ПОДОБИЕ В ГЕОМЕТРИИ

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

ТЕМА «ПОДОБИЕ»

- Теоретический материал.
- Задачи.

ПЛАН

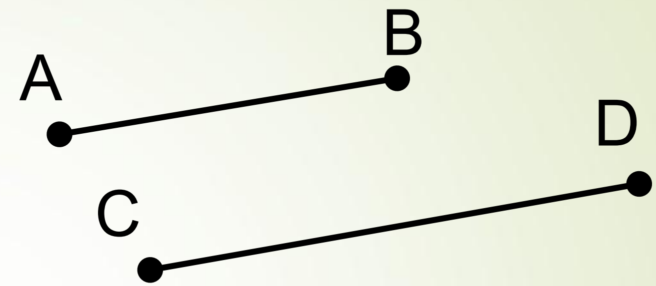
- Пропорциональные отрезки.
- Свойство биссектрисы треугольника.
- Определение подобных треугольников.
- Отношение периметров подобных фигур.
- Отношение площадей подобных фигур.
- Признаки подобия треугольников.

ЗАДАЧИ

- Разминка.
- Решение задач.
- Задачи на признаки подобия.
- Тест

Пропорциональные отрезки

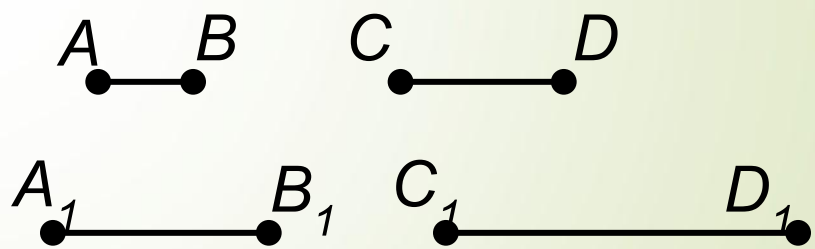
- Отношением отрезков называется отношение их длин.



$$\frac{AB}{CD}$$

- Отрезки *AB* и *CD* *пропорциональны* отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если

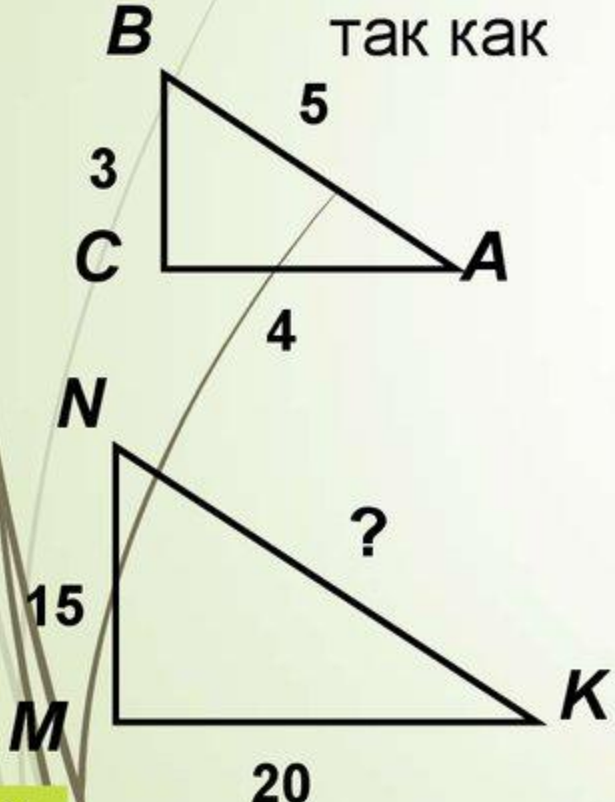
$$\frac{AB}{CD} \quad \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$



ПРИМЕР

ПРИМЕР

- Даны два прямоугольных треугольника



Стороны BC и CA пропорциональны MN и MK, так как

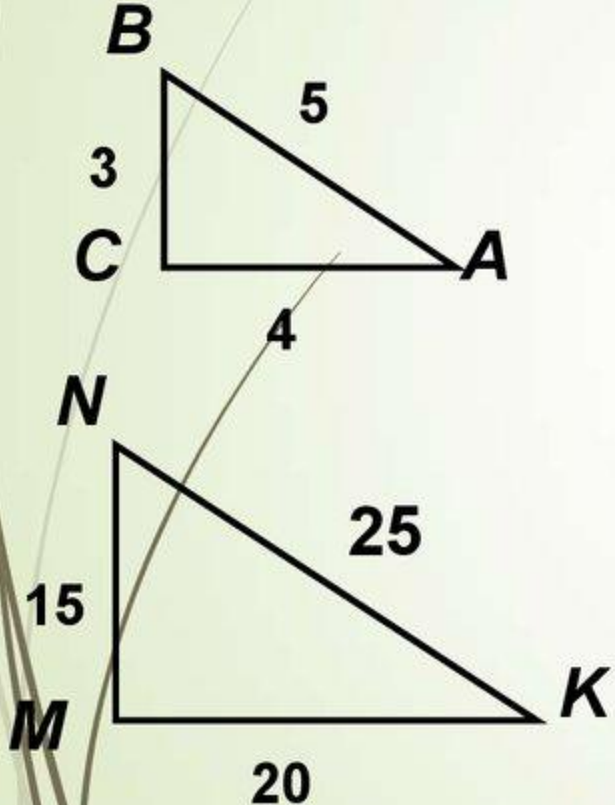
$$\frac{BC}{MN} = \frac{3}{15} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{MK} = \frac{4}{20}$$

т.е. $$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{1}{5}$$

НАЙДИТЕ ГИПОТЕНУЗУ БОЛЬШЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Пропорциональность отрезков

- Понятие пропорциональности вводится для любого числа отрезков.



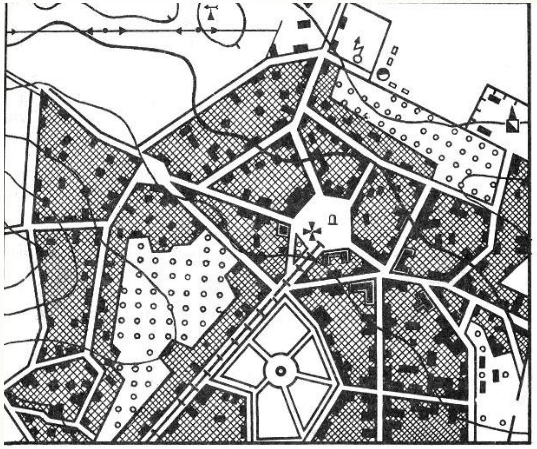
например

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{AB}{NK}$$

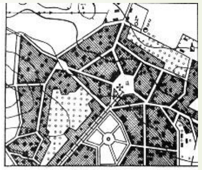
Подобные фигуры

Предметы одинаковой формы, но разных размеров

Здание и его макет



1 : 10 000



1 : 25 000

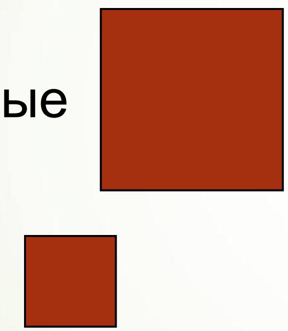
Планы, географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах.

Фотографии, отпечатанные с одного негатива, но с разными увеличениями;

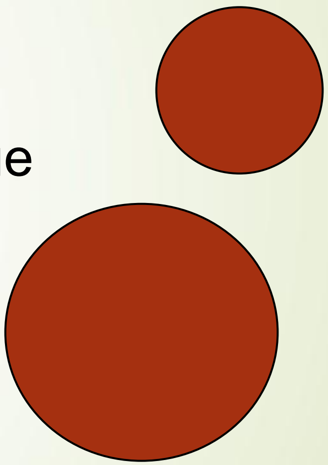
Подобные фигуры

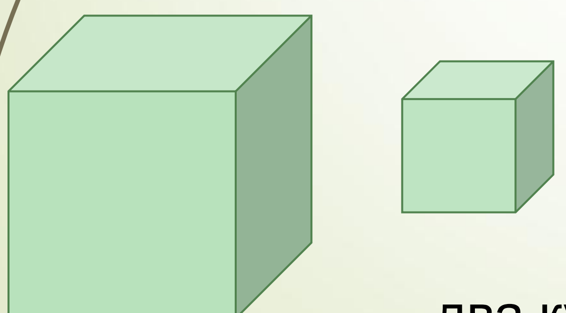
- В геометрии фигуры одинаковой формы называют *подобными* фигурами

Подобными являются любые два квадрата

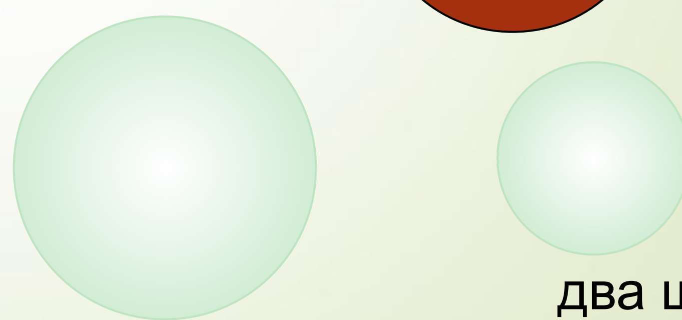


Подобными являются любые два круга





два куба



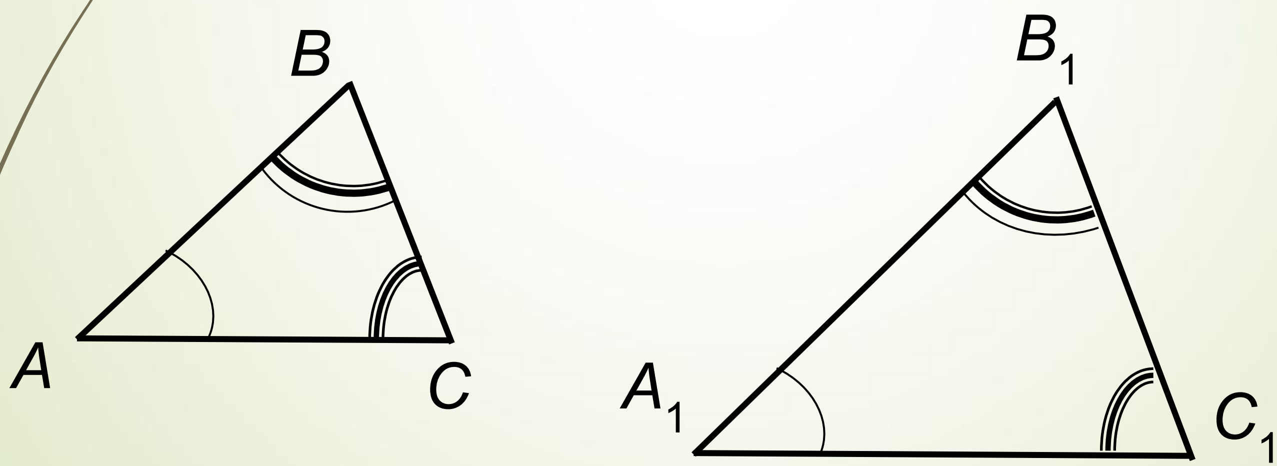
два шара

Подобные треугольники

- Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$,

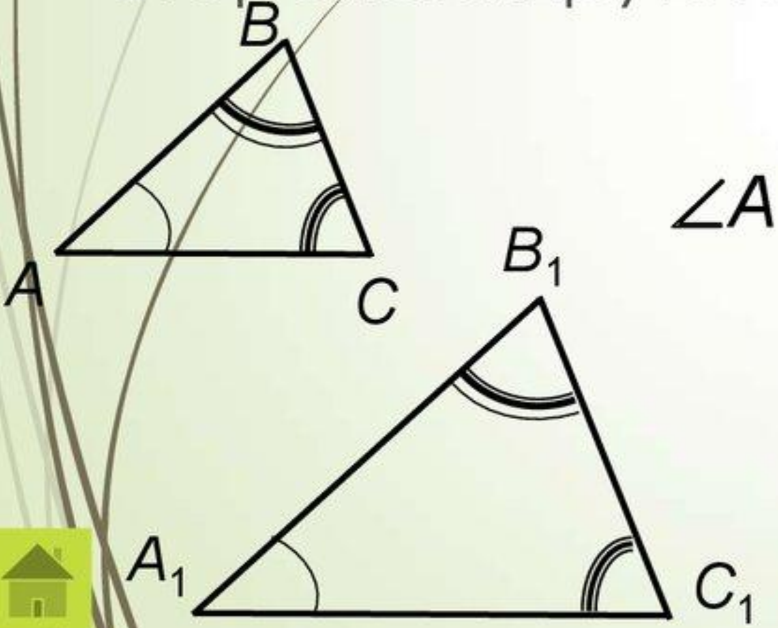
у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Стороны AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1, лежащие против равных углов, называют *сходственными*



Определение

- Два треугольника называются **<u>подобными</u>**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



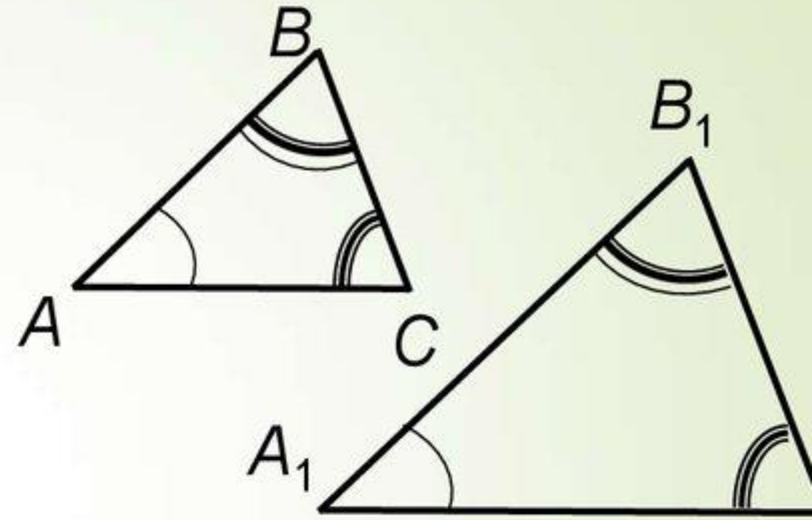
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Коэффициент подобия

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

k – коэффициент подобия.

- Число *k* , равное отношению сходственных сторон, называется *коэффициентом подобия*.

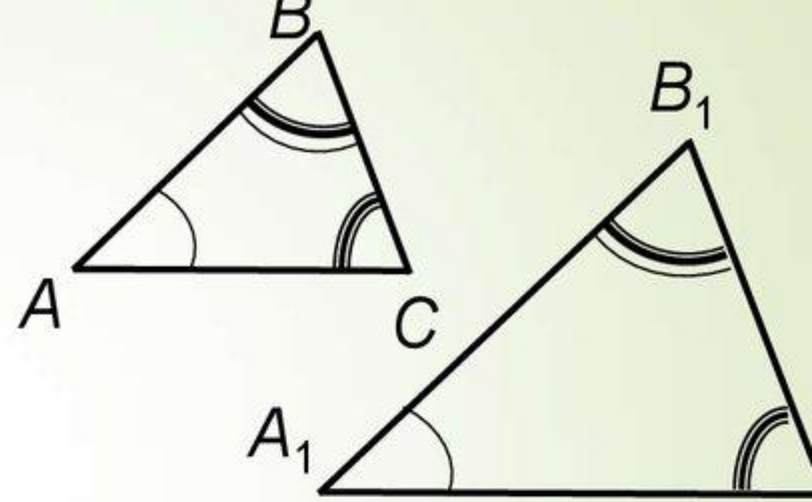
Дополнительные свойства

- Отношение *высот* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия*.
- Отношение *медиан* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия*.
- Отношение *биссектрис* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия*.

Отношение периметров

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

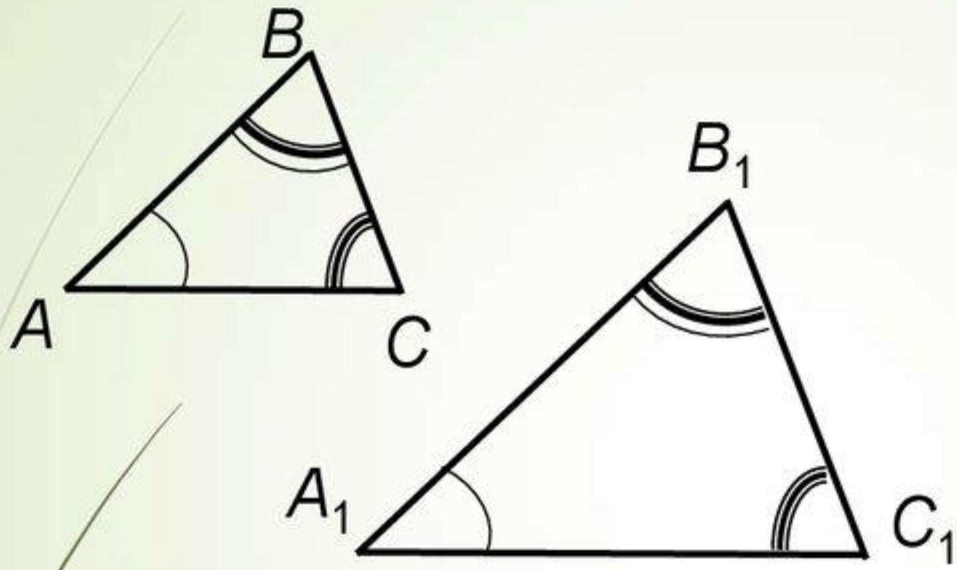


$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- **Отношение периметров подобных треугольников равно**
- ***коэффициенту подобия.***

Отношение периметров



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

$$AB = kA_1B_1$$

$$BC = kB_1C_1$$

$$AC = kA_1C_1$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}$$

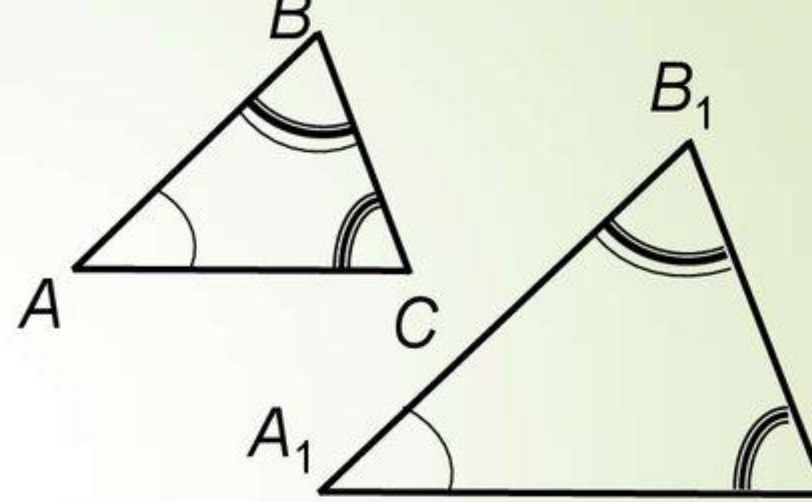
Выносим общий множитель за скобку и сокращаем дробь.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} =$$

Отношение площадей

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



- Отношение площадей подобных треугольников равно *квадрату коэффициента подобия*.

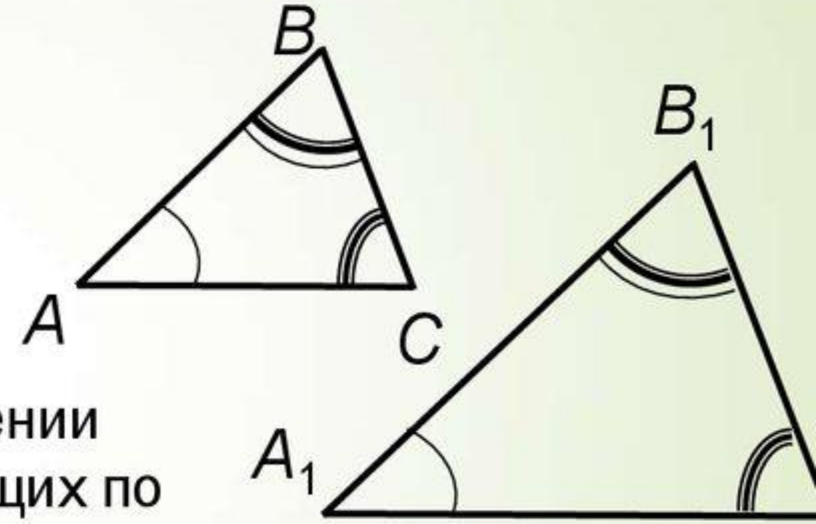
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Отношение площадей

Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, коэффициент подобия k

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



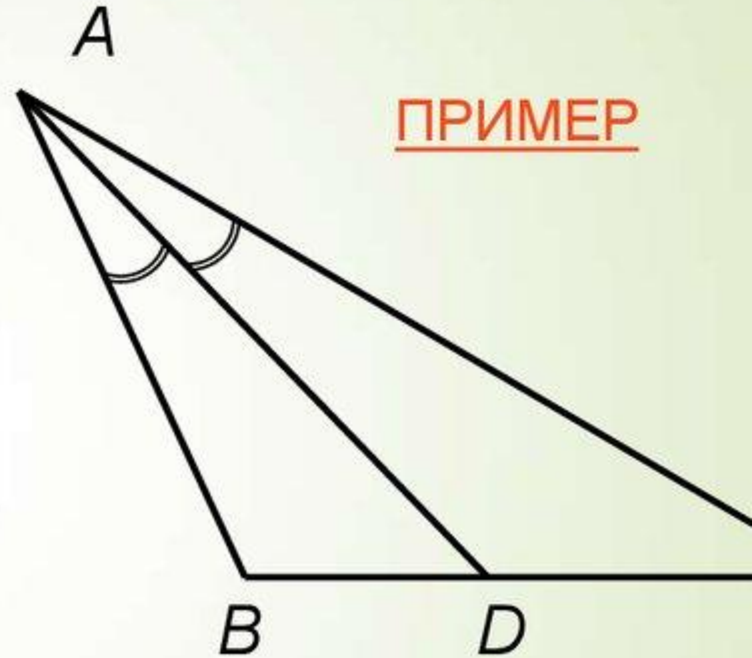
$\angle A = \angle A_1$, по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, имеем

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

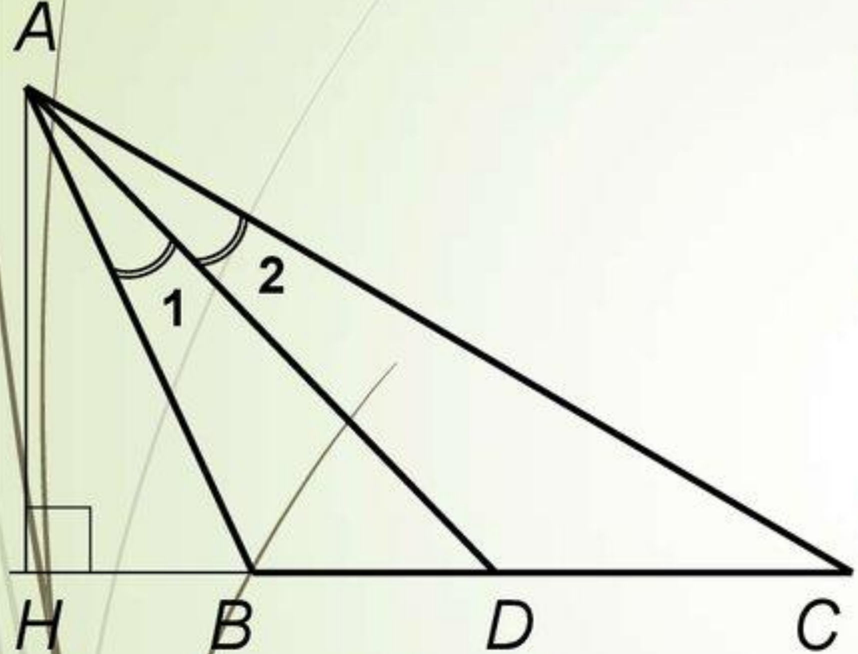
ПРИМЕР



$$\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

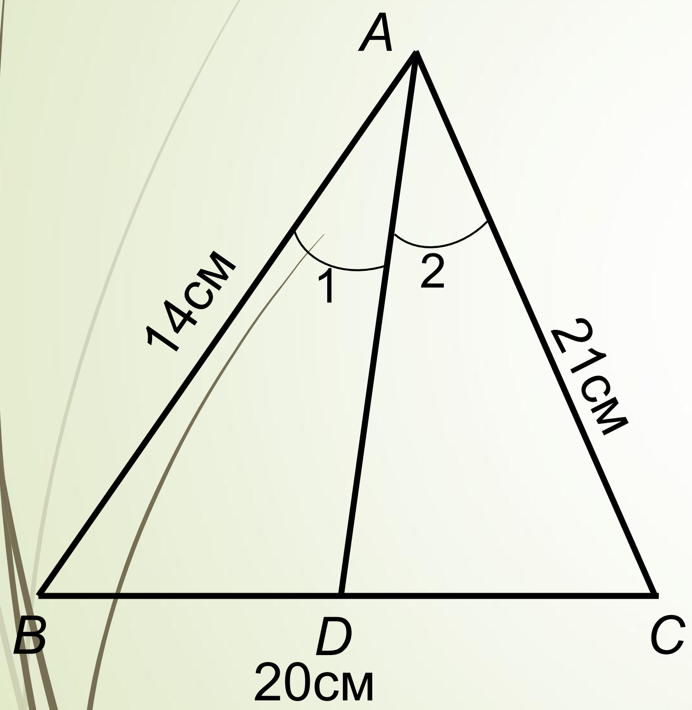
Свойство биссектрисы треугольника



- ΔABD и ΔACD имеют общую высоту AH
- $$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{DB}{DC}$$
- ΔABD и ΔACD имеют равные углы $\angle 1 = \angle 2$
- $$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AD \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$$

ИМЕЕМ $$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Свойство биссектрисы треугольника



Дано: ΔABC

AD – биссектриса

$AB = 14$ см

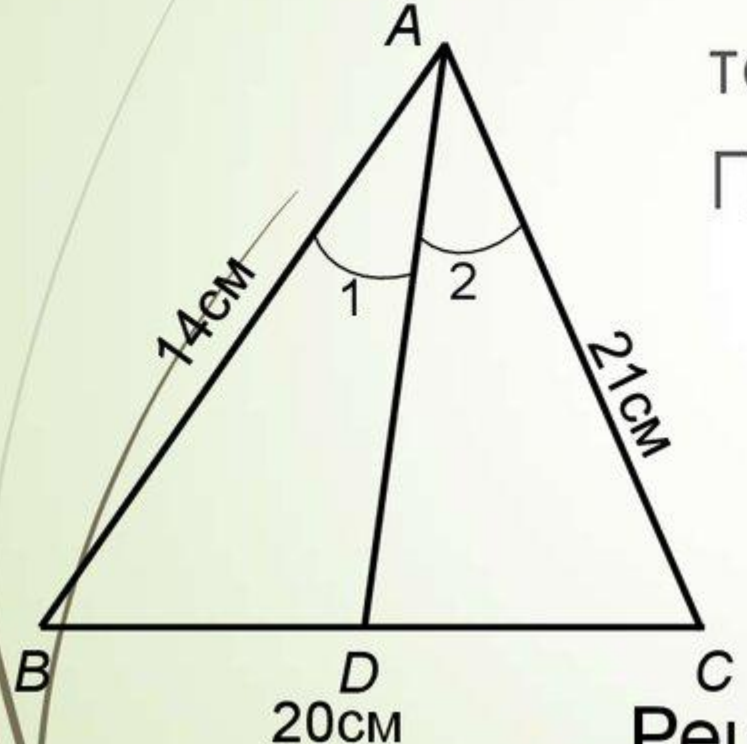
$BC = 20$ см

$AC = 21$ см

Найти: BD, CD.

Решение:

Свойство биссектрисы треугольника



Решение:

Пусть BD = x см,

тогда CD = (20 – x) см.

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

имеем $\frac{x}{14} = \frac{20 - x}{21}$

Решая уравнение, получим x =

***BD* = 8 см, *CD* = 12 см.**

Признаки подобия треугольников

- Первый признак подобия треугольников.

(по двум углам)

- Второй признак подобия треугольников.

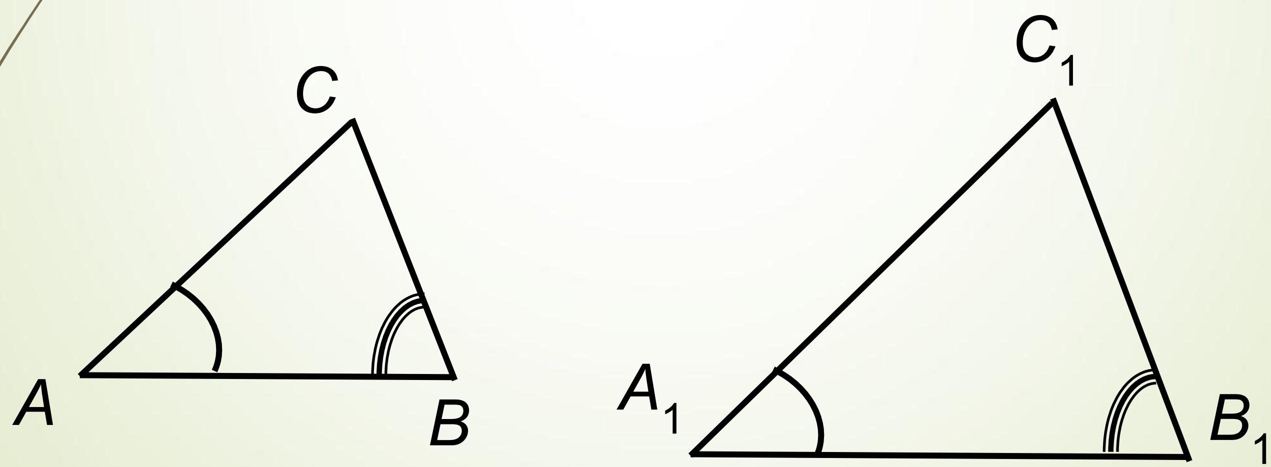
(по углу и двум пропорциональным сторонам)

- Третий признак подобия треугольников.

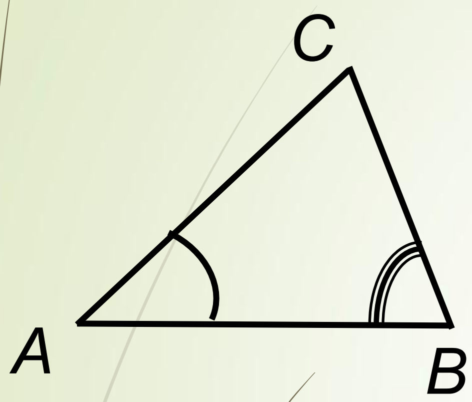
(по трем пропорциональным сторонам)

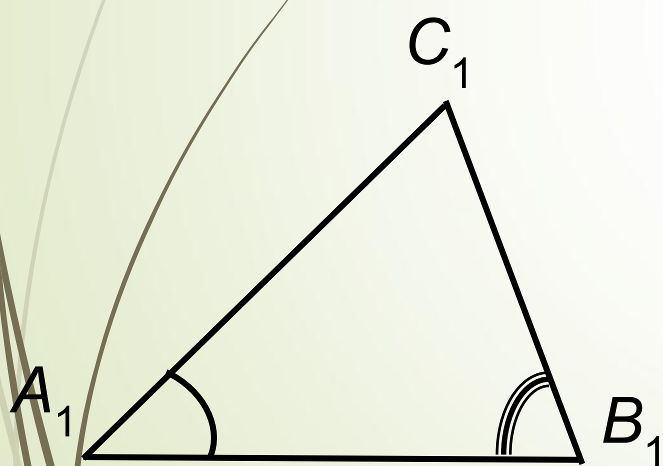
Первый признак подобия треугольников.

- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Первый признак подобия треугольников.





Дано:

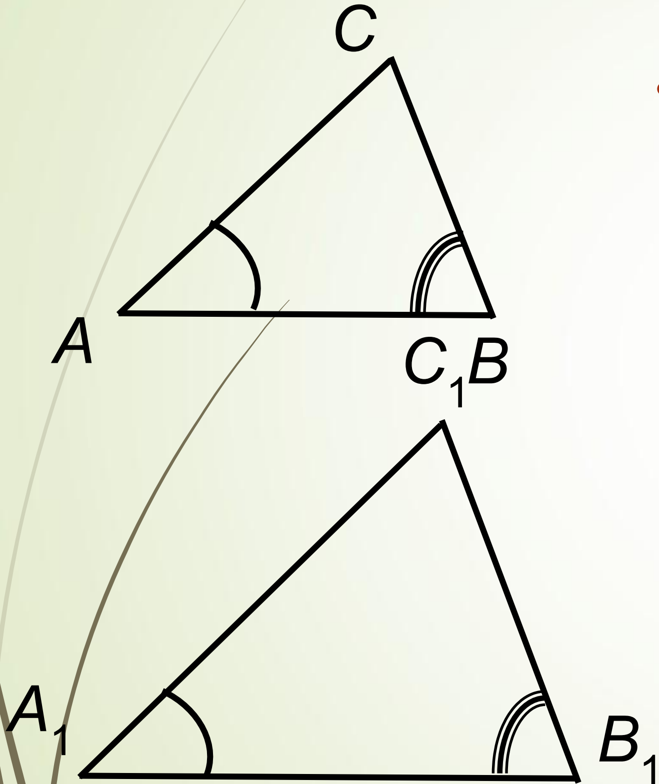
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $<A =<A_1$, $<B = <B$.

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

Первый признак подобия треугольников.



Доказательство:

- $<A = <A_1$, $<B = <B_1$.

$<C = 180° – <A – <B$,

$<C_1 = 180° – <A_1 – <B_1$.

$<C = <C_1$

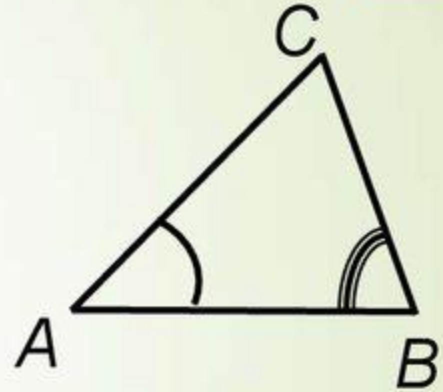
Таким образом углы треугольников соответственно равны.

Первый признак подобия треугольников.

Доказательство:

- $\angle A = \angle A_1$, $\quad \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$

  $\angle B = \angle B_1$. $\quad \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot BC}{A_1B_1 \cdot B_1C_1}$



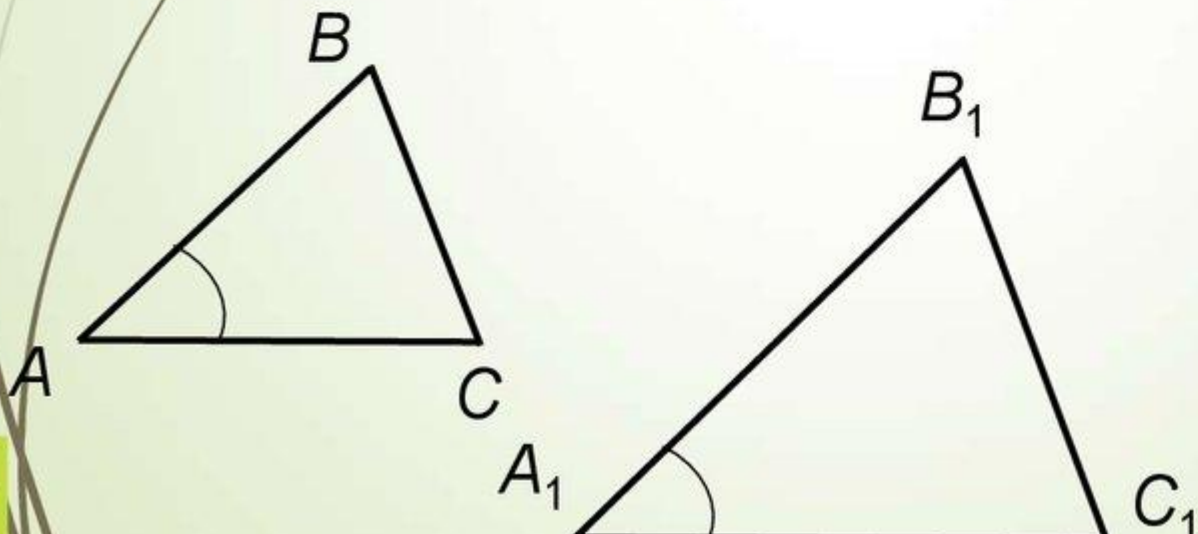
Имеем $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

Аналогично, рассматривая равенство углов $\angle C = \angle C_1$, $\angle A = \angle A_1$, получим $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$

Итак, сходственные стороны пропорциональн

Второй признак подобия треугольников.

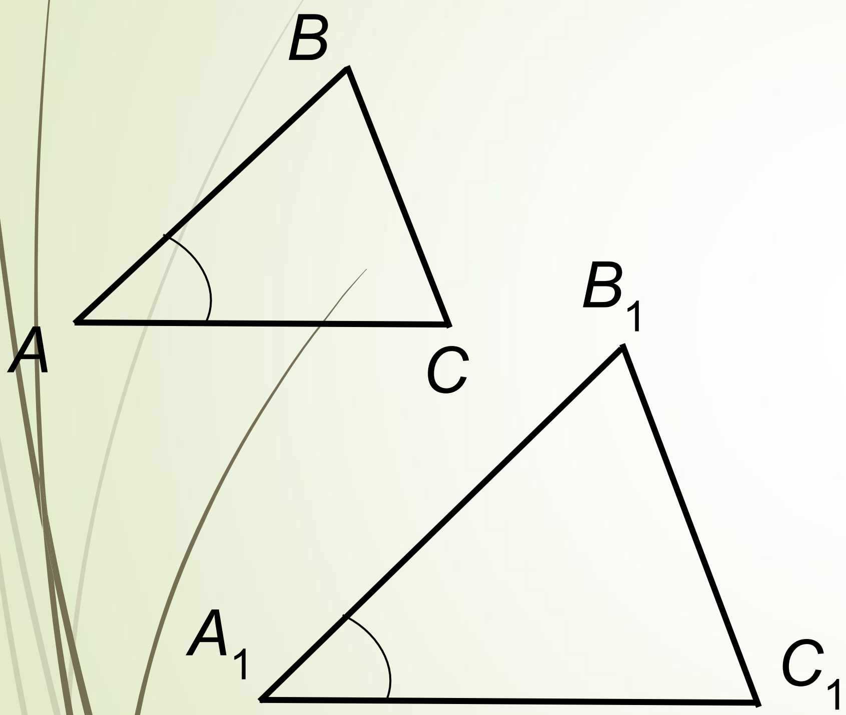
- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



$$\angle A = \angle A_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Второй признак подобия треугольников.



Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$,

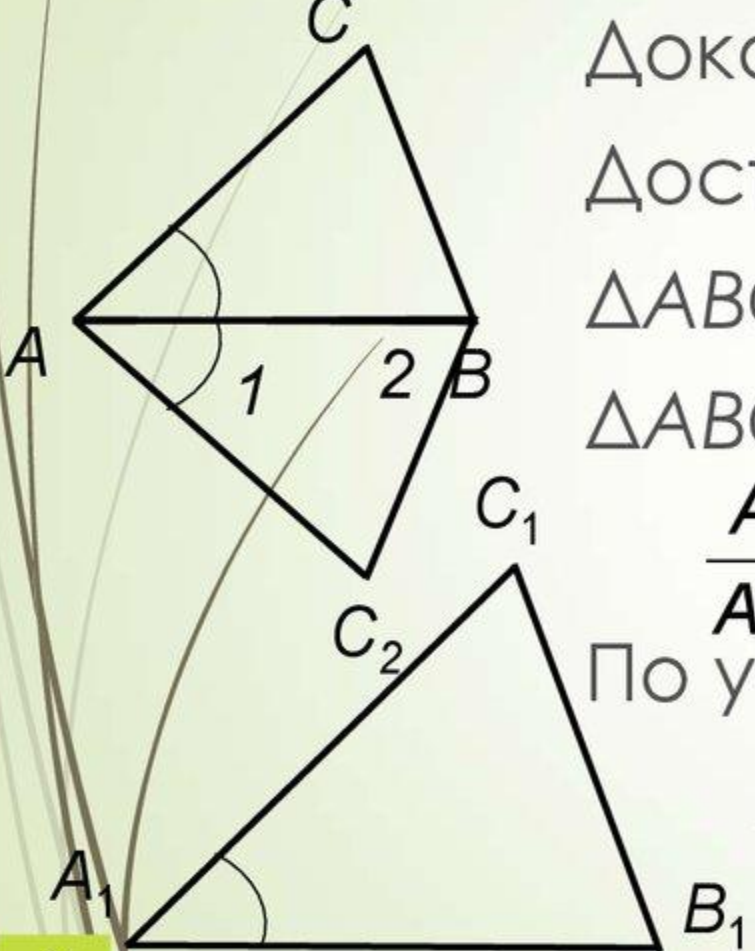
$<A = <A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}\frac{AC}{A_1C_1}$

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

Второй признак подобия треугольников.



Доказательство:

Достаточно доказать, что $\angle B = \angle$

ΔABC_2, $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$,

$\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум углам

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$$ (из подобия).

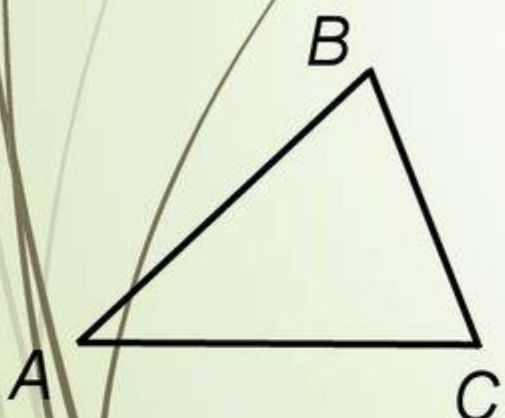
По условию $$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

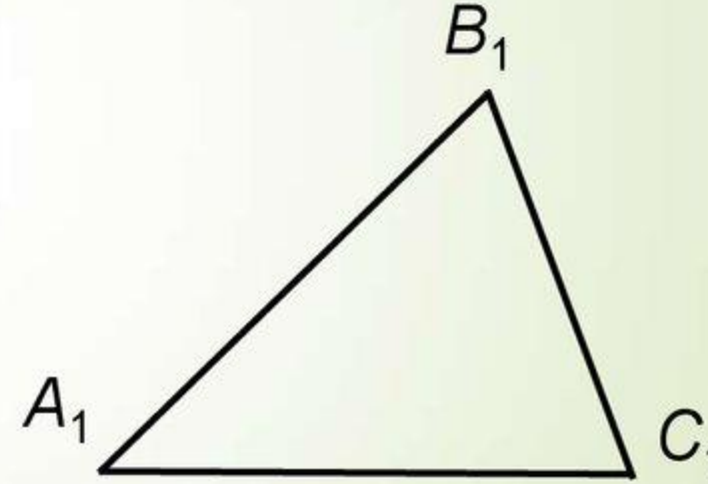
$AC = AC_2$.

$\Delta ABC = \Delta ABC_2$, т.е. $\angle B = \angle$

Третий признак подобия треугольников.

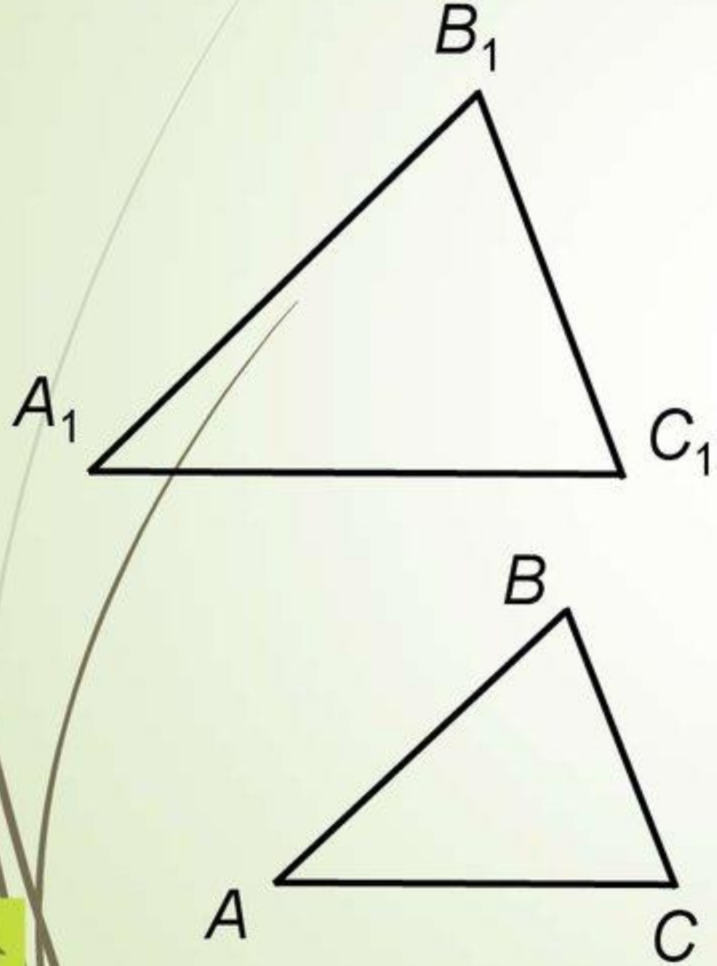
- Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.





$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Третий признак подобия треугольников.



Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

Третий признак подобия треугольников.

Доказательство:

Достаточно доказать, что $\angle A=\angle A_1$

ΔABC_2, $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$,

$\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум углам.

Отсюда $$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{AC_2}{A_1C_1}$$

По условию $$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$

$\Delta ABC=\Delta ABC_2$ по трем сторонам, т.е. $\angle A = \angle A_1$

1 задача

Сходственные стороны подобных треугольников относятся как 1 : 3. Найдите периметр большего треугольника, если периметр меньшего 15 см.

2 задача

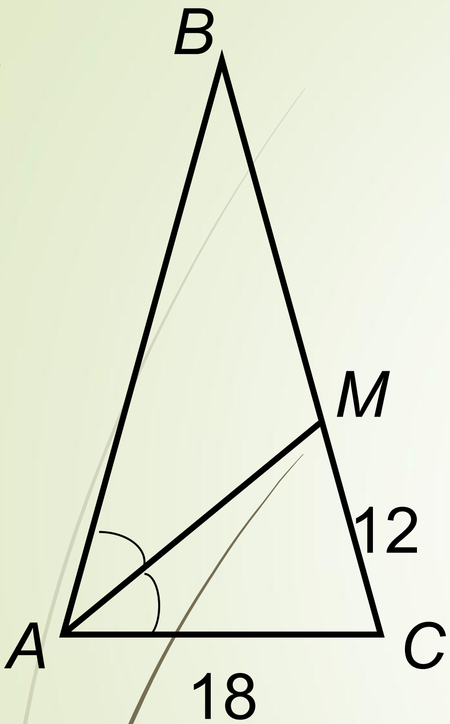
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$,

$AB : A_1B_1 = k = 4$

$S_{\Delta ABC} = 48$ м^2.

Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

3 задача



Основание равнобедренного треугольника равно 18 мм, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, из которых прилежащий к основанию равен 12 мм. Найдите периметр треугольника

4 задача

Периметры подобных треугольников

12 мм и 108 мм соответственно.

Стороны одного из них 3 мм, 4 мм и 5 мм.

Найдите стороны другого и

определите его вид.

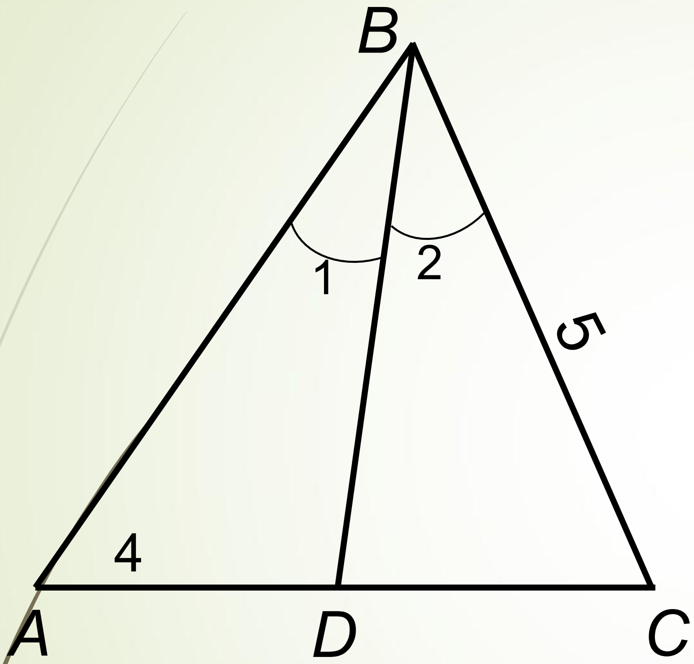
5 задача

Площади двух подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2.

Одна из сторон первого треугольника равна 2 см.

Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

6 задача



$AD = 4$

$BC = 5$

$AB + DC = 12$

Найти AB, DC, AC

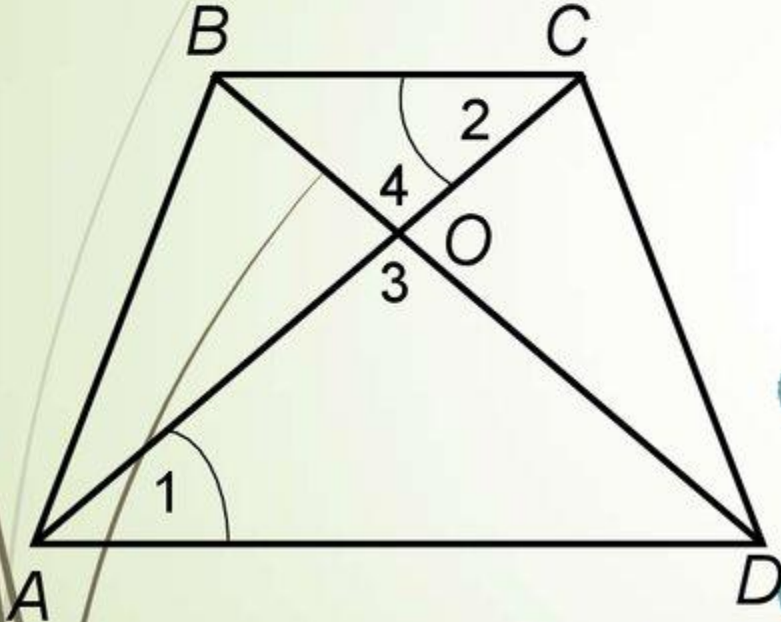
ЗАДАЧИ

1.

Диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *BOC* и *AOD* относятся как 1 : 9. Сумма оснований *BC* и *AD* равна 4,8 см. Найдите основания трапеции.

Решение:

Решение



- Рассмотрим ΔAOD и ΔBOC:

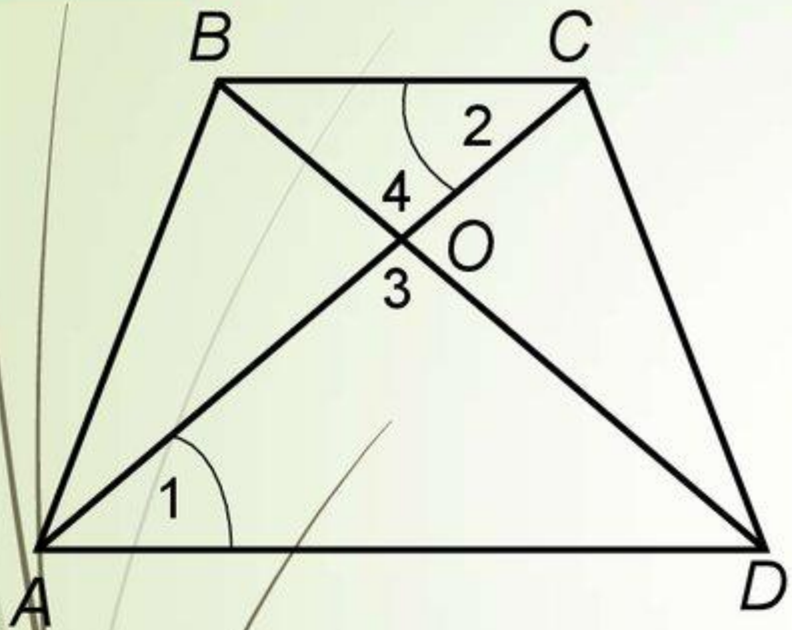
$\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$, и секущей AC;

$\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные)

- $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ (по двум углам)
-

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = k$$

Решение



- $$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = k^2 = \frac{9}{1}$$

  k = 3

- AD + BC =

  = 3BC + BC = 4BC

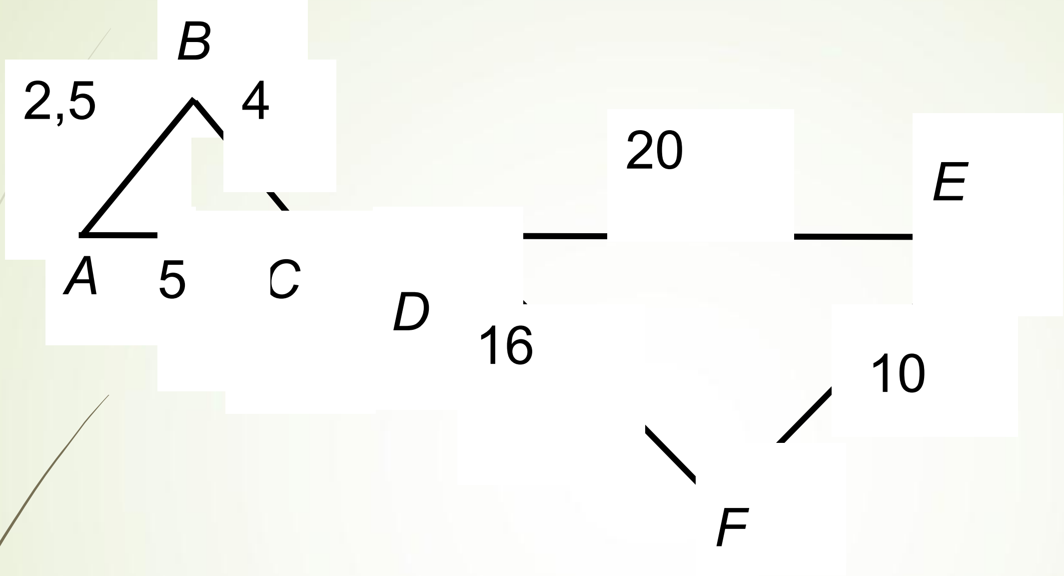
  AD + BC = 4,8см

  (по условию)

- BC = 1,2 см
- AD = 3,6 см

Ответ: *BC* = 1,2 см *AD* = 3,6 см

ЗАДАЧИ

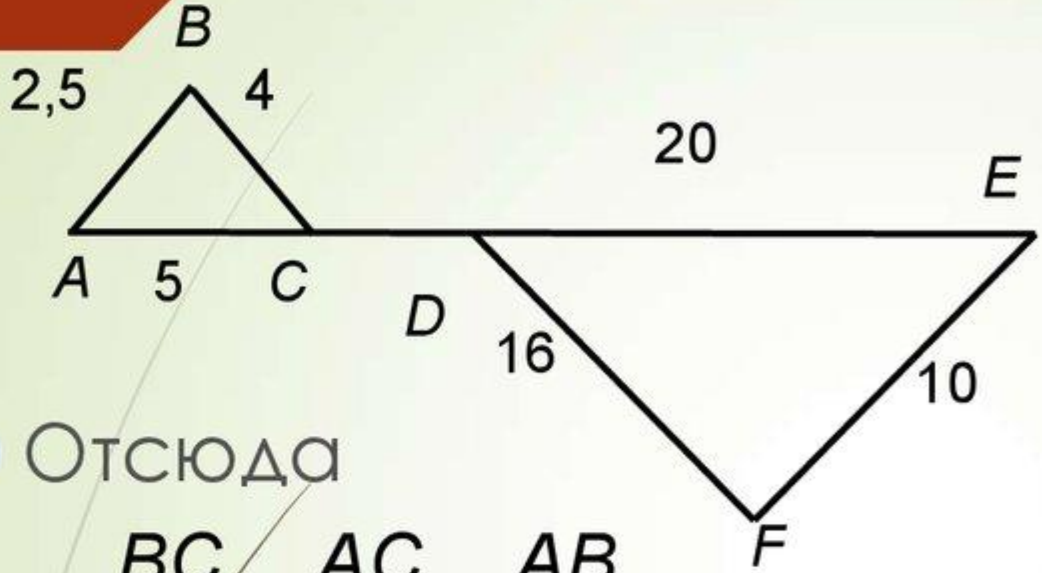


2.

Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке, подобны, и выясните взаимное положение прямых *CB* и *DF*.

Решение:

Решение



- Найдем отношение сходственных сторон данных треугольников

$$\frac{AB}{EF} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25$$

$$\frac{AC}{ED} = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

$$\frac{BC}{DF} = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

- Отсюда

$$\frac{BC}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{EF}$$

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

по трем пропорциональным сторонам

Решение

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Соответственно

<*A* = <*E*

<*B* = <*F*

<*ACB* = <*EDF*

- .

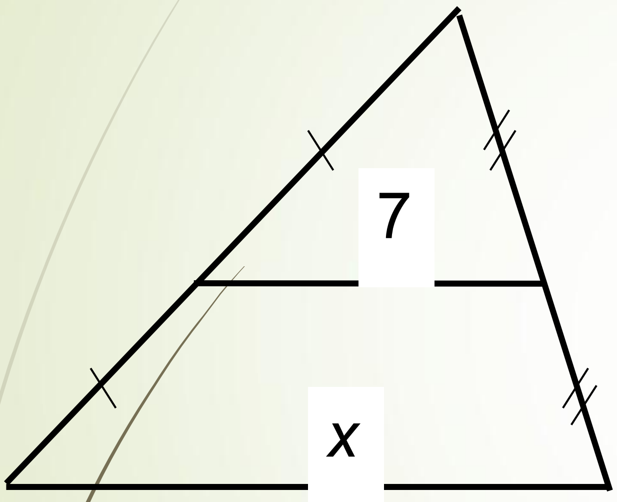
Рассмотрим прямые *BC* и *DF*, секущую *AE*

<1 = <2

(внешние накрест лежащие)

BC || *DF.*

ТЕСТ



1. По данным рисунка х равен

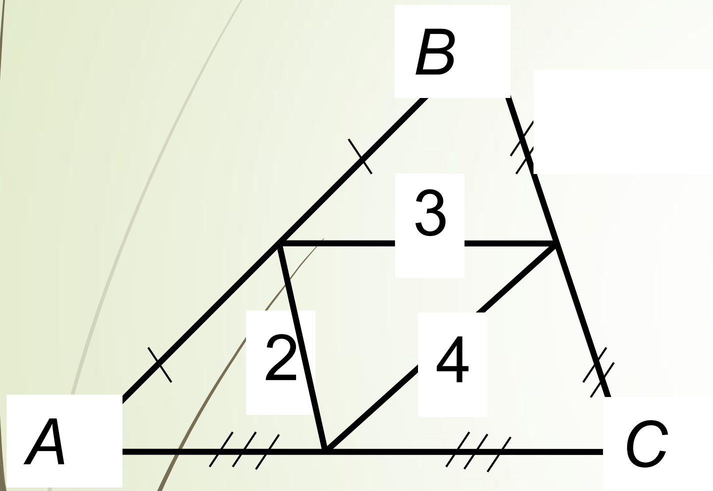
А) 7

Б) 14

В) 3,5

Г) 14/3

ТЕСТ



2) По данным рисунка периметр ΔABC равен

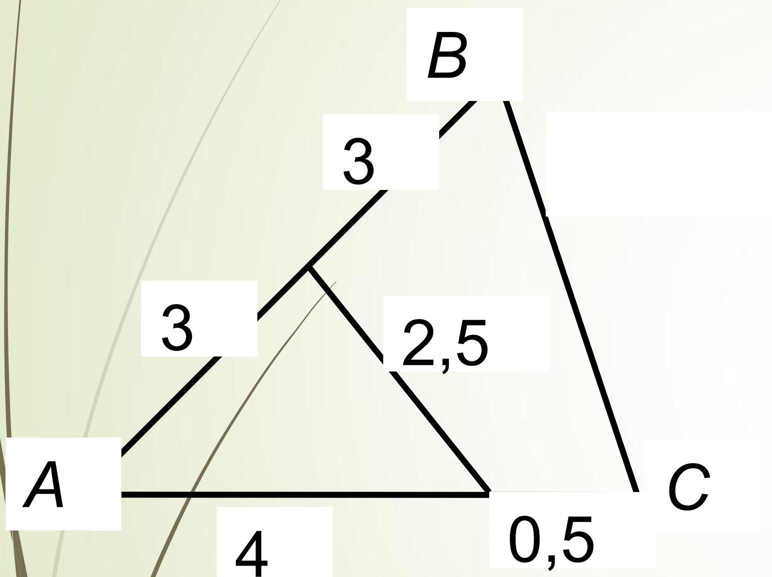
А) 9

Б) 27

В) 36

Г) 18

ТЕСТ



3) По данным рисунка отрезок *BC* равен

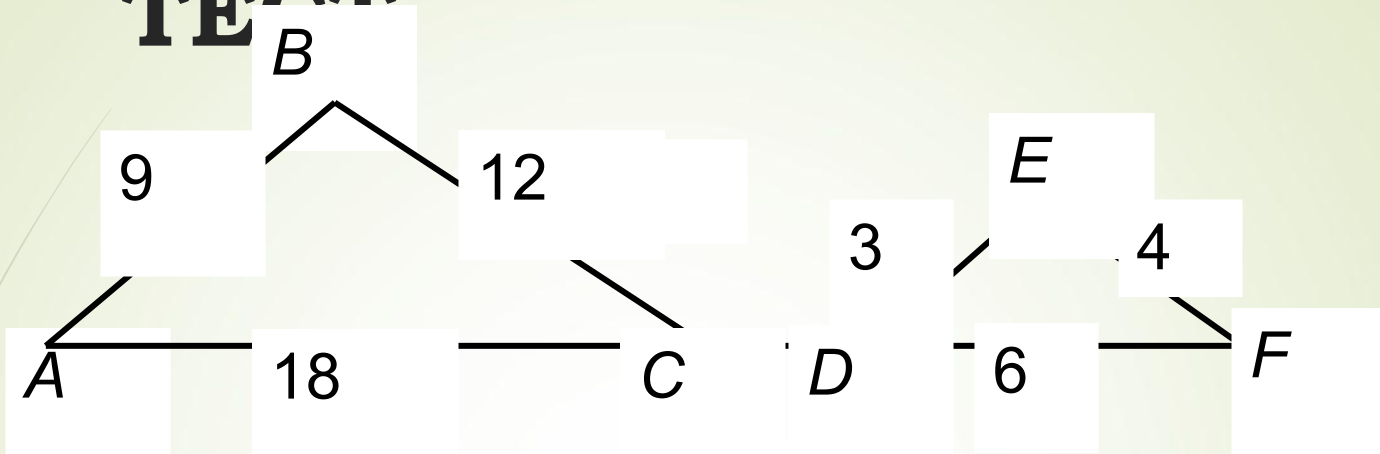
А) 3,75

Б) 7,5

В) 5

Г) 4,5

ТЕСТ



4) По данным рисунка площади данных треугольников относятся

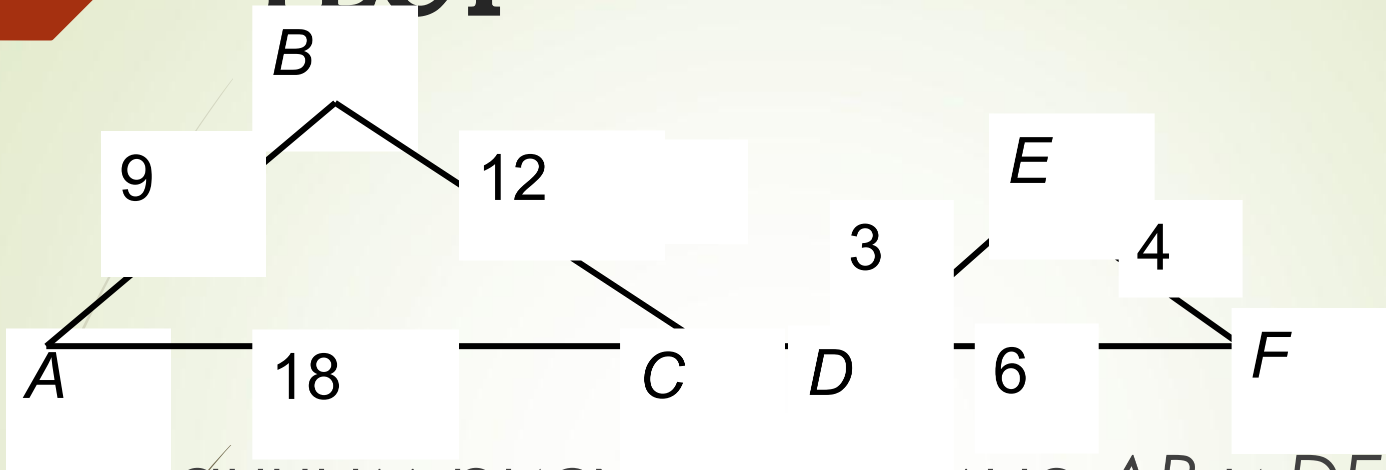
А) 3 : 1

Б) 9 : 1

В) 6 : 1

Г) 9 : 4

ТЕСТ



5) По данным рисунка прямые *AB* и *DE*

А) нельзя ответить

Б) пересекаются

В) параллельны

ТЕСТ

ОТВЕТЫ:

	А	Б	В	Г
1		✦		
2				✦
3	✦			
4		✦		
5			✦	