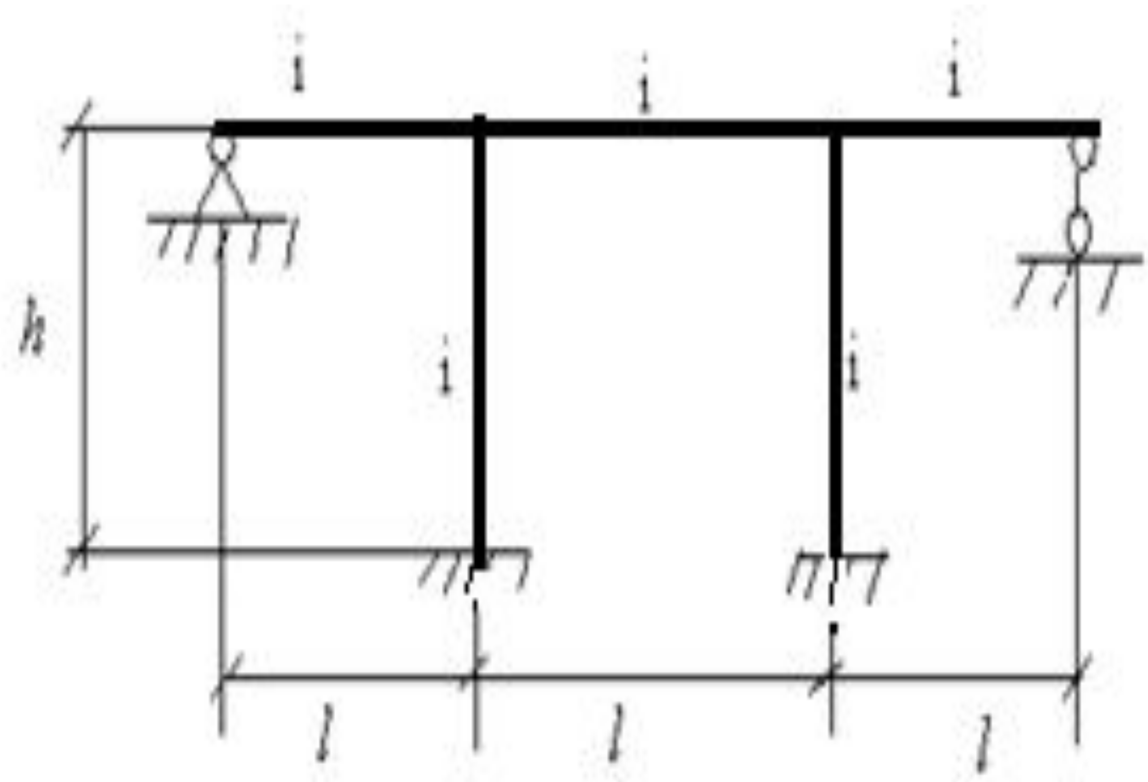
Лекция
Примеры расчета рамы с распределенной массой на собственные и вынужденные колебания

Пример 1

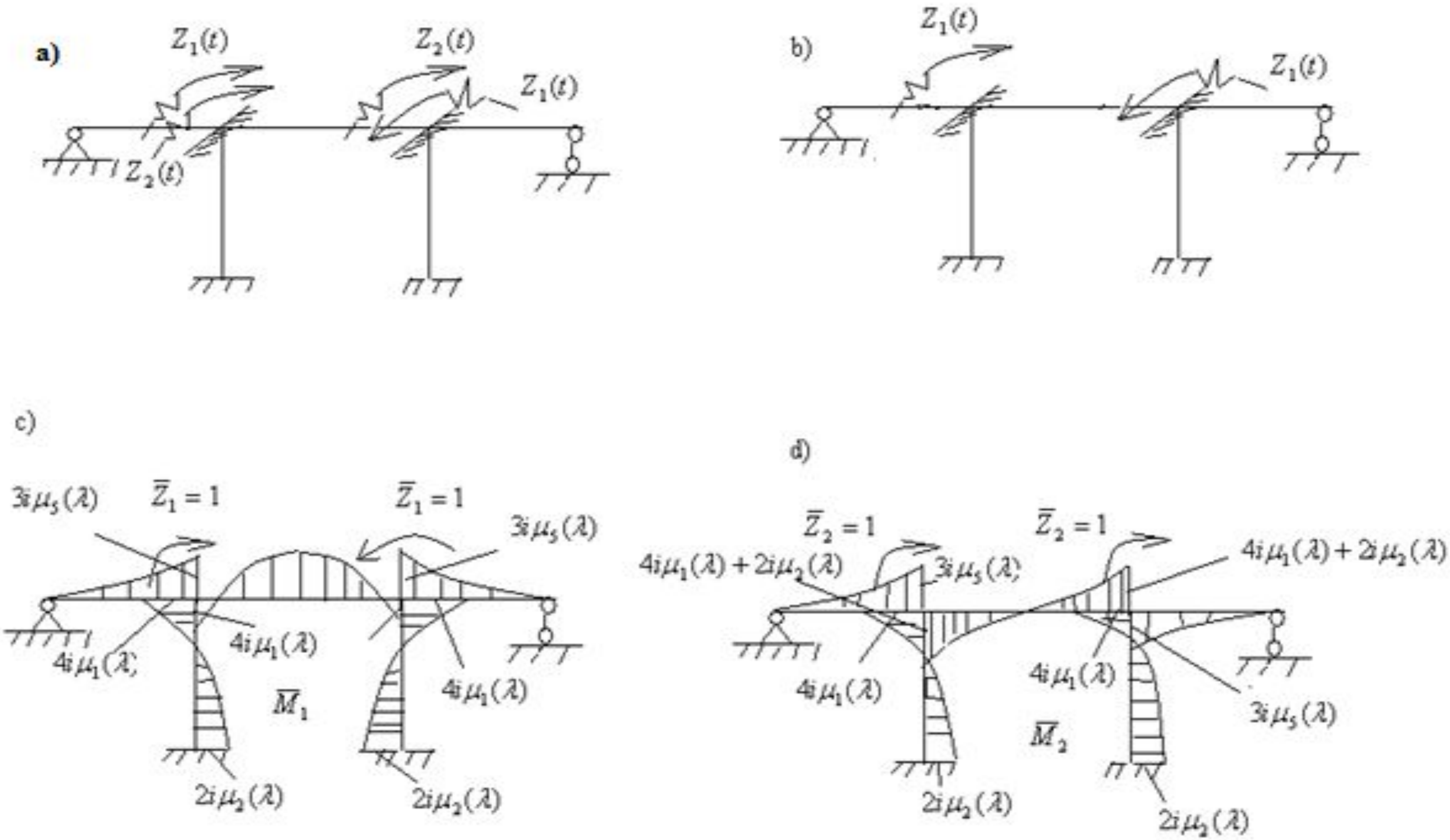
Определить собственные частоты поперечных колебаний симметричной рамы с распределенной массой по длине стержней (рисунок 1). Пусть высота стоек и длины пролетов одинаковы, а интенсивность распределения масс постоянная величина, т.е.

h= $l = 6м, m = const$

Расчетная схема



Группировка неизвестных метода перемещений



Канонические уравнения

$$Z_1(t) = Z_1 Sin\omega t, \qquad Z_2(t) = Z_2 Sin\omega t$$

$$r_{11} Z_1 + R_{1p} = 0, \qquad r_{22} Z_2 + R_{2p} = 0$$

$$\lambda = l\sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}$$

$$r_{11} = 0, \qquad r_{22} = 0$$

$$r_{11} = 2\left[3i\mu_5(\lambda) + 4i\mu_1(\lambda) + 4i\mu_1(\lambda) - 2i\mu_2(\lambda)\right] = 0,$$
$$r_{22} = 2\left[3i\mu_5(\lambda) + 4i\mu_1(\lambda) + 4i\mu_1(\lambda) + 2i\mu_2(\lambda)\right] = 0$$

$$r_{11} = \left[3i\mu_5(\lambda) + 8i\mu_1(\lambda) - 2i\mu_2(\lambda)\right] = 0,$$
$$r_{22} = \left[3i\mu_5(\lambda) + 8i\mu_1(\lambda) + 2i\mu_2(\lambda)\right] = 0$$

$$\omega = \lambda^2\sqrt{\frac{i}{ml^3}} = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Подставляя заданные значения длин пролетов, получаем следующие значения для симметричных частот собственных колебаний:

λ_1=3,34; λ_2=4,25; λ_3=4,73

$$\omega_1 = 0{,}318\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = 0{,}501\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_1 = 0{,}622\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Для обратносимметричных форм собственных колебаний получаем:

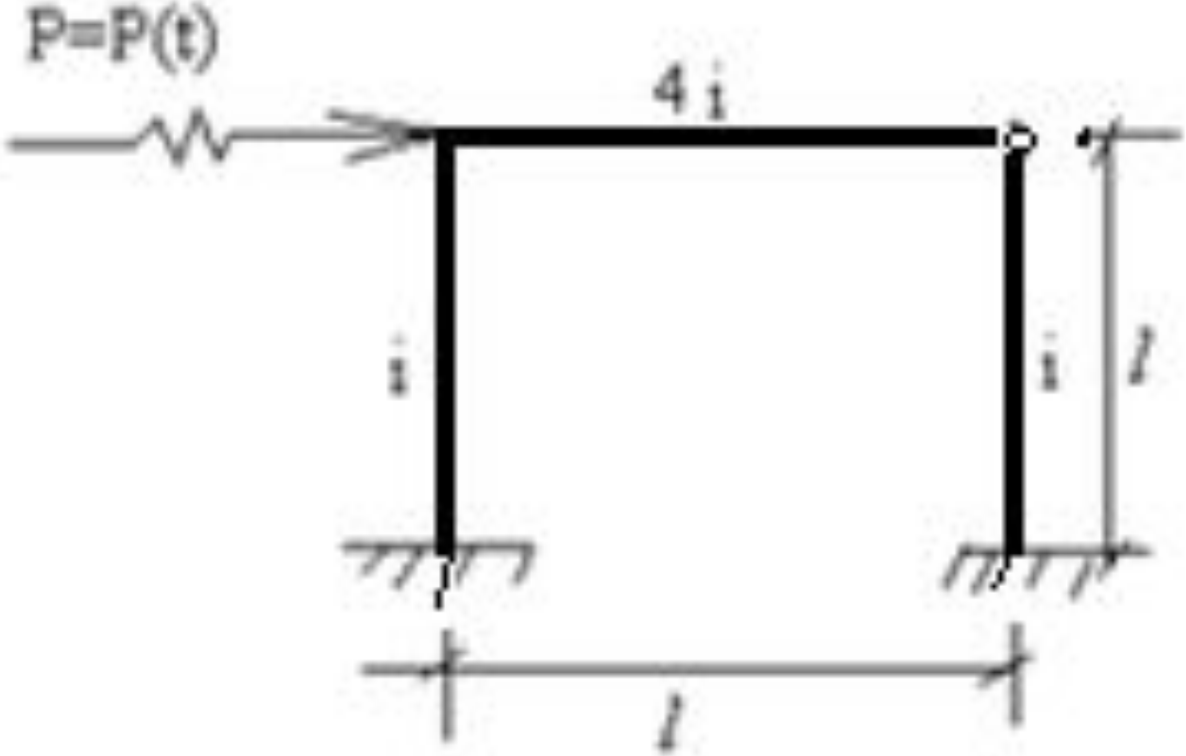
λ_1=3,6; λ_2=4,53 λ_3=5,02

$$\omega_1 = 0{,}36\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = 0{,}57\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_1 = 0{,}68\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

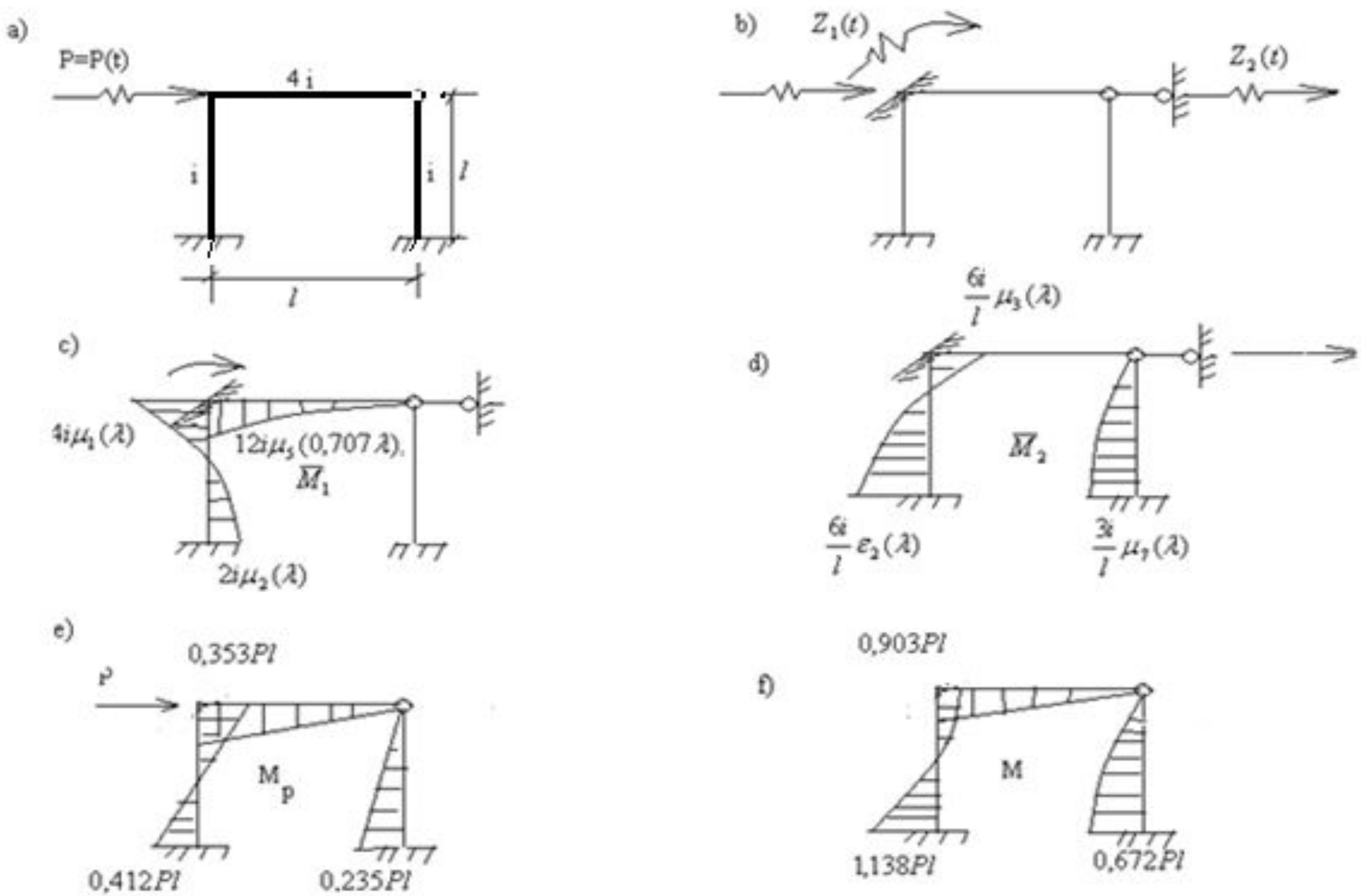
Пример 2

Построить эпюру динамических изгибающих моментов в раме с распределенной массой по длине стержней, показанной на рисунке 3, а от действия возмущающей силы $P(t)=P \sin\theta t$, где θ- частота внешней силы. Пусть $\theta = 0{,}8\omega$, где ω- собственная частота основного тона колебаний. Погонные массы ригеля и стоек постоянны, т.е. $m=const$.

Расчетная схема



Метод перемещений



Определение собственных частот

$$Z_1(t) = Z_1 Sin\omega t, \qquad Z_2(t) = Z_2 Sin\omega t$$

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0, \qquad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0$$

$$r_{11} = \left[4i\mu_1(\lambda) + 12i\mu_5(0{,}707\lambda)\right], \qquad r_{12} = r_{21} = -\frac{6i}{l}\mu_3(\lambda),$$

$$r_{22} = \left[\frac{12i}{l^2}\varepsilon_3(\lambda) + \frac{3i}{l^2}\varepsilon_8(\lambda) - \frac{i}{l^2}\lambda^4\right] = 0, R_{1p} = 0, \quad R_{2p} = -P$$

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad \omega_1 = (\frac{\lambda}{l})^2\sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{2{,}82}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0$$

Динамический расчет

По условию $\theta=0{,}6\omega_1=\frac{2{,}25}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$, $\lambda = l\sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}$

следовательно, $\lambda=\sqrt{2{,}25}=1{,}5$.

Подставив специальные функции в канонические уравнения , после их решения, находим:

$Z_1=0{,}0759Pl/i$, $Z_2=0{,}210Pl^2/i$. Окончательная эпюра динамических изгибающих моментов на основе принципа независимости действия сил, определяется по следующей формуле:

$$M = \overline{M}Z_1 + \overline{M}Z_2 + M_p$$

Окончательная эпюра амплитудных значений изгибающих моментов представлена на рисунке (3,f). На рисунке (3e) показана эпюра изгибающих моментов от статической нагрузки, равной амплитудному значению силы P(t). Наибольший динамический коэффициент по изгибающим моментам равен:

$$\mu_{max} = \frac{1{,}138}{0{,}412} = 2{,}76$$