsymbol{0x,0y,0z}$.



Введя единичные векторы (орты) ***i, j,k,*** направленные по осям координат, на основании связи между компонентами вектора и его проекциями получим координатную форму вектора:

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$$

Если $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, то

$$\overline{b} = b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k},$$

Рассмотренные выше линейные операции над векторами можно теперь записать в следующем виде:

$$1)\ \lambda\overline{a} = \lambda a_x \overline{i} + \lambda a_y \overline{j} + \lambda a_z \overline{k}, \qquad \lambda\overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

Таким образом, при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

$$2)\ \overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x)\overline{i} + (a_y \pm b_y)\overline{j} + (a_z \pm b_z)\overline{k},$$

или кратко: $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

Таким образом, при сложении (или вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (или вычитаются).

§ 4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Под скалярным произведением двух векторов ***a*** и ***b*** понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е. в обычных обозначениях:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left(\bar{a}, \bar{b}\right) = ab\cos\varphi \qquad \text{где } \varphi = \angle\left(\bar{a}, \bar{b}\right).$$

Заметим, что в приведенной формуле скалярное произведение можно еще записывать как ***ab*** , опуская точку.

Скалярное произведение обладает ***основными свойствами***:

)Скалярное произведение двух векторов не зависит от порядка этих сомножителей (переместительное свойство):

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}.$$

)Для трех векторов ***a , b*** и ***c*** справедливо распределительное свойство:

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right)\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$$

т. е. при скалярном умножении суммы векторов на вектор можно «раскрыть скобки».

3) Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, т. е. $(\overline{a},\overline{a}) = |a|^2$

4) Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения, т.е. $(\lambda\overline{a},\overline{b}) = (\overline{a},\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a},\overline{b})$

5) Скалярное произведение линейной комбинации векторов на произвольный вектор равно такой же линейной комбинации данных векторов на этот вектор, т. е.

$$(\lambda\overline{a} + \mu\overline{b},\overline{c}) = \lambda(\overline{a},\overline{c}) + \mu(\overline{b},\overline{c}),$$

где λ и μ - скаляры

Из определения также вытекает, что косинус угла $\boldsymbol{\varphi = \angle(a,b)}$ между двумя ненулевыми векторами ***a*** и ***b*** ра $\cos\varphi = \overline{a}\overline{b} / ab$

Из последней формулы получаем, что два вектора ***a*** и ***b*** перпендикулярны, т. е. $\boldsymbol{\varphi = \pi / 2}$, тогда и только тогда, когда

$$\overline{a}\overline{b} = 0$$

Это утверждение справедливо также и в том случае, когда хотя бы один из векторов ***a*** или ***b*** нулевой

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ и $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$

Перемножая эти векторы как многочлены, учитывая соотношения $\bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{i} = 0$ $\bar{i}\bar{i} = \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = 1$

Получим: $\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат. Отсюда, обозначая через φ угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, получим:

$$\cos\varphi = \bar{a}\bar{b} / ab = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right) / (\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2})(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2})$$

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (параллельны). Согласно условию коллинеарности $\bar{b} = k\bar{a}$, $b_x = ka_x, b_y = ka_a, b_z = ka_z$

Или

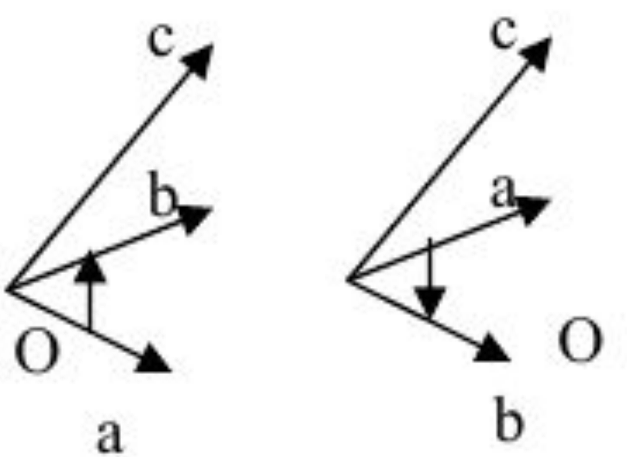
$$b_x / a_x = b_y / a_y = b_z / a_z$$

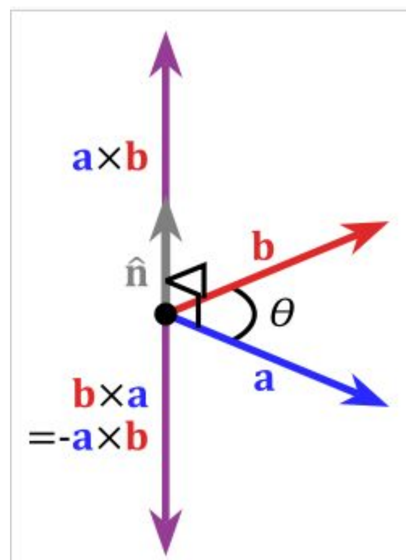
Таким образом, векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны

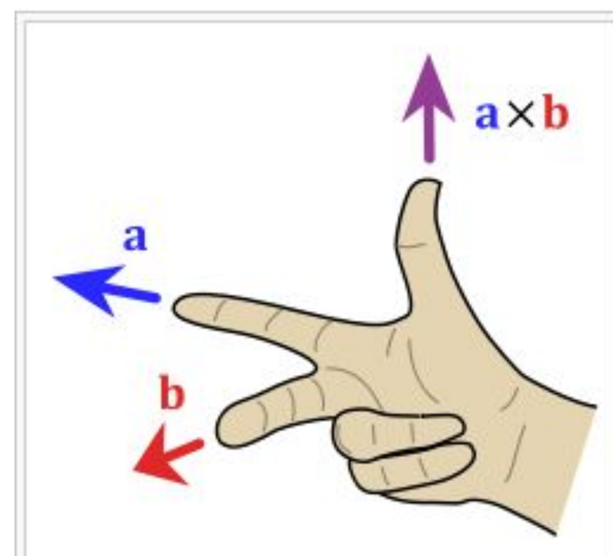
Для перпендикулярных (ортогональных) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеем $\varphi = \pi/2$ и, следовательно, $\cos\varphi = 0$ или $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. Таким образом, два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма парных произведений их одноименных координат равна нулю.

§ 5. *ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ*

Напомним, что тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарных векторов называется правой, или левой, если она ориентирована по правилу правого винта или соответственно по правилу левого винта.







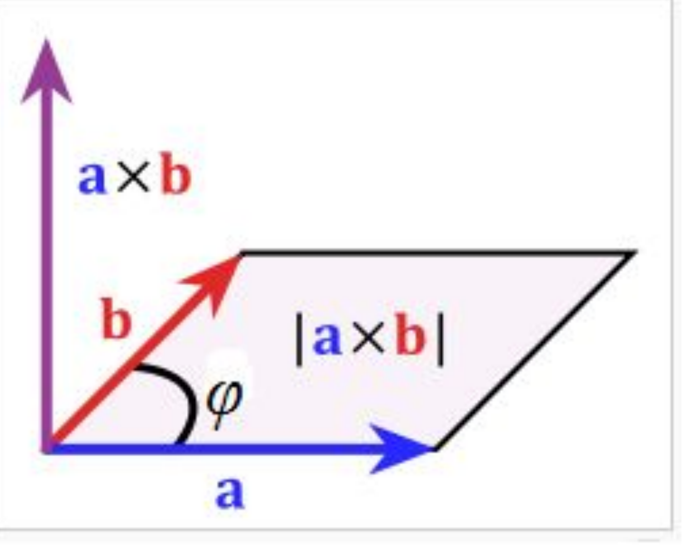
Векторным произведением вектора ***a*** на вектор ***b*** в пространстве $\boldsymbol{R^3}$ называется вектор ***c***, удовлетворяющий следующим требованиям:

- длина вектора ***c*** равна произведению длин векторов ***a*** и ***b*** на синус угла ***φ*** между ними.

$$c = |\bar{c}| = ab\sin\varphi \qquad \text{где } \varphi = \angle(a,b) \ \ (0 \le \varphi \le \pi)$$

- вектор ***c*** ортогонален каждому из векторов ***a*** и ***b***;
- вектор направлен так, что тройка векторов ***a, b, c*** является правой.
- Обозначение: $c = [ab] = [a,b] = a \times b$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, образованного векторами ***a*** и ***b***



Лекция 10
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ
(продолжение)

Укажем основные свойства векторного произведения.

1) При изменений порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль, т. е.

$$\bar b\times\bar a=-(\bar a\times\bar b).$$

При перестановке векторов ***a*** и ***b*** площадь построенного на них параллелограмма остается неизменной, однако тройка векторов ***b***, ***a***, ***a***х***b*** является левой.

2) Векторный квадрат равен нуль-вектору, т. е..

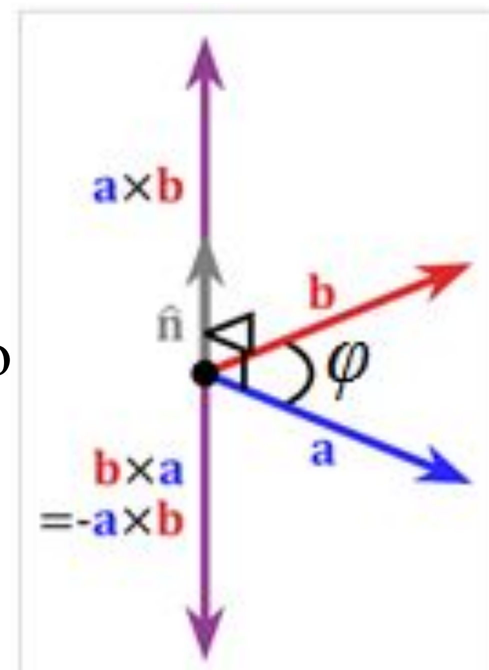
$$c=[aa]=[a,a]=a\times a=0$$

3) Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т. е. если λ — скаляр, то $(\lambda\bar a\times\bar b)=(\bar a\times\lambda\bar b)=\lambda(\bar a\times\bar b)$

4) Для любых трех векторов ***a*** , ***b***, ***c*** справедливо равенство

$$(\bar a+\bar b)\times\bar c=(\bar a\times\bar c)+(\bar b\times\bar c)$$

т. е. векторное произведение обладает распределительным свойством.



С помощью векторного произведения удобно формулировать легко проверяемое необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов ***a*** и ***b***:

$$\overline{c} = [\overline{a}\overline{b}] = [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{a} \times \overline{b} = 0$$

§ 6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ.

Пусть $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ $\qquad \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$

Перемножая векторно эти равенства и используя свойства векторного произведения, получим сумму девяти слагаемых

$$\overline{a} \times \overline{b} = [a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}] \times [b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}]$$

$$\begin{aligned}\overline{a} \times \overline{b} = &\left[a_x b_x\left(\overline{i} \times \overline{i}\right) + a_y b_x\left(\overline{j} \times \overline{i}\right) + a_z b_x\left(\overline{k} \times \overline{i}\right)\right] + \\ &\left[a_x b_y\left(\overline{i} \times \overline{j}\right) + a_y b_y\left(\overline{j} \times \overline{j}\right) + a_z b_y\left(\overline{k} \times \overline{j}\right)\right] + \\ &\left[a_x b_z\left(\overline{i} \times \overline{k}\right) + a_y b_z\left(\overline{j} \times \overline{k}\right) + a_z b_z\left(\overline{k} \times \overline{k}\right)\right]\end{aligned}$$

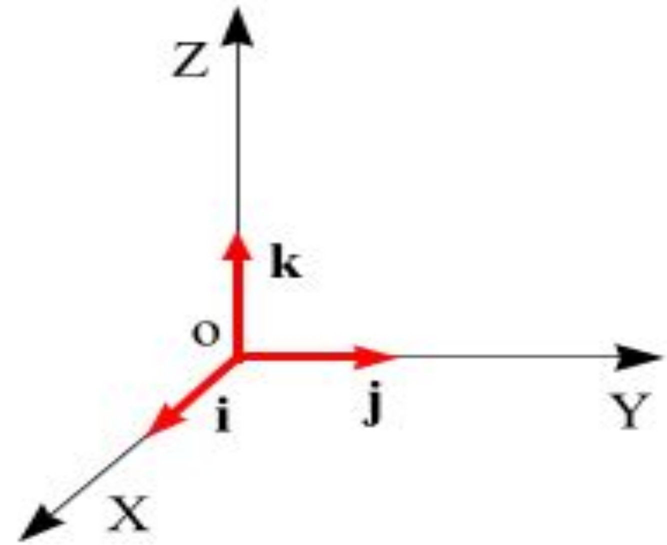
Из определения векторного произведения и его свойств следует, что для ортов ***i*** , ***j*** , ***k*** справедлива следующая «таблица умножения»:

$$\bar{i}\times\bar{i}=0,\ \bar{j}\times\bar{j}=0,\ \bar{k}\times\bar{k}=0$$

$$\bar{i}\times\bar{j}=-\left(\bar{j}\times\bar{i}\right)=k$$

$$\bar{j}\times\bar{k}=-\left(\bar{k}\times\bar{j}\right)=\bar{i}$$

$$\bar{k}\times\bar{i}=-\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)=\bar{j}$$



Поэтому получаем

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{i}\left(a_y b_z-a_z b_y\right)+\bar{j}\left(a_z b_x-a_x b_z\right)+\bar{k}\left(a_x b_y-a_y b_x\right)=$$

$$\bar{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

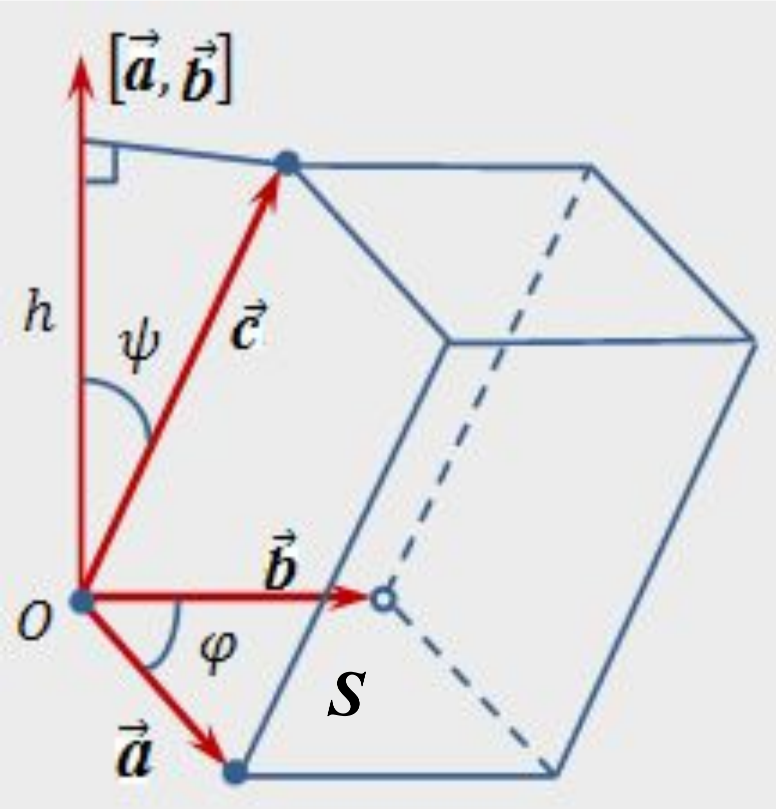
§ 7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Под смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов ***a*** , ***b*** и ***c*** понимается ***число***

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = [\overline{a}\overline{b}]\overline{c} = [\overline{a},\overline{b}]\overline{c} = (\overline{a}\times\overline{b})\overline{c} = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$$

Построим параллелепипед ***П***, ребрами которого, исходящими из общей вершины ***O***, являются векторы ***a*** , ***b***, и ***c*** .

Тогда [***a***,***b***] = S − площадь параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b***, т. е. площадь основания параллелепипеда.



Высота параллелепипеда *h* равна проекции вектора ***c*** на ось, коллинеарную векторному произведению [***a***,***b***]

$$h = np._{[\overline{a},\overline{b}]}\overline{c} = |c|\cos(\Psi) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$$

т. е. смешанное произведение трех векторов равно объему *V* параллелепипеда, построенного на этих векторах

Если коротко, то: $abc = \pm V$

Знак «+» ставится в том случае, если $0 \le \psi \le \pi/2$. Это соответствует ***правой*** тройке векторов ***a***, ***b***, ***c***.

Знак «-» ставится в том случае, если $\pi/2 \le \psi \le \pi$. Это соответствует ***левой*** тройке векторов ***a***, ***b***, ***c***.

Справедливы следующие основные **свойства** смешанного произведения.

)Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е. $\overline{abc} = \overline{bca} = \overline{cab}$

)При перестановке двух множителей смешанное произведение меняет свой знак на обратный, т. е. $\overline{bac} = \overline{acb} = \overline{cba} = -\overline{abc}$.

3) Смешанное произведение линейно по люоому из своих сомножителей, т.е.

$$(\lambda\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \lambda\overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \lambda\overline{c}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

Теорема (формула вычисления смешанного произведения). Если векторы ***a***, ***b***, ***c*** в правом ортонормированном базисе ***i***, ***j***, ***k*** имеют координаты (x_a, y_a, z_a); (x_b, y_b, z_b); (x_c, y_c, z_c) соответственно, то смешанное произведение этих векторов находится по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

В самом деле, учитывая определение смешанного произведения, имеем:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \left(\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \bar{k}, x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k} \right) =$$

$$\left(x_c \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - y_c \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + z_c \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

- **Задание.** Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах , ,
- **Решение.** Найдем смешанное произведение заданных векторов, для это составим определитель, по строкам которого запишем координаты векторов , и :