2. Определители

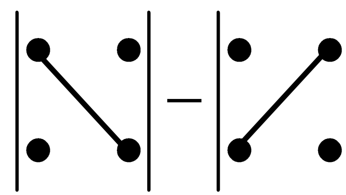
2.1 определение определителя

Бывают только у квадратных матриц

Обозначение: $\det A = |A| = \Delta A$

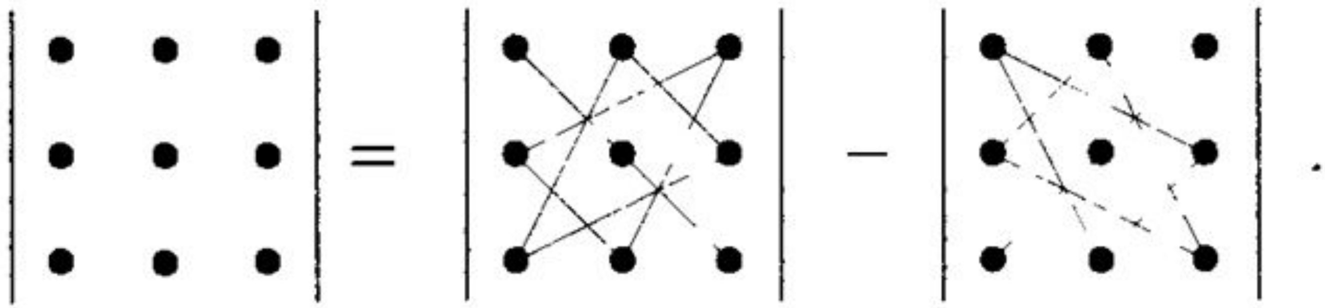
$$1\times 1: \quad |(a)| = a$$

$$2\times 2: \quad \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc$$



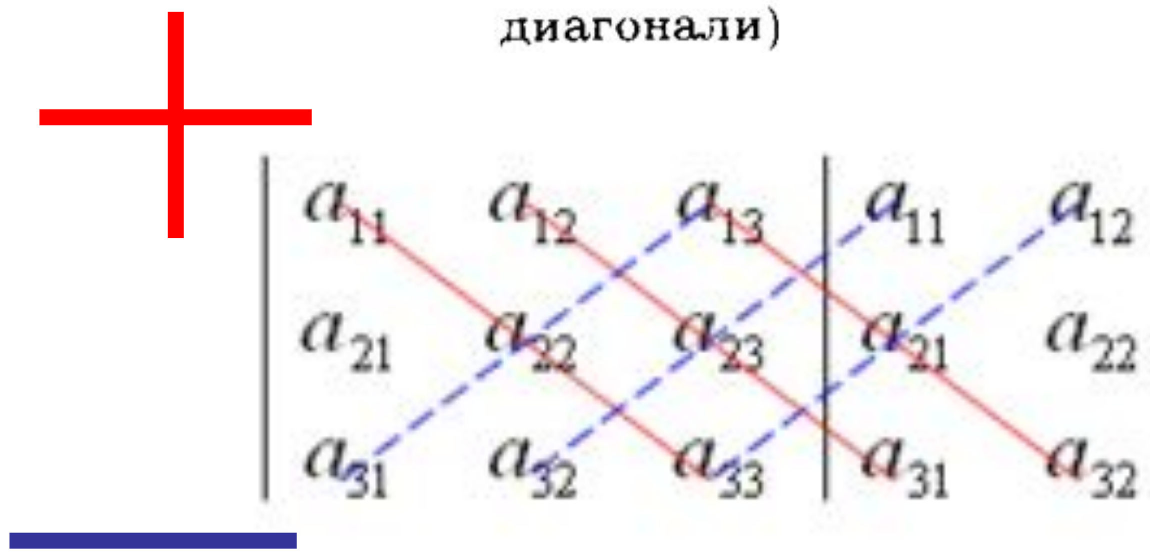
$$3\times 3: \quad \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{33}$$

Две полезные схемы для 3x3



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания треугольников параллельны побочной диагонали)



Миноры (без которых дальше ничего не получится)

Определение минора k-го порядка

Выберем в A произвольно k строк и k столбцов;

Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов составляют квадратную матрицу M размера kxk;

Определитель этой матрицы M и есть минор k-го порядка матрицы A;

Различных миноров k-го порядка у матрицы A *очень* много. $\left(C_n^k\right)^2 - штук$

Миноров 3-го порядка у матрицы 4x4 всего 16.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,4} = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}\right| \qquad M_{1,1} = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$M_{2,4} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}\right| \qquad M_{4,3} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$M_{1,2}, M_{1,3}$

$M_{2,1}, M_{2,2}, M_{2,3}$

$M_{3,1}, M_{3,2}, M_{3,3}, M_{3,4}$

$M_{4,1}, M_{4,2}, M_{4,4}$

Вычисление определителя 4x4 с помощью миноров

$$4\times 4:\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14} =$$

$$= \sum_{j=1}^{4}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

i — любая фиксированная строка матрицы *A*

j — любой фиксированный столбец матрицы *A*

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = -1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$n\times n:\quad \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

От миноров к алгебраическим дополнениям

$(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$ – алгебраическое дополнение a_{ij}

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

$$3\times 3:\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}\qquad 4\times 4:\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Примеры

$$\begin{vmatrix}3&1\\8&-1\end{vmatrix} = 3(-1)-8\cdot1 = -11$$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\3&3&1\\0&8&-1\end{vmatrix} = \begin{matrix}1&0&1&1&0\\3&3&1&3&3\\0&8&-1&0&8\end{matrix} = 1\cdot3(-1)+0\cdot1\cdot0+1\cdot3\cdot8-0\cdot3\cdot1-8\cdot1\cdot1-\left(-1\right)\cdot3\cdot0 =$$

$$=13$$

$$\left|\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&0&1&2\\3&3&1&0\\0&8&-1&0\end{pmatrix}\right| = -1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&0&1\\3&3&1\\0&8&-1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1&0&1\\3&3&1\\0&8&-1\end{vmatrix}+0+0$$

$$=\begin{vmatrix}0&0&1\\3&3&1\\0&8&-1\end{vmatrix}+2\cdot13 = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&3\\0&8\end{vmatrix}+26 = 24+26 = 50$$

2.2. Свойства определителей

1) $\det 0 = 0$ 2) $\det E = 1$ 3) $\det A^T = \det A$

4) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ 5) $\det AB = \det A \cdot \det B$

6) При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) определитель не изменится:

$a_i + \lambda_j a_j,$ где λ_j - некоторое число, a_i, a_j - строки матрицы

7) Если две строки (столбца) совпадают, то определитель равен нулю.

8) Если переставить две строки (столбца), то определитель меняет знак .

9) Если хотя бы один ряд нулевой, то определитель равен нулю.

10) Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Пример использования свойств определителя (вычисление определителя с помощью нулей)

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left[a^3 + a^4\right] = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \begin{bmatrix} a_3 + a_4 \\ a_2 + 3a_4 \end{bmatrix} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 24 & 0 & 2 \\ 3 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 24 & 2 \\ 3 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 3 & 11 & 0 \end{vmatrix} = \left[a^3 + a^1\right] = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \\ 3 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (36 - 11) = 50$$

Таким образом, для получения нулей в некоторой строке (столбце) можно прибавить к ней (к нему) любые другие, умноженные на подходящие числа.

Резюмируем. Способы вычисления определителей:

1. Вычисление определителя по схематическому правилу (подходит для определителей 2-го и 3-го порядков).

2. Разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца (подходит для определителей 3-го и более высоких порядков).

3. Получение нулей в какой-либо строке или столбце и разложение определителя по этой строке или столбцу (подходит для определителей 3-го и более высоких порядков).

2.3. И снова обратная матрица

Обратная матрица — это матрица, произведение с которой равно единице: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Свойства обратной матрицы

1) Обратная бывает только у квадратных: $A, A^{-1} - n \times n$

2) Обратная к обратной равна исходной: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

3) Обратная к транспонированной равна транспонированной обратной: $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

4) Обратная произведения равна произведению обратных в обратном порядке: $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5) Обратная к умноженной на число равна обратной, разделенной на это число: $\left(\lambda A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы квадратная матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля.
<u>Следствие</u>. Если обратная матрица существует, то она единственная.

Вычисление обратной матрицы методом присоединённой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0$$

A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}

Заметим, что

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

В самом деле: $$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \stackrel{\Delta}{=} \det A$$

Осталось убедиться, что: $$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+k} M_{kj} \stackrel{?}{=} 0, \quad k \neq i$$

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(-1\right)^{i+k}\begin{array}{cc}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad j & \end{array} =$$

$$=\pm\begin{array}{cl}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ k \text{ — дублирует строку } i \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad\quad j & \end{array}$$

По свойству (7), определитель равен 0

Итак, $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left\| A_{ij} \right\|^{T}}$$

где $$\left\| A_{ij} \right\|^{T}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} = A_{\ddot{I}}$$

- присоединенная (союзная) матрица, или транспонированная матрица алгебраических дополнений

Простой пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = ?$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

$$\left\| A_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\ddot{I}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right| = -5$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{-5} & \frac{-1}{-5} \\ \frac{-2}{-5} & \frac{1}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix}}$$

Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований

Теорема. Пусть последовательность элементарных преобразований только над строками (столбцами) невырожденной матрицы A приводит её к единичной матрице E. Тогда те же элементарные преобразования приводят единичную матрицу E к обратной матрице A^{-1}.

Элементарные преобразования:

1. Любая перестановка строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число.

Правило вычисления обратной матрицы:

1. Записать рядом две матрицы: $A|E$.
2. Получить нижний треугольник нулей матрицы A (выполнить прямой ход).
3. Получить верхний треугольник нулей матрицы A (выполнить обратный ход).
4. Получить в главной диагонали преобразуемой матрицы единицы. Тогда на месте исходной единичной матрицы E будет находиться обратная матрица A^{-1}.

Пример

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix} \qquad \det A = 9-8=1\neq 0 \Rightarrow$$ обратная матрица существует

$$\left(\begin{matrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right) \overset{[a_1-a_2]}{\Leftrightarrow} \left(\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}\right) \overset{[-2a_1+a_2]}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{matrix}\right) \overset{[a_1-a_2]}{\Leftrightarrow} \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Ещё пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \det A = -3 - 2 = -5 \neq 0 \Rightarrow$$ обратная матрица существует

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{[a^2 - a^1]}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{[5a^1 + 2a^2]}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{[a^1/5,\, a^2/(-5)]}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix}$$